МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Московский государственный машиностроительный
университет (МАМИ)»

Е.А.Коган

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

по дисциплине «Математика» для студентов всех специальностей
и направлений подготовки дипломированных специалистов
и бакалавров заочного отделения

Одобрено методической комиссией
по математическим и естественно – научным дисциплинам

Москва 2014

Разработано в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами ВПО для всех специальностей и направлений подготовки специалистов и бакалавров заочного обучения на основе рабочих программ по дисциплине «Математика».

Р е ц е н з е н т ы:

Д-р физ.- мат. наук, проф. Е.Б.Кузнецов – Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
д-р физ.- мат. наук, проф. Е.А. Лопаницын - Университет машиностроения, кафедра «Прикладная математика»

Работа подготовлена на кафедре «Математический анализ»

Коган Е.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Учебное пособие по дисциплине «Математика» для студентов всех специальностей и направлений подготовки дипломированных специалистов и бакалавров заочного отделения. М.: Университет машиностроения, 2014. 130 с.

Пособие предназначено для изучения раздела высшей математики, посвященного обыкновенным дифференциальным уравнениям. Оно содержит теоретические сведения в объёме лекционного курса, подробно разобранные примеры решения типовых задач, а также варианты расчетно – графической работы и варианты тестовых заданий. Пособие может быть использовано студентами в качестве руководства для самостоятельной работы и преподавателями для проведения практических занятий. - Библ. 8.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов заочной формы обучения. Студенты должны ясно осознавать, что не существует какой – либо специфической «заочной» математики. Математика едина. Различными могут быть только программы и технологии обучения. Для студентов заочной формы обучения в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами количество часов, отводимых на лекции и практические занятия в вузе, очень невелико, и основной должна быть самостоятельная работа. Поэтому в пособии по возможности реализован принцип построения учебного комплекса по дисциплине, а именно изложены в минимально необходимом объеме основные теоретические понятия и методы, приведены многочисленные детально разобранные примеры решения всех типовых задач, даны варианты расчетно - графической работы (РГР).

Включены также вопросы для самопроверки и дополнительные задачи для самостоятельной работы, а также варианты тестовых заданий с ответами, безусловно полезные студентам заочной формы обучения для оценки степени усвоения материала и лучшей подготовки к экзаменам.

Изучение дифференциальных уравнений имеет важнейшее значение в математической инженерной подготовке. Объясняется это тем, что дифференциальные уравнения представляют собой математические модели самых разнообразных процессов и явлений, так как их решения позволяют описать эволюцию изучаемого процесса, характер происходящих с материальной системой изменений в зависимости от первоначального состояния системы. Они синтезируют в себе знания, полученные ранее при изучении предшествующих глав математики: линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления, рядов.

Следует отметить, что решение прикладных задач математическими методами включает обычно (в определенной мере, конечно, условно) три этапа. На первом этапе необходимо построить математическую модель явления, то есть получить систему уравнений, описывающих явление (ими часто оказываются именно дифференциальные уравнения); на втором - выбрать и реализовать эффективный метод решения выведенных уравнений; на третьем - провести численный и параметрический анализ и интерпретацию полученного решения, и на основе такого анализа дать необходимые рекомендации инженерам - проектировщикам.

Первый этап, связанный с построением математической модели, то есть с выводом дифференциальных уравнений (или систем дифференциальных уравнений), описывающих то или иное явление, представляет собой обычно весьма трудную самостоятельную задачу. Сложность её состоит в том, что при выводе дифференциальных уравнений необходимо удовлетворить противоречивым требованиям. С одной стороны, построенная математическая модель должна быть адекватной рассматриваемому явлению. С другой стороны, получающиеся дифференциальные уравнения должны иметь по возможности простое решение. Это требует введения различных допущений физического характера, а следовательно, глубокого понимания сути рассматриваемого явления. Процесс построения адекватной математической модели рассматриваемой прикладной задачи обычно сводится к последовательному уточнению модели на основе накапливаемого опыта её применения.

С выводом и применением дифференциальных уравнений к решению тех или иных прикладных задач студенты встречаются при изучении различных общеобразовательных и специальных курсов (физики, теоретической механики, сопротивления материалов, электротехники и др.).

Огромный опыт, накопленный при физическом и математическом моделировании процессов и явлений различной физической природы, свидетельствует о том, что задачи, возникающие в различных областях науки и техники, очень часто приводятся к одинаковым типам дифференциальных уравнений, имеющим общие свойства решений. Предметом настоящего пособия и является изучение аналитических методов решения наиболее распространенных типов обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем.

Для удобства пользования пособием при самостоятельном изучении курса приведена также некоторая справочная информация.

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Основные понятия

При изучении различных физических процессов и явлений обычно не удаётся найти непосредственную зависимость между искомой функцией, описывающей тот или иной процесс, и независимыми переменными. Как правило, удаётся установить связь между неизвестной функцией и её производными.

Дифференциальным уравнением и называется уравнение, в которое неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала.

Если производные от неизвестной функции, входящие в уравнение, берутся только по одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным.* Уравнения, содержащие производные по нескольким независимым переменным, называются *дифференциальными уравнениями в частных производных.*

Порядок наивысшей (старшей) производной, входящей в дифференциальное уравнение, определяет *порядок дифференциального уравнения.*

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка в самом общем виде записывается так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

где $y(x)$ – неизвестная функция, x – независимая переменная, $y'(x),\ y''(x),\ \ldots, y^{(n)}(x)$ - производные от неизвестной функции.

В частности, обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.2}$$

Обычно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано или в форме, разрешённой относительно производной

$$y' = f(x, y) \tag{1.3}$$

или в форме, содержащей дифференциалы

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{1.4}$$

Обе эти формы записи эквивалентны и от одной формы записи легко перейти к другой.

Пусть, например, уравнение задано в форме (1.4). Перенося первое слагаемое в правую часть, после деления на $N(x, y)dx \neq 0$ получим уравнение, разрешённое относительно производной:

$$N(x, y)dy = -M(x, y)dx, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y).$$

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием* дифференциального уравнения. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Характерное свойство дифференциальных уравнений состоит в том, что при их интегрировании получается бесчисленное множество решений. Для уравнения первого порядка это множество описывается одной произвольной постоянной. Например, уравнению $y' = f(x)$, как известно из интегрального исчисления, удовлетворяет функция $y = F(x) + C$, где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ (то есть $F'(x) = f(x)$), а C - постоянная интегрирования. Следовательно, искомая функция $y(x)$ определяется из дифференциального уравнения неоднозначно.

Чтобы выделить из бесконечного множества решений то, которое описывает именно данный процесс, необходимо задать дополнительную информацию, например, знать начальное состояние процесса. Такое дополнительное условие называется *начальным условием.* Оно ставится так: требуется, чтобы при некотором начальном значении независимой переменной $x = x_0$ искомая функция равнялась заданному числу y_0:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y\big|_{x=x_0} = y_0. \qquad (1.5)$$

Задача интегрирования дифференциального уравнения первого порядка совместно с начальным условием называется начальной задачей или задачей Коши[1].

[1] К о ш и Огюстен Луи (21.08.1789-23.05.1857) – французский математик и механик.

Можно доказать, что если в уравнении $y' = f(x, y)$, разрешённом относительно производной, правая часть $f(x, y)$ непрерывна, ограничена и имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ в некоторой области, содержащей начальную точку (x_0, y_0), то существует решение уравнения и притом единственное, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Эта основная теорема теории дифференциальных уравнений первого порядка называется *теоремой существования и единственности решения.*

Для дифференциальных уравнений первого порядка различают общее, частное и особое решения, а также общий, частный и особый интегралы.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной, называется такое семейство функций $y = \varphi(x, C)$, зависящих от x и произвольной постоянной C, что

1) при любом допустимом значении постоянной C функция $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения;

2) каково бы ни было начальное условие (1.5), можно подобрать такое значение постоянной C_0, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять условию $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение, которое получается из общего при каком-либо конкретном значении произвольной постоянной $C = C_0$, то есть функция вида $y = \varphi(x, C_0)$.

Поэтому общее решение дифференциального уравнения можно определить как множество всех частных решений уравнения.

Например, дифференциальному уравнению $y' = \cos x$, очевидно, удовлетворяет функция $y = \sin x + C$, где C – произвольная постоянная. Решение $y = \sin x + C$ является общим. Если помимо уравнения задано начальное условие, например, $y(0) = 1$ (то есть поставлена задача Коши), то, подставляя общее решение в начальное условие, находим $C=1$. В результате получим единственное (частное) решение $y=\sin x+1$, удовлетворяющее и уравнению и начальному условию.

Особым решением дифференциального уравнения называется решение, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной.

Часто при интегрировании уравнения первого порядка не удается найти его общее решение в явном виде, а получается конечное (не дифференциальное) соотношение вида

$$\Phi\,(x,y,C)=0, \tag{1.6}$$

содержащее решение y в неявной форме. Такое соотношение называется *общим интегралом* дифференциального уравнения. *Частным интегралом* называется соотношение, которое получается из общего интеграла при конкретном значении произвольной постоянной.

Как известно, уравнение произвольной кривой на плоскости записывается в виде $f(x,y)=0$. Сравнивая это соотношение с выражением для общего интеграла (1.6), легко заключить, что при различных конкретных значениях C будем получать различные интегральные кривые. Поэтому геометрически общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка изображается семейством интегральных кривых на плоскости, зависящих от одного параметра C. Частному интегралу соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через заданную начальную точку (x_0,y_0).

Например, интегрирование уравнения $y'=-x/y$ приводит к общему интегралу вида $x^2+y^2=C^2$, где C – произвольная постоянная. Это конечное соотношение при разных C представляет собой, очевидно, семейство концентрических окружностей с центром в начале координат различного радиуса C (рис. I.1).
Частному интегралу будет соответствовать одна окружность, проходящая через заданную начальную точку (x_0,y_0).

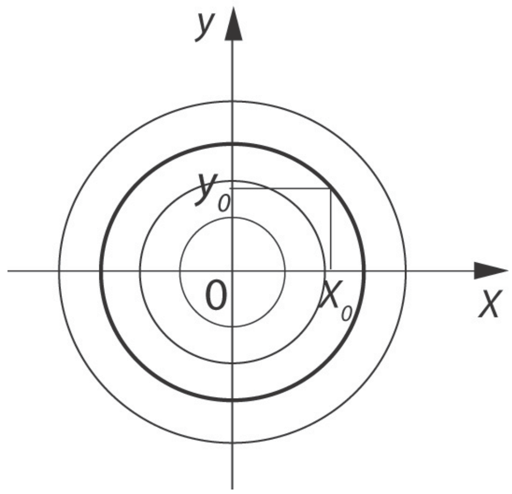


Рис. I.1

1.2. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Поле направлений. Изоклины

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной $y' = f(x, y)$. Задавая координаты (x, y) произвольной точки на плоскости, можно определить значение производной в этой точке y', то есть найти направление касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Поэтому говорят, что дифференциальное уравнение первого порядка определяет *поле направлений* в той области D на плоскости, в которой определена правая часть уравнения. В каждой точке этой области известно направление касательной к интегральной кривой, проходящей через данную точку. Геометрически поле направлений изображается векторами (или штрихами) с угловым коэффициентом $y' = f(x, y) \approx tg\alpha$ (см. рис. I.2).

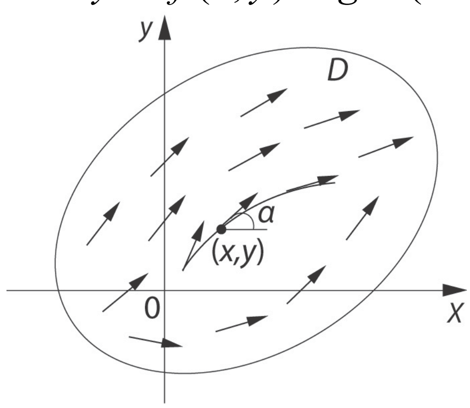


Рис. I.2

Геометрическое место точек, в которых касательные к интегральным кривым имеют одинаковый наклон, то есть выполняется соотношение $y' = C = const$, называется *изоклиной* данного дифференциального уравнения.

Уравнение изоклины, соответствующей значению C, будет, очевидно, $f(x, y) = C$. Построив семейство изоклин при разных значениях C, можно приближённо найти семейство интегральных кривых данного уравнения.

Знание изоклин позволяет во многих случаях даже для не интегрируемых явно дифференциальных уравнений получить графическое решение задачи Коши и выявить характер интегральных кривых.

Пример. Построить методом изоклин интегральную кривую уравнения

$$y' = \sqrt{x^2 + y^2},$$

проходящую через заданную точку $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. Уравнение изоклин получим, полагая $y' = C$. Следовательно,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = C^2.$$

Таким образом, изоклинами данного уравнения являются концентрические окружности с центром в начале координат, причём угловые коэффициенты касательных к искомым интегральным кривым равны радиусам этих окружностей C.

Для построения поля направлений даем постоянной C различные определённые значения: $C_1 = 0{,}5$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1{,}5, \ldots$ Для изоклины, соответствующей, например, $C_1 = 0{,}5$, $y' \approx tg\alpha = 0{,}5$, следовательно, окружность радиуса $C_1 = 0{,}5$ интегральные кривые пересекают под одним и тем же углом, составляющим $\approx 27^\circ$ с положительным направлением оси OX (см. рис. I.3).

Изоклину, соответствующую $C_2 = 1$, то есть окружность радиуса $C_2 = 1$, интегральные кривые пересекают под одним и тем же углом, составляющим 45° с положительным направлением оси OX, так как при этом $y' \approx tg\alpha = 1$.

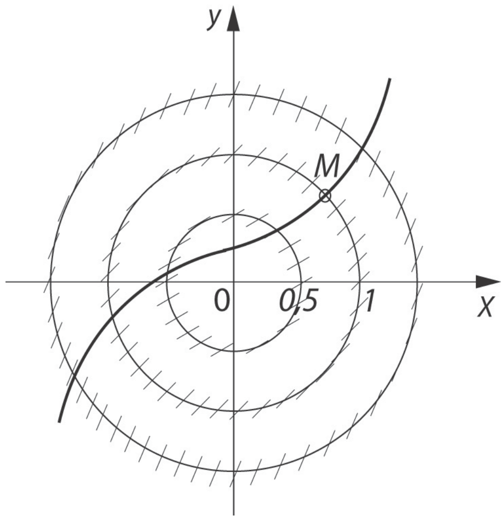


Рис. I.3

Поле направлений на плоскости изображается штрихами. После этого уже можно приближённо провести искомые интегральные кривые, в частности, через заданную точку (см.рис. I.3).

1.3. Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка различного типа

Для многих важных и часто встречающихся на практике дифференциальных уравнений можно получить лишь приближённое решение или решение, выражающееся не через элементарные функции, а через, так называемые, специальные функции. Существует лишь достаточно ограниченный класс простейших дифференциальных уравнений, для которых можно получить решение “в квадратурах”, то есть в виде замкнутых формул, содержащих элементарные функции и интегралы от них. К ним относятся рассмотренные ниже типы дифференциальных уравнений.

1.3.1. Дифференциальные уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение с разделёнными переменными имеет вид

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0. \tag{1.7}$$

В уравнении с разделёнными переменными перед дифференциалом dx стоит функция только одной переменной x, а перед дифференциалом dy стоит функция переменной y. Такие уравнения можно почленно интегрировать. В результате получим

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C$$

или

$$F(x) + \Phi(y) = C, \tag{1.8}$$

где

$$F(x) = \int M(x)\,dx, \qquad \Phi(y) = \int N(y)\,dy.$$

Конечное (не дифференциальное) соотношение (1.8) и является общим интегралом уравнения (1.7).

Пример. Решить уравнение $e^x\,dx + \ln y dy = 0$.

Решение. Очевидно, это уравнение с разделёнными переменными. Интегрируя его, получим

$$\int e^x dx + \int \ln y dy = C.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения будет

$$e^x + y(\ln y - 1) = C.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0, \tag{1.9}$$

в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на произведение сомножителей, каждый из которых зависит только от одной переменной, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

Уравнение (1.9) делением обеих частей на произведение функций $N_1(y)M_2(x) \neq 0$ приводится к уравнению с разделёнными переменными

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

общий интеграл которого

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Пример. Решить равнение $(1 + y^2)\,xdx + (1 + x^2)\,ydy = 0$.

Решение. Разделяем переменные делением на выражение $(1 + y^2)(1 + x^2) \neq 0$:

$$\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{y}{1+y^2}dy=0.$$

Интегрируем полученное уравнение с разделёнными переменными

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{y}{1+y^2}dy=C_1.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C_1$$

Так как C_1 - произвольная постоянная, принимая её для упрощения полученного выражения в виде $C_1=0{,}5\ln C$, представим общий интеграл уравнения в виде $(1+x^2)(1+y^2)=C$.

1.3.2. Однородные дифференциальные уравнения

Предварительно введем понятие однородной функции.

Функция двух переменных $f(x,y)$ называется однородной n –го измерения, если при любом $k>0$ справедливо равенство

$$f(kx,ky)=k^n f(x,y).$$

В частности, если при изменении аргументов x и y в k раз вид функции не меняется, то есть $f(kx,ky)=f(x,y)$, то функция $f(x,y)$ называется однородной нулевого измерения.

Соответственно дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной $y'=f(x,y)$, называется *однородным,* если правая часть $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения.

Если уравнение первого порядка записано в форме, содержащей дифференциалы $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, то оно будет однородным, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - однородные функции одного и того же измерения.

Однородное дифференциальное уравнение подстановкой

$$t=\frac{y}{x}$$

приводится к уравнению с разделёнными переменными.

Действительно, пусть уравнение $y' = f(x, y)$ однородное. Тогда $f(kx, ky) = f(x, y)$. Полагая $k = 1/x$, получим $f(kx, ky) = f(x, y) = f(1, y/x)$. Введем теперь новую функцию $t = y/x$. Тогда $y = tx$, $y' = t'x + t$, и уравнение примет вид $t'x + t = f(1, t) = \varphi(t)$ или $\dfrac{dt}{dx}x = \varphi(t) - t$. $\Rightarrow$ $\dfrac{dt}{\varphi(t) - t} = \dfrac{dx}{x}$ - уравнение с разделёнными переменными.

Пример. Решить уравнение

$$(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

Так как $\dfrac{kx + ky}{kx - ky} = \dfrac{x + y}{x - y}$, то исходное уравнение однородное.

Полагаем $t = y/x$, $\Rightarrow$ $y = tx$ и $y' = t'x + t$.

Тогда уравнение примет вид

$$t'x + t = \frac{x + tx}{x - tx} = \frac{1 + t}{1 - t} \quad \text{или} \quad x\frac{dt}{dx} = \frac{1 + t}{1 - t} - t = \frac{1 + t^2}{1 - t}, \quad xdt = \frac{1 + t^2}{1 - t}dx.$$

Разделив обе части уравнения на $x\dfrac{1 + t^2}{1 - t} \neq 0$, приходим к уравнению с разделёнными переменными

$$\frac{1 - t}{1 + t^2}dt = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя его, находим

$$arctg\, t - \frac{1}{2}\ln\,(1 + t^2) = \ln x + C$$

или

$$arctg\, t - \ln\,(x\sqrt{1 + t^2}) = C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим общий интеграл исходного уравнения в виде

$$C = arctg\,\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Замечание. К однородным уравнениям приводятся дифференциальные уравнения вида

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}.$$

Некоторые из коэффициентов в правой части (но не одновременно c_1 и c_2) могут быть равны нулю.

Следует различать два случая:

1). Если определитель $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то приведение к однородному уравнению осуществляется заменой функции $y(x)$ функцией $v(u)$ по формулам $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где постоянные a и β определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что эту систему уравнений можно записать непосредственно по виду правой части уравнения $y' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$, если заменить в ней x на α, y на β и приравнять числитель и знаменатель дроби нулю.

Учитывая, что $du = dx$, $dv = dy$, следовательно, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{du}$, получим однородное уравнение относительно функции $v(u)$:

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1(u+\alpha) + b_1(v+\beta) + c_1}{a_2(u+\alpha) + b_2(v+\beta) + c_2} = \frac{a_1 u + b_1 v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2 u + b_2 v + a_2\alpha + b_2\beta + c_2} = \frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}.$$

Полагая далее

$$t = \frac{v}{u},$$

приводим последнее уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

2) Если определитель $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то уравнение сразу приводится к уравнению с разделёнными переменными заменой $u = a_1 x + b_1 y$.

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{x + y + 2}{x + 1}$.

В этом уравнении $a_1 = b_1 = 1$, $c_1 = 2$, $a_2 = 1$, $b_2 = 0$, $c_2 = 1$. Поэтому $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Полагая $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, находим α и β из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2 = 0, \\ \alpha + 1 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\alpha = -1$, $\beta = -1$, и формулы перехода от старых переменных к новым и обратно примут вид:

$$x = u - 1, \qquad y = v - 1,$$

$$u = x + 1, \qquad v = y + 1.$$

В результате уравнение приводится к однородному

$$\frac{dv}{du} = \frac{u - 1 + v - 1 + 2}{u - 1 + 1} = \frac{u + v}{u} = 1 + \frac{v}{u}.$$

Полагая далее $t = v/u$, $\Rightarrow$ $v = tu$, $v' = t'u + t$, приходим к уравнению с разделяющимися переменными относительно функции t:

$$t'u + t = 1 + t, \qquad \frac{dt}{du}u = 1, \qquad dt = \frac{du}{u}, \qquad t = \ln u + \ln C = \ln Cu.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\frac{v}{u} = \ln Cu, \quad \frac{y+1}{x+1} = \ln C(x+1),$$

$$y = (x+1)\ln C(x+1) - 1.$$

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$.

Для данного уравнения $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Поэтому полагаем $u = x + 2y$, тогда $u' = 1 + 2y'$, $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{u' - 1}{2}$. Исходное уравнение примет вид $\dfrac{u' - 1}{2} = \dfrac{u + 1}{2u + 3}$, $\Rightarrow$ $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{4u + 5}{2u + 3}$. Разделяя переменные, получим $\dfrac{2u + 3}{4u + 5} du = dx$. Интегрирование этого уравнения дает $\frac{1}{8}\left[4u+5+\ln(4u+5)\right]=x+C.$ Возвращаясь к старой переменной, находим общий интеграл исходного уравнения в виде

$$8y-4x+\ln(4x+8y+5)=C.$$

1.3.3. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y'+P(x)\,y=Q(x), \tag{1.10}$$

содержащее искомую функцию и её производную в первой степени. Функции *P(x)* и *Q(x)* предполагаются непрерывными.

Если правая часть уравнения $Q(x)=0,$ то уравнение (1.10) называется линейным однородным уравнением, в противном случае - линейным неоднородным.

Рассмотрим интегрирование этого уравнения *методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа*[2]*)*. В соответствии с этим методом сначала ищется решение соответствующего линейного однородного уравнения: $y'+P(x)\,y=0$. Разделяя в нём переменные, получим его общее решение в виде

$$\frac{dy}{dx}=-P(x)\,y,\quad \frac{dy}{y}=-P(x)\,dx,\quad \ln y=-\int P(x)\,dx+\ln C,$$

$$y=Ce^{-\int P(x)\,dx}. \tag{1.11}$$

Далее ищется общее решение исходного уравнения с ненулевой правой частью в той же форме по структуре, что и получившееся общее решение однородного уравнения (1.11), но произвольная постоянная C в (1.11) заменяется неизвестной функцией $C(x)$ или $v(x)$:

$$y=v(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}. \tag{1.12}$$

Тогда $y'=v'(x)e^{-\int P(x)dx}-v(x)e^{-\int P(x)dx}P(x).$ Подставляя y и y'

---

[2] Л а г р а н ж Жозеф Луи (25.01.1736 – 10.04.1813) – французский математик и механик.

в уравнение (1.10), получим

$$v'(x)e^{-\int P(x)dx} - v(x)e^{-\int P(x)dx}P(x) + P(x)v(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

из которого после упрощения следует дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно функции *v(x)*:

$$v'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Интегрируя его, находим неизвестную (варьируемую) функцию

$$v(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

В результате, после подстановки $v(x)$ в (1.12) общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка (1.10) может быть представлено в виде

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]. \qquad (1.13)$$

Пример. Решить задачу Коши для уравнения $y' - 4y = x$ при начальном условии y(0)=1.

Решение. Находим сначала общее решение линейного однородного уравнения $y' - 4y = 0$. Оно имеет вид

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} = Ce^{-\int -4dx} = Ce^{4x}.$$

Заменяем произвольную постоянную C в этом решении неизвестной функцией $v(x)$:

$$y = v(x)e^{4x}.$$

Вычисляем производную $y' = v'(x)e^{4x} + 4v(x)e^{4x}$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$v'(x)e^{4x} + 4v(x)e^{4x} - 4v(x)e^{4x} = x, \;\Rightarrow\; v'(x)e^{4x} = x,$$

$$v'(x) = xe^{-4x}, \quad v(x) = \int xe^{-4x}dx + C = -\frac{1}{4}e^{-4x}\left(x + \frac{1}{4}\right) + C.$$

Общее решение уравнения примет вид

$$y = v(x)\,e^{4x} = \left[-\frac{1}{4}e^{-4x}\left(x + \frac{1}{4}\right) + C\right]e^{4x} = Ce^{4x} - \frac{x + 1/4}{4}.$$

Находим произвольную постоянную C из начального условия:

при $x=0$ $\qquad C-\frac{1}{16}=1, \quad \Rightarrow \quad C=\frac{17}{16}.$

Следовательно, решение задачи Коши будет

$$y=\frac{1}{16}\left[17e^{4x}-(4x+1)\right].$$

Решение линейного дифференциального уравнения (1.10) может быть также получено, если искомую функцию представить в виде произведения двух произвольных функций *(метод Бернулли[3])*:

$$y=u(x)\,v(x). \qquad (1.14)$$

Тогда

$$y'=u'v+v'u. \qquad (1.15)$$

Подставляя (1.14) и (1.15) в (1.10), получим

$$\left[u'+P(x)u\right]v+v'u=Q(x). \qquad (1.16)$$

Функцию $u(x)$ подбираем так, чтобы она была одним из решений уравнения

$$u'+P(x)u=0.$$

После разделения переменных получим

$$u=e^{-\int P(x)dx}. \qquad (1.17)$$

Тогда уравнение (1.16) примет вид

$$v'e^{-\int P(x)dx}=Q(x).$$

Следовательно,

$$dv=Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx.$$

Интегрируя это уравнение с разделёнными переменными, находим функцию v:

$$v=\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx+C. \qquad (1.18)$$

Подставляя (1.17) и (1.18) в (1.14), получим общее решение уравнения (1.10) в виде (1.13).

---

[3] Б е р н у л л и Якоб I (27.12.1654 – 16.08.1705) – швейцарский математик и механик.

Замечание. К линейным дифференциальным уравнениям приводятся уравнения вида $f'(y)\dfrac{dy}{dx}+P(x)f(y)=Q(x)$ заменой $z=f(y(x))$.

В частности, *уравнение Бернулли*[4] $y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^n$, где $n\neq 0;1$, приводится к линейному подстановкой $z=y^{1-n}$.
Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)\;y^{-n}y',\quad \text{следовательно,}\quad y^{-n}y'=\frac{1}{1-n}\,\frac{dz}{dx}.$$

В результате уравнение становится линейным относительно функции z:

$$\frac{1}{1-n}z'+P(x)z=Q(x)$$

и может быть решено методом вариации произвольной постоянной или методом Бернулли.

Пример. Решить уравнение $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\ln x}{x}y^2$.

Умножим обе части уравнения на y^{-2}: $\quad y^{-2}\;y'+\dfrac{y^{-1}}{x}=\dfrac{\ln x}{x}$.

Положим $z=y^{-1}$, $\Rightarrow$ $z'=-y^{-2}y'$, и уравнение преобразуется в линейное:

$$z'-\frac{z}{x}=-\frac{\ln x}{x}.$$

Находим сначала решение соответствующего линейного однородного уравнения

$$z'-\frac{z}{x}=0:\ \frac{dz}{dx}=\frac{z}{x},\ \ln|z|=\ln|x|+\ln C,\quad z=Cx.$$

Решение неоднородного линейного уравнения относительно z отыскиваем в виде $z=v(x)\,x$, тогда $z'=v'(x)\,x+v(x)$.

---

[4] Это уравнение получено Я.Бернулли в 1695 г. и решено Иоганном Бернулли (27.07.1667 – 01.01.1748) в 1697 г.

$$\frac{dv(x)}{dx}x+v(x)-\frac{v(x)\cdot x}{x}=-\frac{\ln x}{x},\quad \frac{dv(x)}{dx}x=-\frac{\ln x}{x},$$

$$\int dv(x)=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx+C.$$

После интегрирования получим

$$v(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C,\qquad z=v(x)\,x=\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C\right)x,$$

поэтому общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$y=\frac{1}{\ln x+1+Cx}.$$

1.3.4. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \tag{1.19}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если коэффициенты $M(x,y)$ и $N(x,y)$ представляют собой непрерывные и дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.20}$$

Условие (1.20) есть необходимое и достаточное условие того, что левая часть уравнения (1.19) представляет собой полный дифференциал некоторой функции двух независимых переменных $du(x,y)$. Поэтому уравнение (1.19) может быть представлено в компактной форме

$$du(x,y)=0.$$

Следовательно, его общий интеграл, а значит, и общий интеграл уравнения (1.19) имеет вид

$$u(x,y)=C.$$

Как известно, полный дифференциал функции двух переменных равен

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{1.21}$$

С учетом (1.20) и (1.21) уравнение (1.19) может быть представлено в виде

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y). \tag{1.22}$$

Интегрируя, например, первое из выражений (1.22), получим

$$u = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y), \tag{1.23}$$

где $\varphi(y)$- произвольная функция интегрирования (в частности, она может быть константой). Заметим, что при вычислении интеграла в (1.23) функция y рассматривается как постоянная. Функция $\varphi(y)$ определяется из решения дифференциального уравнения, получающегося из соотношения (1.23) и второго условия (1.22).

Пример. Решить уравнение

$$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0. \tag{1.24}$$

Решение. Здесь $M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$, $N(x,y) = 6x^2y + 4y^3$ и

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy.$$

Поэтому уравнение (1.24) является уравнением в полных дифференциалах. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = 6x^2y + 4y^3,$$

$$u = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y) = \int (3x^2 + 6xy^2)\,dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Дифференцируя последнее равенство по y и приравнивая значению N, получим $\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3, \Rightarrow \varphi'(y) = 4y^3$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим

$$\varphi(y) = y^4 + C_1.$$

Таким образом, $u = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_1 = C_2$

и при $C = C_2 - C_1$ общий интеграл исходного уравнения запишется в виде $$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Обыкновенное дифференциальное уравнение n – го порядка, как уже отмечалось, в общем случае записывается в виде

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением наиболее распространённых уравнений n – го порядка, разрешённых относительно старшей производной.

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешённое относительно старшей производной, имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (2.1)$$

Как известно, для получения единственного решения дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ достаточно задать начальное значение функции $y(x_0) = y_0$. Для уравнений n-го порядка этого уже недостаточно. Убедимся в этом на простейшем примере уравнения второго порядка $y'' = 0$. Его решение $y = C_1 x + C_2$ (C_1 и C_2 - произвольные постоянные) представляет собой семейство прямых линий, зависящее от двух параметров C_1 и C_2. Зафиксируем один из них, например, C_1 и будем менять $C_2 : C_2^{(1)}, C_2^{(2)}, \ldots, C_2^{(n)}$. Тогда получим семейство параллельных прямых, наклонённых к оси x под углом, характеризуемым угловым коэффициентом C_1 (рис. I.4).

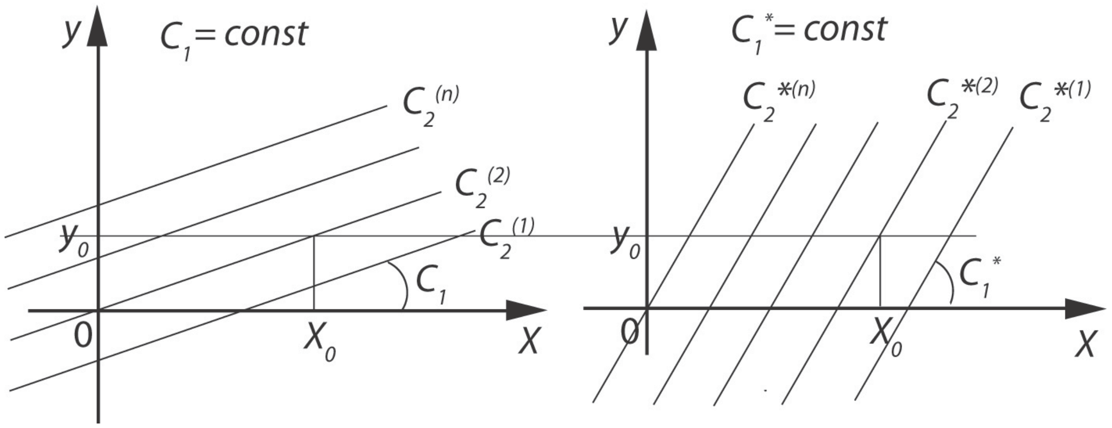


Рис. I.4

Изменим теперь C_1 и вновь будем менять C_2 (рис.I.4). Получим, очевидно, семейство параллельных прямых, наклонённых к оси x под другим углом, характеризуемым угловым коэффициентом C_1^*. Продолжая эту процедуру, убеждаемся в том, что через одну и ту же начальную точку (x_0, y_0) будет проходить множество прямых (а в общем случае уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ множество интегральных кривых), наклонённых к оси x под различными углами. Поэтому для получения единственного решения уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ необходимо задать не только начальное значение функции, но и начальное значение её первой производной, характеризующей угол наклона касательной к интегральной кривой, проходящей через начальную точку

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y'(x_0) = y'_0.$$

Введём теперь понятие общего решения дифференциального уравнения n-го порядка:

общим решением уравнения n-го порядка называется непрерывно дифференцируемая n раз функция $y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, удовлетворяющая уравнению и содержащая n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, подходящим выбором которых можно получить любое решение.

Решение, получаемое из общего при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, называется *частным решением*.

Конкретные значения произвольных постоянных могут быть найдены из n начальных или граничных условий, задаваемых, исходя из физических особенностей задачи. Соответственно этому различают начальную задачу (задачу Коши) или краевую (граничную) задачу.

Задача интегрирования дифференциального уравнения n-го порядка называется начальной задачей или задачей Коши, если значения искомой функции и её производных до (n-1)-го порядка включительно задаются при одном и том же начальном значении независимой переменной (при $x = x_0$*):*

$$
\begin{aligned}
&y(x_0) = y_0,\\
&y'(x_0) = y'_0,\\
&y''(x_0) = y''_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.
\end{aligned}
$$

Задача интегрирования дифференциального уравнения n-го порядка называется краевой (или граничной) задачей, если значения искомой функции (а возможно её производных) задаются не в одной, а в двух точках, а именно на концах фиксированного интервала изменения независимой переменной x.

Например, для уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ при $0 \le x \le l$ граничные условия могут иметь различный вид: $y(0) = y(l) = 0$ или $y(0) = 0,\ y'(l) = 0$ и т.п.

Для задачи Коши справедлива *теорема существования и единственности решения*:

Если в уравнении $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, разрешенном относительно старшей производной, правая часть $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ и её частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial f}{\partial y''}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны в некоторой области, содержащей значения $x = x_0, y = y_0$, $y' = y'_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, то существует и притом единственное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

В отличие от задачи Коши, решение которой существует и единственно, краевая задача может не иметь решения или решение может быть не единственным.

2.1. Интегрирование дифференциальных уравнений *n* – го порядка методом понижения порядка

Если правая часть уравнения (2.1) является известной непрерывной функцией $f(x)$ только одной переменной x или не содержит искомую функцию y: $f(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, или не содержит явно независимую переменную x: $f(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, то для решения уравнения (2.1) может быть применён метод понижения порядка.

Ограничимся здесь первыми двумя случаями.

1. $$y^{(n)}(x) = f(x). \qquad (2.2)$$

Это простейшее уравнение n-го порядка, общее решение которого получается в квадратурах последовательным интегрированием n раз. При каждом интегрировании порядок уравнения понижается на единицу, и появляется произвольная постоянная:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + \overline{C}_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int dx \int f(x)dx + \overline{C}_1 x + \overline{C}_2,$$

. . . .

В результате общее решение уравнения будет иметь вид

$$y = \int\int \ldots \int f(x)\,dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n, \quad (2.3)$$

где в правой части - n-кратный интеграл от функции $f(x)$ и многочлен (n-1)-ой степени от x, коэффициентами которого являются n произвольных постоянных.

Если для уравнения (2.2) решается задача Коши с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0', \ldots,$ $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, то частное решение уравнения может быть записано в виде

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx .... \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + \ldots +$$
$$+ y_0'(x - x_0) + y_0.$$

Пример. Решить краевую задачу

$$y'' = \frac{1}{EI}\left(\frac{q_0 l}{2}x - \frac{q_0 x^2}{2}\right), \quad y(0) = y(l) = 0.$$

Заметим, что к этой задаче сводится в сопротивлении материалов определение прогибов шарнирно опёртого стержня при действии на него равномерно распределённой поперечной нагрузки интенсивности $q(x) = q_0 = const$.

Решение. Уравнение относится к типу уравнений (2.2). Интегрируя его дважды, получим общее решение в виде

$$y=\frac{q_0}{2EI}\left(\frac{lx^3}{6}-\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2\right).$$

Произвольные постоянные находим из граничных условий:

$$C_1=-\frac{l^3}{12},\quad C_2=0.$$

Подставляя их в общее решение, получим

$$y=\frac{q_0l^4}{24EI}\left[2\left(\frac{x}{l}\right)^3-\left(\frac{x}{l}\right)^4-\frac{x}{l}\right]. \qquad (2.4)$$

Максимальный прогиб стержня при действии равномерно распределённой нагрузки при $x=l/2$ будет равен

$$y_{\max}=-\frac{5q_0l^4}{384EI}.$$

2. $$y^{(n)}=f(x,y',y'',\dots,y^{(n-1)}). \qquad (2.5)$$

Уравнение (2.5) не содержит искомой функции $y(x)$. Рассмотрим процедуру интегрирования уравнения данного типа на примере уравнения второго порядка

$$y''=f(x,y'). \qquad (2.6)$$

Понижение порядка достигается подстановкой

$$y'(x)=z(x). \qquad (2.7)$$

Тогда

$$y''(x)=z'(x), \qquad (2.8)$$

и уравнение (2.6) приводится к уравнению первого порядка относительно функции *z(x)*:

$$z'(x)=f(x,z). \qquad (2.9)$$

Интегрируя уравнение (2.9), находим его общий интеграл в виде

$$z(x)=\varphi(x,C_1), \qquad (2.10)$$

где C_1 - произвольная постоянная. Далее в (2.10) заменяем левую часть согласно (2.7). и вновь получаем уравнение первого порядка относительно искомой функции y:

$$y'(x) = \varphi(x, C_1), \qquad (2.11)$$

Интегрируя уравнение (2.11), находим общее решение исходного уравнения (2.6) в виде

$$y(x) = \xi(x, C_1, C_2)\,. \qquad (2.12)$$

Замечание. Если уравнение (2.6) не содержит ни искомой функции y, ни её производных до (k-1) - го порядка включительно, то есть имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n-1)}),$$

то его порядок может быть понижен сразу на k единиц подстановкой

$$y^{(k)} = z(x).$$

Пример. Решить уравнение $x^3 y^{IV} + x^2 y''' = 1.$

Решение. Уравнение не содержит явно искомой функции $y(x)$ и её первых производных y', y'' и относится ко второму из рассмотренных нами типов. Применяя подстановку

$$y'''(x) = z(x), \qquad (2.13)$$

получаем линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$x^3 z' + x^2 z = 1$$

или

$$z' + \frac{1}{x} z = \frac{1}{x^3}. \qquad (2.14)$$

Интегрируем его методом вариации произвольной постоянной. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение

$$z' + \frac{1}{x} z = 0. \qquad (2.15)$$

Разделяем в нём переменные:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}.$$

После интегрирования получим

$$\ln z = -\ln x + \ln C_1 = \ln \frac{C_1}{x}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.15) будет

$$z = \frac{C_1}{x}. \qquad (2.16)$$

Далее ищем решение уравнения (2.14) в форме, аналогичной по структуре выражению (2.16), но произвольную постоянную в (2.16) заменяем неизвестной функцией $v(x)$:

$$z = \frac{v(x)}{x}. \qquad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.14), получим

$$\frac{v'(x)\,x - v(x)}{x^2} + \frac{v(x)}{x^2} = \frac{1}{x^3},$$

откуда следует $\dfrac{dv(x)}{dx} = \dfrac{1}{x^2}$ и, после разделения переменных, $dv(x) = \dfrac{dx}{x^2}$.

Интегрируя это уравнение, находим $v(x) = -1/x + C_1$. Поэтому согласно (2.17) имеем

$$z = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}. \qquad (2.18)$$

Заменяя в выражении (2.18) z по формуле (2.13), приходим к уравнению третьего порядка относительно искомой функции $y(x)$:

$$y''' = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}. \qquad (2.19)$$

Уравнение (2.19) содержит в правой части известную функцию от x и относится к первому из рассмотренных нами типов (см. (2.2)). Интегрируя его последовательно три раза, окончательно получим общее решение исходного уравнения, содержащее 4 произвольных постоянных:

$$y'' = \frac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2,$$

$$y' = \ln x + C_1 x(\ln x - 1) + C_2 x + C_3,$$

$$y = x(\ln x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2} \right) + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка. Общие свойства решений

Линейным дифференциальным уравнением n - го порядка называется уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (2.20)$$

содержащее неизвестную функцию и все её производные до n-го порядка включительно в первой степени. Если все коэффициенты уравнения постоянны: $a_i = const \quad (i = 1,2,...,n)$, то оно называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Если хотя бы один из коэффициентов a_i является функцией от x, то уравнение (2.41) будет уравнением с переменными коэффициентами.

Если правая часть уравнения $f(x) \equiv 0$, то уравнение (2.20) принимает вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0,$$

и называется *линейным однородным дифференциальным уравнением*, в противном случае – *линейным неоднородным*.

Левая часть уравнения (2.20) называется *линейным дифференциальным оператором* и обозначается через

$$L_n(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y. \quad (2.21)$$

С учетом обозначения (2.21) линейное однородное дифференциальное уравнение n - го порядка может быть записано в компактной форме:

$$L_n(y) = 0. \quad (2.22)$$

Свойства оператора $L_n(y)$**.**

1. $L_n(Cy) = CL_n(y)$, где C – некоторое число. Это свойство называют свойством однородности оператора.
2. $L_n(y_1 + y_2) = L_n(y_1) + L_n(y_2)$ - это свойство называют свойством аддитивности оператора.
3. $L_n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k L_n(y_k)$, то есть оператор, взятый от линейной комбинации функций, равен линейной комбинации опера-

торов, взятых от этих функций (напомним, что линейной комбинацией функций называется сумма произведений функций на различные постоянные числа, то есть выражение вида $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$).

Используя свойства оператора $L_n(y)$, легко показать, что справедливы следующие свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения:

1. Если функция $y(x)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения $L_n(y) = 0$, то функция $Cy(x)$, где C – произвольная постоянная, также является решением этого уравнения.
2. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения $L_n(y) = 0$, то сумма функций $y_1(x) + y_2(x)$ также является решением этого уравнения.
3. Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$- какие либо частные решения уравнения $L_n(y) = 0$, то любая их линейная комбинация с произвольными коэффициентами $\sum_{i=1}^{m} C_i y_i$ также будет решением этого уравнения.

Действительно, на основании свойств однородности и аддитивности линейного дифференциального оператора можно записать:

$$L_n\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_i\right) = L_n(C_1 y_1) + L_n(C_2 y_2) + \ldots + L_n(C_m y_m) = C_1 L_n(y_1) +$$
$$+ C_2 L_n(y_2) + \ldots + C_m L_n(y_m).$$

Так как функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ являются частными решениями уравнения $L_n(y) = 0$, то все слагаемые в правой части последнего равенства равны нулю, поэтому $L_n\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_i\right) = 0$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{m} C_i y_i$ также является решением уравнения.

Последнее свойство называется *принципом суперпозиции (наложения) решений* линейных однородных дифференциальных уравнений n - го порядка.

Заметим также, что линейное однородное дифференциальное уравнение $L_n(y)=0$ всегда имеет тривиальное решение $y\equiv 0$.

В теории линейных дифференциальных уравнений важную роль играют понятия линейной независимости и линейной зависимости функций.

Пусть имеется система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, определённых на некотором интервале (a,b), и пусть C_1, $C_2, \dots,$ C_n - различные действительные числа.

Система функций называется линейно независимой, если линейная комбинация этих функций $C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n=0$ тогда и только тогда, когда все коэффициенты линейной комбинации $C_1=C_2=\ldots=C_n=0$. В противном случае *система функций линейно зависима.*

Если система функций линейно зависима, то по крайней мере одна из них является линейной комбинацией других. Если, например, $C_1\neq 0$, то из условия $C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n=0$ следует

$$y_1=-\frac{C_2}{C_1}y_2-\frac{C_3}{C_1}y_3-\ldots-\frac{C_n}{C_1}y_n.$$

В частности, если система двух функций линейно зависима на (a,b), то они пропорциональны друг другу (то есть их отношение есть величина постоянная).

Действительно, из равенства $C_1y_1+C_2y_2=0$ следует, что $y_2=-\dfrac{C_1}{C_2}y_1=ky_1$, где $k=const$ - коэффициент пропорциональности.

Критерием, позволяющим судить о том, будет ли система функций линейно зависимой или линейно независимой, является величина определителя Вронского[5].

Определителем Вронского или вронскианом называется функциональный определитель вида:

---

[5] В р о н с к и й Ю. Гене (1776 – 1853) – польский математик.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{2.23}$$

Справедлива следующая теорема: Если функции $y_1(x), y_2(x)$, $\ldots, y_n(x)$ линейно зависимы на интервале (a,b) и имеют непрерывные производные до $(n-1)$- го порядка, то определитель Вронского $W \equiv 0$ на (a,b).

Действительно, по определению линейно зависимой системы функций $\sum_{i=1}^{n} C_i y_i = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0$ при том, что не все C_i равны нулю. Дифференцируя это тождество $n-1$ раз, получим совместно с последним равенством систему n соотношений

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)} = 0,$$

которую можно рассматривать как систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно C_1, $C_2, \ldots, C_n$, имеющую ненулевое решение. Но, как известно, определитель такой системы

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

должен быть равен нулю, то есть $W \equiv 0$ на (a,b).

Следствие из этой теоремы: Если определитель Вронского $W \neq 0$ хотя бы в одной точке $x \in (a,b)$, то система функций

$y_1(x),..., y_n(x)$ линейно независима на (a,b).

В частности, если $y_1, y_2, \dots, y_n$- частные линейно независимые решения линейного однородного дифференциального уравнения $L_n(y)=0$, то определитель Вронского для них $W \neq 0$.

Рассмотрим важные для дальнейшего примеры линейно независимых функций.

1. Система экспоненциальных функций $e^{k_1x}, e^{k_2x},..., e^{k_nx}$ с различными показателями степени k_i - различные числа).

Для неё определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \ldots\ldots\ldots\ldots e^{k_nx} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \ldots\ldots\ldots k_ne^{k_nx} \\ k_1^2e^{k_1x} & k_2^2e^{k_2x} \ldots\ldots\ldots k_n^2e^{k_nx} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_1^{n-1}e^{k_1x} & k_2^{n-1}e^{k_2x} \ldots\ldots k_n^{n-1}e^{k_nx} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2+...+k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots\ldots 1 \\ k_1 & k_2 \ldots\ldots\ldots k_n \\ k_1^2 & k_2^2 \ldots\ldots\ldots k_n^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} \ldots\ldots k_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (2.24)$$

Множитель $e^{(k_1+k_2+...+k_n)x} \neq 0$, а числовой определитель в (2.24) является *определителем Вандермонда*[6] [15]. Этот определитель равен произведению разностей: $\prod\limits_{1 \le i < j \le n} (k_i - k_j)$ и при различных k_i $(i = 1,2, \ \ ..., n)$ отличен от нуля. Поэтому система экспонент с различными показателями степени линейно независима.

2. Система степенных функций $1, x, x^2,..., x^m$.

Для неё определитель Вронского (2.23)

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \ldots\ldots x^m \\ 0 & 1 & 2x \ldots\ldots mx^{m-1} \\ 0 & 0 & 2 \ldots\ldots m(m-1)x^{m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots m! \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2! \cdot \ldots \cdot m! \neq 0.$$

Следовательно, система степенных функций также линейно независима.

---

[6] В а н д е р м о н д АлександрТеофиль (28.02.1735 –01.01.1796) – французский математик.

3. Система функций $e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, ..., x^me^{kx}$.

Составляя их линейную комбинацию, получим $C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} + C_3x^2e^{kx} + ... + C_mx^me^{kx} = e^{kx}\left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + ... + C_mx^m\right)$. Так как $e^{kx} \neq 0$, а степенные функции линейно независимы, то и данная система функций линейно независима на любом интервале (a,b).

Рассмотренные свойства решений и теоремы позволяют сформулировать основную теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка):

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка $L_n(y) = 0$ *представляется в виде линейной комбинации n линейно независимых частных решений этого уравнения*:

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n. \tag{2.25}$$

Здесь $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - произвольные постоянные, $y_1, y_2, \ldots, y_n$- частные линейно независимые решения уравнения $L_n(y) = 0$.

Действительно, по свойству 3 решений линейных однородных уравнений функция $y(x)$, определенная формулой (2.25), является решением дифференциального уравнения $L_n(y) = 0$. Это решение будет общим (то есть содержащим все решения уравнения), если всегда можно подобрать произвольные постоянные C_1, $C_2, \ldots, C_n$ так, чтобы удовлетворялись произвольно заданные начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Для этого система уравнений

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + ... + C_ny_n(x_0) = y_0, \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + ... + C_ny_n'(x_0) = y_0', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

должна иметь решение C_1, $C_2, \ldots, C_n$ при произвольных правых частях $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ и при произвольном $x_0 \in (a,b)$. Но определитель этой системы линейных относительно C_1, $C_2, \dots$, C_n алгебраических уравнений

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

есть определитель Вронского линейно независимой системы решений однородного уравнения, и, следовательно, отличен от нуля при любом $x_0 \in (a,b)$ и при любых правых частях. Поэтому система однозначно разрешима относительно постоянных C_1, $C_2, \dots$, C_n при любом $x_0 \in (a,b)$ и при любых правых частях. А это означает, что решение (2.25) является общим.

Приведенная теорема указывает путь построения общего решения любого линейного однородного дифференциального уравнения n - го порядка. Для этого необходимо найти именно n частных решений (соответственно порядку уравнения), убедиться в том, что они линейно независимы и составить линейную комбинацию таких решений.

Совокупность n линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

Поэтому теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка может быть переформулирована так: общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка $L_n(y) = 0$ представляется в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений этого уравнения.

2.3. Построение фундаментальной системы решений для линейных однородных дифференциальных уравнений *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Для построения фундаментальной системы решений уравнения $L_n(y) = 0$ с постоянными коэффициентами его частные решения ищутся (следуя Л.Эйлеру) в виде показательных функций

$$y = e^{kx}, \tag{2.26}$$

где k – неизвестные постоянные числа.

Заметим, что в предельном случае линейного однородного уравнения первого порядка $y' + ay = 0$ его частное решение будет выражаться именно экспонентой $y = e^{-ax}$, следовательно $k = -a$. В общем случае уравнения n – го порядка подстановка (2.26) в дифференциальное уравнение (2.22) приводит к алгебраическому уравнению вида

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{2.27}$$

Алгебраическое уравнение (2.27) той же степени, что и порядок дифференциального уравнения (2.22), с теми же коэффициентами на соответствующих местах называется характеристическим уравнением.

Заметим, что характеристическое уравнение (2.27) получается из дифференциального уравнения (2.22) формальной заменой i – ой производной $y^{(i)}$ числом k^i $(i = 1,2,...,n)$, а сама искомая функция y при этом заменяется единицей.

В соответствии с основной теоремой алгебры характеристическое уравнение (2.27) имеет n корней (с учетом их кратности).

При этом могут встретиться различные случаи:

1) корни характеристического уравнения $k_1, k_2, ..., k_n$ действительные и различные числа. Тогда в соответствии с (2.26) частные решения уравнения будут экспоненциальными функциями $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_n x}$. Как было показано, они линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений.

2) Среди корней характеристического уравнения могут быть комплексные корни $k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta$ (i - мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$).

Так как коэффициенты дифференциального и соответственно характеристического уравнения предполагаются нами действительными числами, комплексные корни должны быть попарно сопряженными.

При непосредственной подстановке корней в (2.26) соответствующие частные решения $y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x}$

оказываются комплексными функциями действительного аргумента x. Чтобы получить решения в действительной форме, рассматривают их линейные комбинации: $Y_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ и $Y_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i}$.

В соответствии с принципом суперпозиции решений они также являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения. Применяя известные формулы Эйлера, связывающие показательные функции комплексного аргумента с тригонометрическими функциями:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x, \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x,$$

получим

$$Y_1 = \frac{e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}}{2} = \frac{e^{\alpha x}e^{i\beta x} + e^{\alpha x}e^{-i\beta x}}{2} =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x + \cos\beta x - i\sin\beta x\right)}{2} = e^{\beta x}\cos\beta x. \quad (2.28)$$

Аналогично находим

$$Y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x. \quad (2.29)$$

Решения (2.28) и (2.29) линейно независимы, так как их отношение $Y_1 / Y_2 = tg\beta x \neq const$, и не содержат мнимых величин.

В частности, если корни характеристического уравнения чисто мнимые: $k_1 = i\beta, \quad k_2 = -i\beta \quad (\alpha = 0)$, то частные линейно независимые решения уравнения, как следует из (2.28), (2.29), будут выражаться через тригонометрические функции

$$y_1 = \cos\beta x, \quad y_2 = \sin\beta x.$$

3) Среди корней характеристического уравнения могут быть равные между собой (кратные) корни – действительные или комплексные.

3а). Пусть $k_1 = k_2 = ... = k_m = k$ -действительный корень кратности m.

Тогда частные линейно независимые решения дифференциального уравнения следует принимать в виде:

$$y_1 = e^{kx}, \ y_2 = xe^{kx}, \ y_3 = x^2e^{kx}, ..., y_m = x^{m-1}e^{kx}.$$

Действительно, пусть дано (для простоты) линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{2.30}$$

коэффициенты которого a_1, a_2 - действительные числа и пусть корни характеристического уравнения $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ действительные и равные числа: $k_1 = k_2 = k$ ($m = 2$ - кратность корня).

Первое частное решение, соответствующее корню k_1, будет иметь вид $y_1 = e^{k_1 x} = e^{kx}$. Второе частное решение, линейно независимое с первым, будем искать в виде $y_2 = e^{kx}\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - неизвестная функция. Так как

$$y_2' = ke^{kx}\varphi(x) + e^{kx}\varphi'(x), \quad y_2'' = k^2 e^{kx}\varphi(x) + 2ke^{kx}\varphi'(x) + e^{kx}\varphi''(x),$$

то уравнение (2.30) примет вид

$$e^{kx}\varphi''(x) + 2ke^{kx}\varphi'(x) + k^2 e^{kx}\varphi(x) + a_1[e^{kx}\varphi'(x) + ke^{kx}\varphi(x)] + a_2 e^{kx}\varphi(x) = 0$$

или

$$e^{kx}[\varphi''(x) + (2k + a_1)\varphi'(x) + (k^2 + a_1 k + a_2)\varphi(x)] = 0.$$

Так как k - кратный корень характеристического уравнения, то $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ и $2k + a_1 = 0$ (корни квадратного уравнения равны, если дискриминант $D = 0$, значит, $k_{1,2} = -a_1/2$).

Следовательно, $\varphi''(x) = 0$, а потому $\varphi(x) = Ax + B$. Принимая $A = 1$, $B = 0$, получим $\varphi(x) = x$. Поэтому второе частное решение следует принимать в виде $y_2 = xe^{kx}$. Оно будет линейно независимым с первым, так как

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = x \neq const.$$

3б). Если характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ кратности m, то комбинируя случаи 2) и 3а), можно получить соответствующие им линейно независимые частные решения в виде

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$
$$y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x. \qquad y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x$$
$$y_5 = x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad y_6 = x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{2m-1} = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Таким образом, построение общего решения линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами сводится к чисто алгебраической проблеме решения соответствующих характеристических уравнений.

Вид частных решений однородного линейного дифференциального уравнения n –го порядка в зависимости от вида корней характеристического уравнения приведен в таблице 1.

Построение решения однородных линейных дифференциальных уравнений является обязательным первым этапом решения более общих линейных неоднородных уравнений (2.20). Поэтому примеры построения фундаментальной системы решений для однородных уравнений приведены ниже.

2.4. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение n - го порядка с постоянными коэффициентами (2.20)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

или в компактной форме $L_n(y) = f(x)$.

Справедлива теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка:

общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n – го порядка представляется в виде суммы

$$y = y_0 + y_*, \qquad (2.31)$$

где y_0 - общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $L_n(y) = 0$, y_*-частное решение неоднородного уравнения $L_n(y) = f(x)$.

Полезна также следующая теорема (принцип суперпозиции для линейных неоднородных уравнений):

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $L_n(y) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k(x)$

Таблица 1

Вид частных решений линейного однородного уравнения
$L_n(y)=0$ в зависимости от вида корней
характеристического уравнения

<table>
<tr><th></th><th>Вид корней</th><th colspan="2">Вид частных решений</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Корни k_i
$(i=1,2,\ldots,n)$
действительны
и различны</td><td colspan="2">$y_1=e^{k_1x}$,
$y_2=e^{k_2x}$,
$\ldots\ldots\ldots$
$y_n=e^{k_nx}$.</td></tr>
<tr><td>2а</td><td>Комплексные
корни
$k_1=\alpha+\beta i$,
$k_2=\alpha-\beta i$</td><td colspan="2">$y \;=e^{\alpha x}\cos\beta x$,
$y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.</td></tr>
<tr><td>2б</td><td>Мнимые корни
$k_1=\beta i$,
$k_2=-\beta i$</td><td colspan="2">$y_1=\cos\beta x$,
$y_2=\sin\beta x$.</td></tr>
<tr><td>3а</td><td>Кратные
действительные
корни
$k_1=k_2=\ldots=$
$=k_m=k$
(m- кратность
корня)</td><td colspan="2">$y_1=e^{kx}$,
$y_2=xe^{kx}$,
$y_3=x^2e^{kx}$,
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$y_m=x^{m-1}e^{kx}$.</td></tr>
<tr><td>3б</td><td>Кратные
комплексные
корни:
$k_1=\alpha+\beta i$
кратности m,
$k_2=\alpha-\beta i$
кратности m</td><td>$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$,
$y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x$.
$y_5=x^2e^{\alpha x}\cos\beta x$,
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$y_{2m-1}=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$</td><td>$y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$,
$y_4=x\,e^{\alpha x}\sin\beta x$,
$y_6=x^2e^{\alpha x}\sin\beta x$,
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$y_{2m}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.</td></tr>
</table>

может быть представлено в виде $y = y_0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_{k*}$,

где y_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения $L_n(y) = 0$, $\alpha_k = const$, а y_{k*} - частные решения неоднородных уравнений вида

$$L_n(y) = f_k(x), \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Из принципа суперпозиции следует, что решение исходного уравнения можно свести к решению нескольких более простых уравнений $L_n(y) = f_k(x)$. С физической точки зрения это означает, что результат сложного внешнего воздействия на некоторую систему (объект), характеризуемого функцией $f(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k(x)$, можно представить как суперпозицию результатов отдельных элементарных воздействий.

Поэтому этот принцип является математической формулировкой принципа независимости действия сил в механике.

Частное решение y_* неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка (2.20) может быть получено или методом подбора (методом неопределённых коэффициентов) или методом вариации произвольных постоянных.

2.4.1. Метод подбора частного решения

Этот метод называют ещё *методом неопределённых коэффициентов*. Он не является универсальным и применим, если правая часть линейного неоднородного уравнения (2.20) с постоянными коэффициентами в общем случае имеет вид

$$f(x) = P(x)\, e^{\alpha x} \cos\beta x + Q(x) e^{\alpha x} \sin\beta x, \qquad (2.32)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - одночлены или многочлены (в общем случае различных степеней от x). Пусть при этом n - наивысшая степень одного из многочленов $P(x)$ или $Q(x)$. В частности, если $n = 0$, то многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ являются просто постоянными числами.

Алгоритм построения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения (2.20) следующий:

1. Находим корни характеристического уравнения (2.27).

2. Сравниваем заданную правую часть уравнения (2.20) с общим выражением (2.32), при котором применим метод подбора, и находим из этого сопоставления три числа: n, α, β.
3. Сравниваем "контрольное" число $\alpha+\beta i$ (в общем случае комплексное) с корнями характеристического уравнения и находим число m корней, совпавших с числом $\alpha+\beta i$ (если таких корней нет, то $m=0$).
4. Принимаем частное решение неоднородного уравнения (2.20) в виде

$$y_* = x^m[R_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta\, x + T_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x], \qquad (2.33)$$

где $R_n(x)$, $T_n(x)$ - многочлены одной и той же n - ой степени, но с неопределёнными и различными коэффициентами, причём полные, то есть содержащие все степени n.
5. Записываем решение (2.33) в развернутой форме в зависимости от n. При этом:

если $n=0$, то $y_* = x^m(Ae^{ax}\cos\beta x + Be^{ax}\sin\beta x)$,

если $n=1$, то $y_* = x^m[R_1(x)\, e^{ax}\cos\beta x + T_1(x)\, e^{ax}\sin\beta\, x] =$

$= x^m[(Ax+B)\, e^{ax}\cos\beta x + (Cx+D)\, e^{ax}\sin\beta x]$,

если $n=2$, то $y_* = x^m[R_2(x)\, e^{ax}\cos\beta x + T_2(x)\, e^{ax}\sin\beta\, x] =$

$= x^m[(Ax^2+Bx+C)e^{ax}\cos\beta x + (Dx^2+Ex+F)\, e^{ax}\sin\beta x]$ и т.д.
6. Подставляем y_* в исходное уравнение (2.20) и получаем систему алгебраических уравнений относительно неопределённых коэффициентов A, B, C, ..., решая которую, находим эти коэффициенты и подставляем их в (2.33).

Замечания.

1. Если правая часть линейного неоднородного уравнения (2.20) с постоянными коэффициентами имеет более простой вид, например, содержит произведение степенной функции на показательную

$$f(x) = P_n(x)\, e^{ax}$$

(в частности, возможны случаи $n=0$ или (и) $\alpha=0$), или содержит только линейную комбинацию тригонометрических функций вида

$$f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x,$$

где M и N - постоянные числа, то частные решения неоднородного уравнения проще искать в более простой форме, указанной в таблице 2 (в неё для полноты включен также общий случай).

2. Правая часть уравнения $L_n(y) = f(x)$ может содержать только функцию вида $f(x) = M\cos\beta x$ или функцию вида $f(x) = N\sin\beta x$. Но частное решение методом подбора следует искать в полной форме, содержащей и $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ (см. таблицу 2).

Процедура подбора неопределённых коэффициентов показана ниже на примерах.

Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' = x^3 - 1$.

Решение. 1). Решаем сначала соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 2y' = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение, отыскивая частные решения уравнения в виде $y = e^{kx}$. Получаем $k^2 - 2k = 0$. Корни этого уравнения $k_1 = 0,\ k_2 = 2$ действительны и различны. Соответствующие им частные линейно независимые решения (см. таблицу 1) $y_1 = e^{0x} = 1,\quad y_2 = e^{2x}$. Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 + C_2 e^{2x}. \qquad (2.34)$$

2). Находим частное решение заданного неоднородного уравнения методом подбора, так как правая часть $f(x) = $ $= x^3 - 1 = P_3(x)$ - многочлен третьей степени относится к первому из указанных в таблице 2 случаев.

Сравнивая функцию $f(x) = x^3 - 1$ с выражением $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, заключаем, что $n = 3,\quad \alpha = 0$.

Сравниваем $\alpha = 0$ с корнями характеристического уравнения. Так как $\alpha = k_1$, то $m = 1$, и частное решение принимаем в виде

$$y_* = xR_3(x) = x\,(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D), \qquad (2.35)$$

где *A, B, C, D* - неопределённые коэффициенты, подлежащие подбору.

Подставляем (2.35) в исходное уравнение:

Таблица 2

Структура частного решения уравнения $L_n(y) = f(x)$ в зависимости от вида правой части

1	$f(x) = P_n(x)e^{ax}$, где $P_n(x)$ -многочлен (или одночлен) n-ой степени от x	**А**. Если число α не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения: $\alpha \neq k_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то частное решение следует принимать в форме $$y_* = R_n(x)\,e^{ax},$$ где $R_n(x)$ - многочлен n-ой степени с неопределёнными коэффициентами. **Б**. Если $\alpha = k_j$ (k_j-корень кратности m), то $$y_* = x^m R_n(x)\,e^{ax}.$$
2	$f(x) = M\cos\beta x +$ $+ N\sin\beta x$, где M и N –заданные постоянные числа	**А**. Если мнимое число βi не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения: $\beta i \neq k_j$ $((j = 1, 2, \ldots, n)$, то частное решение следует принимать в форме $y_* = A\cos\beta x + B\sin\beta x,$ где A и B–неопределённые коэффициенты. **Б**. Если $\beta i = k_j$ (k_j - корень кратности m),то $y_* = x^m(A\cos\beta x + B\sin\beta x).$
3	$f(x) = P(x)e^{ax}\cos\beta x +$ $+ Q(x)e^{ax}\sin\beta x,$ где $P(x)$ и $Q(x)$- многочлены (или одночлены) в общем случае различных степеней	**А.** Если комплексное число $\alpha + \beta i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения: $\alpha + \beta\, i \neq k_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то частное решение следует принимать в форме $$y_* = R_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + T_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$ где $R_n(x)$, $T_n(x)$- многочлены n-ой степени (равной наивысшей степени одного из многочленов $P(x)$ или $Q(x)$), но с неопределёнными и различными коэффициентами. **Б**. Если $\alpha + \beta\, i = k_j$ (k_j - корень кратности m), то $$y_* = x^m[R_n(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta\, x +$$ $$+ T_n(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta\, x].$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & y_* = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx, \\ -2 & y_*' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D, \\ 1 & y_*'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C. \end{array}$$

$$y_*'' - 2y_*' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C - 8Ax^3 - 6Bx^2 - 4Cx - 2D = x^3 - 1$$

или $$-8Ax^3 + (12A - 6B)x^2 + (6B - 4C)x + 2C - 2D = x^3 - 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях получающегося равенства многочленов и приходим к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & -8A = 1, \\ x^2 & 12A - 6B = 0, \\ x^1 & 6B - 4C = 0, \\ x^0 & 2C - 2D = -1. \end{array}$$

Решая эту систему, находим коэффициенты: $A = -1/8$, $B = -1/4$, $C = -3/8$, $D = 1/8$.

В результате частное решение уравнения примет вид

$$y_* = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x. \qquad (2.36)$$

Складывая (2.34) и (2.36), получим общее решение уравнения в виде

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x}{8}(x^3 + 2x^2 + 3x - 1).$$

Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' = 3\sin 2x$.

Решение. Общее решение однородного уравнения известно: см. (2.34). Находим частное решение неоднородного уравнения, сравнивая правую часть $f(x) = 3\sin 2x$ с выражением 2 из таблицы 2:

$$f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x.$$

Получаем $\beta = 2$, $M = 0$, $N = 3$.

Сравниваем мнимое число $\beta i = 2i$ с корнями характеристического уравнения. Так как $\beta i = 2i \neq k_j$ (j=1,2 - номер корня), то $m = 0$. Поэтому принимаем $y_* = A\cos 2x + B\sin 2x$, где A и B -

неопределённые коэффициенты. Процедура их определения имеет вид:

$$\begin{array}{r|l} 0 & y_* = A\cos 2x + B\sin 2x, \\ -2 & y_*' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \\ 1 & y_*'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x. \\ \hline \end{array}$$

$$y'' - 2y' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4A\sin 2x - 4B\cos 2x = 3\sin 2x,$$

$$(-4A - 4B)\cos 2x + (4A - 4B)\sin 2x = 3\sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты в обеих частях получившегося тригонометрического равенства при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, приходим к системе

$$\begin{cases} -4A - 4B = 0, \\ 4A - 4B = 3, \end{cases}$$

откуда следует $A = 3/8$, $B = -3/8$.

Поэтому частное решение исходного уравнения будет

$$y_* = \frac{3}{8}(\cos 2x - \sin 2x),$$

а общее решение запишется в виде

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{3}{8}(\cos 2x - \sin 2x).$$

Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' + 4y = (x+2)\, e^{3x}$.

Решение. 1). Находим общее решение однородного уравнения

$$y'' - 2y' + 4y = 0. \qquad (2.37)$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 4 = 0$ имеет комплексные сопряженные корни: $k_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $k_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Поэтому частные линейно независимые решения уравнения (2.37) будут (см. таблицу 1, случай 2а)

$$y_1 = e^x \cos\sqrt{3}x, \qquad y_2 = e^x \sin\sqrt{3}x,$$

а общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = e^x (C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x).$$

2). Находим частное решение неоднородного уравнения методом подбора. Сравниваем правую часть $f(x) = (x+2)e^{3x}$ с общим вы-

ражением (1) из таблицы 2: $f(x)=P_n(x)\,e^{\alpha x}$. Очевидно, что в данном случае n=1, $\alpha=3$. Так как $\alpha\neq k_j$ (j=1,2), то $m=0$.
Поэтому принимаем (см. таблицу 2, случай 1A):

$$y_*=R_1(x)e^{3x}=(Ax+B)\,e^{3x},$$

где A и B - неопределенные коэффициенты. Находим их, используя стандартную процедуру:

$$\begin{array}{r|l} 4 & y_*=(Ax+B)\,e^{3x}, \\ -2 & y'_*=(3Ax+A+3B)\,e^{3x}, \\ 1 & y''=(9Ax+6A+9B)\,e^{3x}. \end{array}$$

$$y''_*-2y'_*+4y_*=(7Ax+4A+7B)e^{3x}=(x+2)e^{3x}.$$

Сокращая на e^{3x} и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 7A=1, \\ x^0 & 4A+7B=2, \end{array}$$ откуда следует $A=1/7$, B=10/49.

Следовательно,

$$y_*=\left(\frac{1}{7}x+\frac{10}{49}\right)e^{3x}.$$

Общее решение уравнения:

$$y=e^x(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)+\frac{1}{7}\left(x+\frac{10}{7}\right)e^{3x}.$$

Пример. Решить уравнение $y''+4y=5\sin 2x-\cos x.$

Решение. 1). Находим общее решение однородного уравнения $y''+4y=0.$

Соответствующее ему характеристическое уравнение $k^2+4=0$ имеет мнимые корни $k_{1,2}=\pm 2i$. Поэтому частные решения уравнения будут (см. таблицу 1, случай 2б) $y_1=\cos 2x$, $y_2=\sin 2x$.

Общее решение примет вид: $y_0=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$

2). Находим сначала частное решение неоднородного уравнения

$$y''+4y=5\sin 2x.$$

Сравнивая $f_1(x)=5\sin 2x$ с выражением (см. таблицу 2, случай 2) $f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x$, определяем $\beta=2$.
Сравниваем $\beta i=2i$ с корнями $k_{1,2}$. Так как $\beta i=k_1=2i$, то $m=1$.
Поэтому принимаем $y_{1*}=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$. Тогда

$$\begin{array}{r|l}
4 & y_{1*}=x(A\cos 2x+B\sin 2x), \\
0 & y'_{1*}=A\cos 2x+B\sin 2x+x(-2A\sin 2x+2B\cos 2x), \\
1 & y''_{1*}=4(-A\sin 2x+B\cos 2x)-4x(A\cos 2x+B\sin 2x). \\
\hline
\end{array}$$

$$y''_{1*}+4y_{1*}=-4A\sin 2x+4B\cos 2x=5\sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях получившегося тригонометрического равенства при $sin2x$ и $cos2x$, получим A = -5/4, B = 0. Следовательно,

$$y_{1*}=-\frac{5}{4}x\cos 2x.$$

3). Далее находим частное решение уравнения $y''+4y=-\cos x$.
При этом $f_2(x)=-\cos x$. Так как $\beta i=i\neq k_{1,2}$, то принимаем (см. таблицу 2, случай 2А)

$$\begin{array}{r|l}
4 & y_{2*}=C\cos x+D\sin x, \\
0 & y'_{2*}=-C\sin x+D\cos x, \\
1 & y''_{2*}=-C\cos x-D\sin x. \\
\hline
\end{array}$$

$$y''_{2*}+4y_{2*}=-C\cos x-D\sin x+4C\cos x+4D\sin x=-\cos x.$$

откуда следует $C=-1/3$, $D=0$. Поэтому $y_{2*}=-(1/3)\cos x$.

Суммируя найденные частные решения с общим решением однородного уравнения, окончательно получим

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{5x}{4}\cos 2x-\frac{1}{3}\cos x.$$

Пример. Решить краевую задачу:

$$y''-6y'+9y=e^{2x}(\cos x-\sin x),\qquad y(0)=0,\qquad y(\pi/2)=0.$$

Решение. Сначала находим общее решение заданного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
Однородному дифференциальному уравнению $y''-6y'+9y=0$ соответствует характеристическое уравнение: $k^2-6k+9=0$, ко-

торое имеет два одинаковых действительных корня: $k_1 = k_2 = 3$. Поэтому общее решение однородного дифференциального уравнения запишется в виде $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения находим методом подбора, принимая (см таблицу 2, случай 3А):

$$\begin{array}{r|l} 9 & y_* = Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x. \\ -6 & y_*' = (2A+B)e^{2x}\cos x - (A-2B)e^{2x}\sin x, \\ 1 & \underline{y_*'' = (3A+4B)e^{2x}\cos x - (4A-3B)e^{2x}\sin x.} \end{array}$$

$$y_*'' - 6y_*' + 9y_* = (3A+4B)e^{2x}\cos x - (4A-3B)e^{2x}\sin x -$$
$$- 6(2A+B)e^{2x}\cos x + 6(A-2B)e^{2x}\sin x + 9Ae^{2x}\cos x +$$
$$+ 9Be^{2x}\sin x = e^{2x}(\cos x - \sin x).$$

откуда находим $A = B = -1/2$ и, следовательно,

$$y_* = -e^{2x}(\cos x + \sin x)/2.$$

Поэтому общее решение исходного дифференциального уравнения примет вид:

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) - e^{2x}(\cos x + \sin x)/2.$$

Далее находим произвольные постоянные из граничных условий.

При $x = 0$ $C_1 - 1/2 = 0$, откуда следует $C_1 = 1/2$.

При $x = \dfrac{\pi}{2}$ имеем равенство $e^{3\pi/2}\left(\dfrac{1}{2} + C_2\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{1}{2}e^{\pi} = 0$, разрешая которое относительно C_2, находим: $C_2 = \dfrac{1}{\pi}(e^{-\pi/2} - 1)$.

В результате решение краевой задачи запишется в виде:

$$y = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}(e^{-\pi/2} - 1)x\right]e^{3x} - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)\,e^{2x}.$$

Пример. Решить уравнение $y'' + y' = x\cos 2x$.

Решение. Однородному дифференциальному уравнению $y'' + y' = 0$ соответствует характеристическое уравнение: $k^2 + k = 0$, которое имеет действительные корни: $k_1 = 0$, $k_2 = -1$.

Поэтому общее решение однородного уравнения будет иметь вид: $y_0 = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Сравнивая правую часть уравнения $f(x) = x\cos 2x$ с общим выражением, при котором применим метод подбора (случай 3 из таблицы 2): $f(x) = P(x)e^{ax}\cos\beta x + Q(x)e^{ax}\sin\beta x$, находим $n = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Так как число $\alpha + \beta i = 2i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, то $m = 0$. Следовательно, частное решение ищем в виде $y_* = R_n(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x + T_n(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x.$
Подставляя найденные значения n, α, β, получим

$$y_* = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x.$$

Подставляем это решение в исходное уравнение:

$$y_* = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x.$$
$$y_*' = (2Cx + A + 2D)\cos 2x + (-2Ax - 2B + C)\sin 2x,$$
$$y_*'' = (-4Ax - 4B + 4C)\cos 2x + (-4Cx - 4A - 4D)\sin 2x\,.$$

Поэтому

$$y_*'' + y_*' = (-4Ax - 4B + 4C)\cos 2x + (-4Cx - 4A - 4D)\sin 2x +$$
$$+ (2Cx + A + 2D)\cos 2x + (-2Ax - 2B + C)\sin 2x = x\cos 2x.$$

После приведения подобных членов получим

$$[(-4A + 2C)x + A - 4B + 4C + 2D]\cos 2x + [-(2A + 4C)x - 4A - 2B -$$
$$- 4D + C]\sin 2x = x\cos 2x.$$

Приравниваем сначала коэффициенты в левой и правой частях последнего равенства при $\cos 2x$ и $\sin 2x$:

$$-4A + 2C)x + A - 4B + 4C + 2D = x,$$
$$-(2A + 4C)x - 4A - 2B - 4D + C = 0.$$

Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученных равенств, получим систему 4-х алгебраических уравнений относительно неопределённых коэффициентов:

$$\begin{cases} -4A + 2C = 1, \\ A - 4B + 4C + 2D = 0, \\ 2A + 4C = 0, \\ -4A - 2B + C - 4D = 0. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений системы следует: $A = -0{,}2$, $C = 0{,}1$. Поэтому из второго и четвертого уравнений находим $B = 0{,}13$, $D = 0{,}16$. Таким образом, искомое частное решение запишется в виде

$$y_* = (-0{,}2x + 0{,}13)\cos 2x + (0{,}1x + 0{,}16)\sin 2x.$$

Складывая его с общим решением однородного уравнения, окончательно получим общее решение исходного уравнения

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + (-0{,}2x + 0{,}13)\cos 2x + (0{,}1x + 0{,}16)\sin 2x.$$

2.4.2. Метод вариации произвольных постоянных

Если известна фундаментальная система решений линейного однородного уравнения $L_n(y) = 0$ то частное решение неоднородного уравнения $L_n(y) = f(x)$ может быть найдено с помощью квадратур (то есть неопределённых интегралов от этих решений) *методом вариации произвольных постоянных* (*методом Лагранжа*).

Рассмотрим его реализацию для линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{2.38}$$

Сначала находим общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $L(y) = 0$ в виде

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{2.39}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, y_1, y_2 - частные линейно независимые решения однородного уравнения.

Далее ищем решение неоднородного уравнения (2.38), аналогичное по структуре (2.39), но произвольные постоянные в (2.39) заменяем неизвестными функциями, а именно принимаем

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2. \tag{2.40}$$

Тогда $y' = C_1'(x) y_1 + C_1(x) y_1' + C_2'(x) y_2 + C_2(x) y_2'$.

Так как функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ произвольны, то можно принять, что они должны удовлетворять условию:

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0. \tag{2.41}$$

Тогда $y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'$ и, следовательно,

$$y'' = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''. \qquad (2.42)$$

Подставляя теперь значения производных в уравнение (2.38), получим

$$\begin{aligned} &C_1(x)\left(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1\right) + C_2(x)\left(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2\right) + \\ &+ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{aligned} \qquad (2.43)$$

Учитывая, что функции y_1 и y_2 являются решениями однородного уравнения (2.38), и, следовательно,

$$y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0, \qquad y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = 0,$$

приходим к равенству $C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$.

Таким образом, чтобы выражение (2.40) было решением неоднородного уравнения (2.38), неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ должны удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (2.44)$$

Определитель этой системы - определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как функции y_1 и y_2 линейно независимы. Поэтому система (2.44), рассматриваемая как система линейных алгебраических уравнений относительно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, имеет решение и притом единственное. Применяя формулы Крамера[7], его можно представить в виде

$$C_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{W}, \qquad C_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W}. \qquad (2.45)$$

Интегрируя дифференциальные уравнения первого порядка (2.45), находим

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W}dx + C_1, \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W}dx + C_2. \qquad (2.46)$$

Подставляя (2.46) в (2.40), получим общее решение неоднородного уравнения в виде

---

[7] К р а м е р Габриэль (31.07.1704 – 04.01.1752) – швейцарский математик.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx. \qquad (2.47)$$

Последние два слагаемых в правой части формулы (2.46) определяют частное решение неоднородного уравнения (2.38).

Замечание. Метод вариации произвольных постоянных является общим методом, пригодным для построения решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений (как с переменными, так и с постоянными коэффициентами) при произвольной непрерывной правой части. Но он является принципиально более сложным, чем метод подбора, так как его реализация связана с интегрированием дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с правыми частями специального вида, указанными в таблице 2, проще применять метод подбора частного решения.

Пример. Решить уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}. \qquad (2.48)$$

Решение. 1). Находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 4 = 0.$ Его корни $k_1 = k_2 = -2.$ Следовательно, частные линейно независимые решения равны $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$, а общее решение

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

2). Так как правая часть неоднородного уравнения (2.48) не относится ни к одному из рассмотренных в таблице 2 случаев, то частное решение находим методом вариации произвольных постоянных. Принимаем

$$y = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) x e^{-2x}, \qquad (2.49)$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - неизвестные (варьируемые) функции. Тогда их производные $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ могут быть найдены из решения системы (2.44):

$$\begin{cases} C_1'(x)\,e^{-2x} + C_2'(x)\,xe^{-2x} = 0, \\ -2C_1'(x)\,e^{-2x} + C_2'(x)(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = e^{-2x}\,/\,x. \end{cases}$$

Определитель этой системы $W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}.$

Поэтому для определения варьируемых функций согласно (2.45) получаем дифференциальные уравнения вида

$$C_1'(x) = -\frac{xe^{-2x}e^{-2x}}{xe^{-4x}} = -1, \qquad C_2'(x) = \frac{e^{-2x}e^{-2x}}{xe^{-4x}} = \frac{1}{x}. \tag{2.50}$$

Интегрируя уравнения (2.50), находим

$$C_1(x) = -x + C_1, \qquad C_2(x) = \ln x + C_2. \tag{2.51}$$

Подставляя (2.51) в (2.49), получим общее решение уравнения в виде $y = e^{-2x}[C_1 + C_2 x + x(\ln x - 1)]$.

2.5. Задачи на собственные значения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{2.52}$$

с однородными граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0\,. \tag{2.53}$$

Здесь предполагается, что $0 \le x \le L$, $\lambda -$некоторый параметр, имеющий определённый физический смысл.

Задача (2.52), (2.53) является однородной краевой задачей. Особенность её в том, что она имеет нулевое (тривиальное) решение $y = 0$, не представляющее физического интереса. Но, кроме того, имеются еще определённые значения параметра λ, при которых задача имеет не равные тождественно нулю (нетривиальные) решения. Такие значения параметра λ называются *собственными значениями*, а соответствующие им ненулевые решения $y(x)$ называются *собственными функциями*. Сама же задача отыскания собственных значений и собственных функций называется *задачей на собственные значения или задачей Штурма*[8]-

[8] Ш т у р м Жан Шарль Франсуа (29.09.1803 – 18.12.1855) – французский математик

Лиувилля[9]. Эта задача представляет большой интерес для физики и для технических приложений. К ней, например, сводятся многие задачи устойчивости и колебаний упругих систем.

Покажем, прежде всего, что ненулевые решения задачи (2.52), (2.53) существуют при $\lambda > 0$. Доказательство от противного.

1) Пусть $\lambda = 0$. Тогда уравнение (2.90) примет вид $y'' = 0$. Его общее решение, очевидно, будет $y = C_1 x + C_2$. Определяя далее произвольные постоянные из граничных условий (2.53), находим $C_1 = C_2 = 0, \Rightarrow y \equiv 0$. Поэтому $\lambda = 0$ не является собственным значением.

2) Пусть $\lambda < 0$. Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (2.52) $k^2 + \lambda = 0$, имеет действительные и различные корни: $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$. Поэтому общее решение уравнения (2.52) запишется в виде $y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Подставляя его в граничные условия (2.53), получим систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ e^{\sqrt{-\lambda}x} C_1 + e^{-\sqrt{-\lambda}x} C_2 = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}x} & e^{-\sqrt{-\lambda}x} \end{vmatrix} \neq 0$, следовательно, $C_1 = C_2 = 0$. Поэтому задача (2.52), (2.53) имеет только нулевое решение $y \equiv 0$.

3) Пусть $\lambda > 0$. Тогда корни характеристического уравнения будут мнимыми: $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm\sqrt{\lambda}i$. Поэтому частные решения будут $y_1 = \cos\sqrt{\lambda}x$, $y_1 = \sin\sqrt{\lambda}x$, и общее решение уравнения (2.52) запишется в виде

$$y = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x. \tag{2.54}$$

Из первого граничного условия (при $x = 0$) получаем $C_1 = 0$, а из второго граничного условия (при $x = l$) следует $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$.

---

[9] Лиувилль Жозеф (24.03.1809 – 08.09.1882) – французский математик

Если $C_2 = 0,$ то опять получим нулевое решение $y = 0.$ Поэтому, чтобы существовало нетривиальное решение задачи, необходимо принять

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Из этого тригонометрического уравнения следует $\sqrt{\lambda}l = n\pi,$ где n – произвольное целое число. Поэтому собственные значения параметра для задачи (2.52), (2.53) будут

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = \pm1, \pm2, ...) \qquad (2.55)$$

(так как собственные значения будут различными для разных n, то им приписывается соответствующий индекс).

Соответствующие им собственные функции с точностью до постоянного множителя C_2 определяются по формуле

$$y = \sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (2.56)$$

Устойчивость стержня

Рассмотрим в качестве примера классическую задачу об устойчивости прямолинейного упругого шарнирно опёртого стержня длиной l, нагруженного осевой сжимающей силой *P,* линия действия которой совпадает с продольной осью стержня. Постановка и решение этой задачи впервые были даны Л.Эйлером в 1765 году.

Пока сжимающая нагрузка мала, стержень сохраняет прямолинейную форму равновесия. Если увеличивать нагрузку, то при некотором значении сжимающей силы прямолинейная форма равновесия перестаёт быть устойчивой, и возникает близкая к ней искривлённая форма равновесия (см. рис. I.14).

Уравнение равновесия отсечённой части стержня длиной x может быть записано в виде: $EIy'' = -M$ или

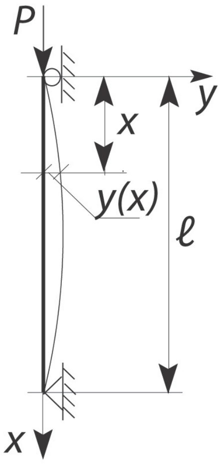
$$EIy'' + Py = 0, \qquad (2.57)$$

где $y(x)$ - прогиб стержня, $y''(x)$ - приближенное выражение для кривизны изогнутой оси стержня, EI - изгибная жесткость стержня, $M(x) = Py$ - изгибающий момент в произвольном сечении стержня. Полагая

$$\lambda = \frac{P}{EI}, \tag{2.58}$$

приведём уравнение (2.57) к виду (2.52): $y'' + \lambda y = 0$.

Так как прогибы на концах шарнирно опёртого стержня равны нулю, то граничные условия запишутся в виде (2.53): $y(0) = 0,\ y(l) = 0.$



Поэтому с математической точки зрения задача об устойчивости упругого шарнирно опёртого стержня сведена к рассмотренной выше задаче на собственные значения (2.52), (2.53).

Тривиальное решение этой задачи ($y \equiv 0$) соответствует исходной прямолинейной форме равновесия. Нетривиальное решение, соответствующее искривлённой форме равновесия, существует при собственных значениях параметра λ, определяемых согласно (2.55).

Рис. 1.14

Приравнивая выражения (2.55) и (2.58), получим $\dfrac{P}{EI} = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$.

Следовательно, чтобы стержень сохранял криволинейную форму равновесия, необходимо, чтобы сжимающая сила принимала значения

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}. \tag{2.59}$$

Число $n = 1,2,...$ в данной задаче имеет смысл числа полуволн синусоиды (2.56), по которой происходит искривление оси стержня.

Из формулы (2.59) следует, что существует множество значений сжимающей силы *P*, при которых возможны различные искривлённые формы равновесия продольно сжатого стержня. Наименьшее значение сжимающей силы, соответствующее $n = 1$, называется *критической (эйлеровой) силой* и равно

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Пример. Найти собственные значения и собственные функции однородной краевой задачи для уравнения (2.52) при граничных условиях $y(0)-y(1)=0, \qquad y'(1)=0.$

Решение. Общее решение уравнения согласно (2.54) имеет вид

$$y=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Вычисляем $\quad y'(x)=-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x,$

$$y(0)=C_1,\quad y(1)=C_1\cos\sqrt{\lambda}+C_2\sin\sqrt{\lambda},$$

$$y'(1)=-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}.$$

Подставляя эти величины в граничные условия, после элементарных преобразований получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases}(1-\cos\sqrt{\lambda})\cdot C_1-\sin\sqrt{\lambda}\cdot C_2=0,\\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\cdot C_1+\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\cdot C_2=0.\end{cases}$$

Ненулевое решение её существует тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix}1-\cos\sqrt{\lambda} & -\sin\sqrt{\lambda}\\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение относительно параметра λ:

$$\sqrt{\lambda}\,(\cos\sqrt{\lambda}-1)=0,$$

корни которого являются собственными значениями задачи:

$$\lambda=0,\qquad \lambda=(2\pi n)^2,\qquad n=1,2,...$$

Легко убедиться, что при $\lambda=0$ $\quad y=const$. Подставляя $\sqrt{\lambda}=2\pi n,\ \ n=1,2,...,$ в систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2, находим $C_2=0$. Соответствующие собственные функции с точностью до множителя будут $\quad y=\cos 2\pi nx.$

2.6. Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

Если коэффициенты $a_i(x), \quad (i=1,2,...,n)$ линейного неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x) \qquad (2.60)$$

и его правая часть $f(x)$ представляют собой функции, которые определены и непрерывны на заданном интервале, то рассмотренные выше теоремы о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения и соответствующего ему однородного уравнения остаются справедливыми. Остаются в силе также принцип суперпозиции решений для неоднородного уравнения и метод вариации произвольных постоянных. Но при этом нельзя искать фундаментальную систему решений однородного уравнения рассмотренным выше методом.

В общем случае решения уравнения с переменными коэффициентами (2.60) строятся приближёнными методами. Одним из эффективных приближённых методов является метод степенных рядов.

Рассмотрим два варианта применения этого метода:

1) метод степенных рядов в форме метода неопределённых коэффициентов;

2) разложение решения задачи Коши в степенной ряд с помощью формулы Тейлора[10].

2.6.1. Решение задачи Коши методом степенных рядов

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0$$

и пусть начальные условия имеют вид

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

то есть сформулирована задача Коши.

Будем искать решение уравнения в виде бесконечного степенного ряда с неопределёнными коэффициентами

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \ldots$$

---

[10] Тейлор Брук (18.08.1685 – 29.12.1731) – английский математик.

В частности, при $x_0 = 0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ...$$

Формальный алгоритм определения коэффициентов ряда следующий: ряд подставляется в уравнение. В получающемся тождественном равенстве коэффициенты при различных степенях x приравниваются нулю. В результате получается система уравнений для определения коэффициентов c_n. Полученное решение исследуют на сходимость и на возможность почленного дифференцирования. В области, в которой ряд сходится и допускает n – кратное дифференцирование, он и является искомым решением.

Пример. Решить задачу Коши для уравнения

$$y'' - 2xy' - 4y = 0 \tag{2.61}$$

при начальных условиях

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{2.62}$$

Решение. Представим решение задачи (2.61), (2.62) степенным рядом с неопределёнными коэффициентами:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{2.63}$$

Подставляем искомое решение (2.63) в уравнение (2.61), учитывая соотношения

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \ldots + n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \ldots$$

Тогда имеем:

$$[2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \ldots + n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \ldots] - 2x(a_1 +$$
$$+ 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots) - 4(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 +$$
$$+ \ldots + a_n x^n + \ldots) = 0.$$

Группируя подобные члены при одинаковых степенях x, получим тождественное равенство:

$$2a_2 - 4a_0 + (3 \cdot 2a_3 - 2a_1 - 4a_1)x + (4 \cdot 3a_4 - 2 \cdot 2a_2 - 4a_2)x^2 + (5 \cdot 4a_5 -$$
$$- 3 \cdot 2a_3 - 4a_3)x^3 + ... + [n(n-1)a_n - 2(n-2)a_{n-2} - 4a_{n-2}]x^{n-2} + ... \equiv 0.$$

В левой части этого тождества имеем степенной ряд. Ряд будет тождественно равен нулю, если его коэффициенты будут равны нулю. Приравнивая коэффициенты при различных степенях x нулю, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&2a_2 - 4a_0 = 0,\\
&3\cdot 2a_3 - 6a_1 = 0,\\
&4\cdot 3a_4 - 8a_2 = 0,\\
&5\cdot 4a_5 - 10a_3 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&n(n-1)\,a_n - 2n\,a_{n-2} = 0.
\end{aligned}$$

Из этой системы следуют так называемые *рекуррентные формулы*:

$$\begin{aligned}
&a_2 = 2a_0,\\
&a_3 = a_1,\\
&\dots\dots\dots\\
&a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1},
\end{aligned} \qquad (2.64)$$

позволяющие выразить последующие коэффициенты ряда через предыдущие.

Подчиняя искомое решение (2.63) начальным условиям, получаем $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Остальные коэффициенты ряда определяются по рекуррентным формулам (2.64):

$a_2 = a_0 = 0$, $a_3 = a_1 = 1$, $a_4 = 0$, $a_5 = 1/2!$, $a_6 = 0$, $a_7 = 1/3!$ и т. д.

После подстановки коэффициентов в (2.63) находим окончательное выражение

$$y = x + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{n!} + \dots \qquad (2.65)$$

Применяя признак Даламбера[11], легко установить, что ряд (2.65) сходится на всей числовой оси. Следовательно, выражение (2.65) представляет решение исходной задачи при $x \in (-\infty;\infty)$.

---

[11] Д а л а м б е р Жан Лоран (16.11.1717 – 29.10.1783) – французский математик, механик, физик.

2.6.2. Построение общего решения линейного неоднородногоуравнения методом степенных рядов

Пусть требуется найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' - xy' - y = 2. \qquad (2.66)$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_*, \qquad (2.67)$$

где y_* - частное решение неоднородного уравнения, C_1 и C_2 - произвольные постоянные, y_1 и y_2 - частные линейно независимые решения однородного уравнения

$$y'' - xy' - y = 0. \qquad (2.68)$$

Чтобы построить общее решение уравнения (2.66), будем решать задачу Коши для этого уравнения при начальных условиях:

$$y(0) = C_1, \qquad y'(0) = C_2. \qquad (2.69)$$

Решение задачи (2.68), (2.69) представим рядом

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (2.70)$$

Легко видеть, что $a_0 = y(0)$, $a_1 = y_1'(0)$, то есть первые два коэффициента разложения решения в ряд (2.70) представляют собой соответственно начальное значение функции и её первой производной. Поэтому в соответствии с начальными условиями (2.69) можно принять

$$a_0 = C_1, \quad a_1 = C_2. \qquad (2.71)$$

Для определения последующих коэффициентов ряда подставляем его в уравнение (2.66)

$$[2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1)\,a_n x^{n-2} + \ldots] - x[a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 +$$

$$+ \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots] - [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots] = 2,$$

следовательно,

$$2a_2 - a_0 + (3\cdot 2a_3 - 2a_1)\,x + (4\cdot 3a_4 - 3a_2)\,x^2 + (5\cdot 4a_5 - 4a_3)\,x^3 + \ldots +$$

$$+ [n(n-1)a_n - (n-1)\,a_{n-2}]\,x^{n-2} + \ldots = 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного равенства, приходим к соотношениям вида

$$2a_2 - a_0 = 2,$$
$$3 \cdot 2a_3 - 2a_1 = 0,$$
$$4 \cdot 3a_4 - 3a_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n(n-1)\,a_n - (n-1)\,a_{n-2} = 0,$$

В результате рекуррентные формулы для коэффициентов примут вид:

$$a_2 = a_0 / 2 + 1,$$
$$a_3 = a_1 / 3,$$
$$a_4 = a_2 / 4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = a_{n-2} / n. \qquad (2.72)$$

По этим формулам с учётом (2.71) получаем:

$$a_2 = C_1 / 2 + 1,$$
$$a_3 = C_2 / 3,$$
$$a_4 = C_1 / (2 \cdot 4) + 1/4,$$
$$a_5 = C_2 / (3 \cdot 5),$$
$$a_6 = C_1 / (2 \cdot 4 \cdot 6) + 1/(4 \cdot 6)$$

и так далее. Подставляя найденные коэффициенты в искомое решение (2.70) и группируя подобные члены, получим общее решение уравнения (2.66) в форме:

$$y = C_1\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots\right) + C_2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots\right) +$$
$$+ x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{4 \cdot 6} + \frac{x^8}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \ldots \qquad (2.73)$$

Первые два ряда в (2.73) сходятся на всей числовой оси и определяют функции y_1 и y_2, линейно независимые в окрестности сти точки x=0. Ряд

$$y_* = x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{4 \cdot 6} + \frac{x^8}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \ldots$$

также сходится на всей числовой оси и удовлетворяет уравнению (2.66). Поэтому функция y_* является разложением в степенной ряд частного решения исходного линейного неоднородного уравнения. Заметим, что в данном примере частное решение y_* можно было проще найти методом подбора. Оно, очевидно, равно $y_* = -2$. Тогда функции y_1 и y_2 следует находить как частные решения однородного уравнения (2.68), используя рекуррентные соотношения (2.72) и формулы (2.71).

2.6.3. Разложение решения задачи Коши в ряд Тейлора

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}), \qquad (2.74)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad ...y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (2.75)$$

Будем искать решение задачи в виде разложения в ряд Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ... \qquad (2.76)$$

В частности, при $x_0 = 0$ получаем разложение в ряд по степеням x (ряд Маклорена[12]):

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + ... + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + ... \qquad (2.77)$$

Задача сводится к отысканию коэффициентов ряда (2.76). Как видно, первые n коэффициентов ряда могут быть найдены непосредственно из начальных условий (2.75); (n+1)-ый коэффициент разложения решения в ряд $y^{(n)}(x_0)$ определяется из дифференциального уравнения (2.74) после подстановки в правую часть начальных условий (2.75). Последующие коэффициенты ряда

---

[12] Маклорен Колин (1698 – 14.06.1746) – шотландский математик.

(2.76) находятся дифференцированием правой части уравнения (2.74) (обычно с использованием правила дифференцирования сложной функции) и начальных условий (2.75). Если полученный ряд сходится, то в интервале сходимости он является решением задачи (2.74), (2.75).

Заметим, что этот метод является достаточно универсальным и применим к нелинейным уравнениям с переменными коэффициентами, но вычисление производных высокого порядка может оказаться трудоёмким из-за необходимости последовательного дифференцирования сложных функций.

Пример. Решить задачу Коши для уравнения

$$y'' = y'^2 - xe^y \tag{2.78}$$

при начальных условиях $y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

Решение. Принимаем решение в виде (2.77). В рассматриваемой задаче первые два коэффициента ряда определяются из начальных условий. Третий коэффициент получается непосредственно из дифференциального уравнения (2.78) при $x=0$ и равен $y''(0)=1$. Дифференцируя последовательно уравнение (2.78), получим

$$y'''(x) = 2y'y'' - e^y - xe^y y',$$

$$y^{IV}(x) = 2y''^2 + 2y'y''' - 2e^y y' - xe^y y'^2 - xe^y y''.$$

Поэтому при x=0 находим $y'''(0) = 2\cdot 1\cdot 1 - e = 2-e$, $y^{IV}(0) = 6-4e.$

Ограничиваясь первыми пятью членами ряда (2.77), получим решение задачи в виде

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2-e}{3!}x^3 + \frac{6-4e}{4!}x^4 + \ldots$$

Полученное выражение является решением при условии сходимости ряда и даёт достаточно точное значение функции y в малой окрестности точки $x=0$.

3. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение многих прикладных задач, как правило, приводит к системам дифференциальных уравнений. Кроме того, при численном решении дифференциальных уравнений высокого порядка обычно применяется процедура сведения дифференциального уравнения n-го порядка относительно одной неизвестной функции к системе дифференциальных уравнений относительно n неизвестных функций.

Она базируется на следующей теореме: *Дифференциальное уравнение n-го порядка* $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$, *разрешённое относительно старшей производной, может быть сведено к системе n дифференциальных уравнений первого порядка.*

Это достигается последовательной заменой функции и её производных разного порядка новыми функциями:

$$y = y_1,$$

$$y' = y_1' = y_2,$$

$$y'' = y_1'' = y_2' = y_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)} = \ldots.. = \mathrm{y}_{\mathrm{n\text{-}1}}' = y_n,$$

$$y^{(n)} = y_n' = f(x, y_1, y_2, ... y_n).$$

В результате, исходное дифференциальное уравнение окажется эквивалентным следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка относительно n неизвестных функций $y_1(x), y_2(x), \quad \cdots, y_n(x)$.

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad (i = 1,2,...,n) \tag{3.1}$$

называется системой, записанной в нормальной форме Коши или нормальной системой.

В частности, нормальная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами записывается в форме

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + f_i(x) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x). \end{cases}$$

Если $f_i(x) = 0 \quad (i = 1,2,...,n)$, то система называется *однородной*. Если хотя бы одна из функций $f_i(x) \neq 0$, то система называется *неоднородной*.

Общим решением системы (3.1) на интервале (a, b) изменения аргумента x называется всякая совокупность функций $y_i(x, C_1, C_2, \ ..., C_n) \ (i = 1,2,...,n)$, дифференцируемых на интервале (a, b), и обращающих каждое из уравнений системы (3.1) в тождество.

Число произвольных постоянных, входящих в общее решение нормальной системы уравнений, равно числу неизвестных функций. Решение, получающееся из общего при конкретных значениях произвольных постоянных, называется *частным решением.* Для получения частного (единственного) решения системы произвольные постоянные определяются из начальных или граничных условий.

Задача с начальными условиями (задача Коши) для системы (3.1) формулируется так: требуется найти решение системы, удовлетворяющее при одном и том же начальном значении независимой переменной $x = x_0$ n начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0, \qquad y_2(x_0) = y_2^0, \qquad y_n(x_0) = y_n^0.$$

Рассмотрим различные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений.

3.1. Метод исключения неизвестных

Этот метод является общим, пригодным для систем дифференциальных уравнений различного типа и основан на том, что нормальная система n дифференциальных уравнений относительно n неизвестных функций $y_1(x),\ y_2(x), \dots, y_n(x)$ может быть сведена к одному дифференциальному уравнению n-го порядка относительно одной неизвестной функции.

Убедимся в этом на примере системы двух уравнений относительно двух неизвестных функций $y_1(x),\ y_2(x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \varphi[x, y_1(x), y_2(x)], \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = \psi[x, y_1(x), y_2(x)]. \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение системы по x, получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\psi.$$

Так как функции φ и ψ зависят от x, y_1, y_2, то можно записать:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F(x, y_1, y_2),$$

где $F(x, y_1, y_2)$ - некоторая функция x, y_1, y_2.

Далее из первого уравнения системы находим y_2 как функцию вида $y_2 = \chi(x, y_1, y_1')$. Подставляя y_2 в равенство $\dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F(x, y_1, y_2)$, получим уравнение второго порядка относительно одной неизвестной функции y_1:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F(x, y_1, \chi(x, y_1, y_1') = \xi(x, y_1, y_1').$$

Применение метода исключения неизвестных покажем на примерах.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2 + x, \\ y_2' = -2y_1 - y_2 + 3x. \end{cases} \tag{3.2}$$

Решение. Последовательность решения такова: дифференцируем первое уравнение по x:

$$y_1'' = -4y_1' + y_2' + 1. \tag{3.3}$$

Подставляем y_2' из второго уравнения (3.2) в (3.3):

$$y_1'' = -4y_1' - 2y_1 - y_2 + 3x + 1. \tag{3.4}$$

Из первого уравнения системы (3.2) находим

$$y_2 = y_1' + 4y_1 - x \tag{3.5}$$

и подставляем в (3.4). В результате исключаем функцию y_2 и получаем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно одной неизвестной функции y_1:

$$y_1'' = -4y_1' - 2y_1 - y_1' - 4y_1 + x + 3x + 1 = -5y_1' - 6y_1 + 4x + 1$$

или

$$y_1'' + 5y_1' + 6y_1 = 4x + 1.$$

Его общее решение имеет вид

$$y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{2x}{3} - \frac{7}{18}. \tag{3.6}$$

Далее из (3.5) с учетом (3.6) находим y_2:

$$y_2 = -2C_1 e^{-2x} - 3C_2 e^{-3x} + \frac{2}{3} + 4\left(C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{2x}{3} - \frac{7}{18}\right) - x =$$

$$= 2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{5x}{3} - \frac{8}{9}.$$

В результате общее решение системы запишется в виде

$$y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{2x}{3} - \frac{7}{18},$$

$$y_2 = 2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{5x}{3} - \frac{8}{9}.$$

Решение методом исключения неизвестных существенно усложняется с увеличением порядка системы.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = 5y_2 - y_1 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3. \end{cases} \tag{3.7}$$

Решение. 1) Дифференцируем первое уравнение (3.7) по x:

$$y_1'' = 3y_1' - y_2' + y_3'.$$

2) Заменяем в полученном уравнении первые производные их выражениями из системы (3.7):

$$y_1'' = 3(3y_1 - y_2 + y_3) - (5y_2 - y_1 - y_3) + y_1 - y_2 + 3y_3 = 11y_1 - 9y_2 + 7y_3. \tag{3.8}$$

3) Дифференцируем уравнение (3.8):

$$y_1''' = 11y_1' - 9y_2' + 7y_3'. \tag{3.9}$$

4) Вновь подставляем в (3.9) значения производных из исходной системы:

$$\begin{aligned} y_1''' &= 11(3y_1 - y_2 + y_3) - 9(5y_2 - y_1 - y_3) + 7(y_1 - y_2 + 3y_3) = \\ &= 49y_1 - 63y_2 + 41y_3. \end{aligned} \tag{3.10}$$

5) Из первого уравнения системы (3.7) и из уравнения (3.8) находим y_2 и y_3. Для этого перепишем их в виде

$$\begin{cases} y_2 - y_3 = 3y_1 - y_1', \\ 9y_2 - 7y_3 = 11y_1 - y_1''. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$y_2 = \frac{-10y_1 + 7y_1' - y_1''}{2}, \qquad y_3 = \frac{-16y_1 + 9y_1' - y_1''}{2}. \tag{3.11}$$

6) Исключаем теперь y_2 и y_3 из уравнения (3.10), подставляя в него равенства (3.11):

$$\begin{aligned} y_1''' &= 49y_1 - 63y_2 + 41y_3 = 49y_1 - 63\frac{-10y_1 + 7y_1' - y_1''}{2} + \\ &+ 41\frac{-16y_1 + 9y_1' - y_1''}{2} = 36y_1 - 36y_1' + 11y''. \end{aligned}$$

Итак, задача сведена к решению линейного однородного уравнения 3-го порядка с постоянными коэффициентами относительно одной неизвестной функции y_1 :

$$y_1''' - 11y_1'' + 36y_1' - 36y_1 = 0. \qquad (3.12)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (3.12), будет иметь вид $k^3 - 11k^2 + 36k - 36 = 0.$

Подбирая корни уравнения среди делителей свободного члена, получим $k_1 = 2,\quad k_2 = 3,\quad k_3 = 6.$ Поэтому общее решение уравнения (3.12) запишется в виде $y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}.$

8) Из равенств (3.11) находим далее y_2 и y_3.

В результате общее решение системы будет иметь вид

$$y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x},$$

$$y_2 = C_2e^{3x} - 2C_3e^{6x},$$

$$y_3 = -C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}.$$

3.2. Метод Эйлера

Рассмотрим решение однородной системы методом, аналогичным тому, который применялся для построения фундаментальной системы решений линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка (методом Эйлера).

Пусть дана нормальная система однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases} \qquad (3.13)$$

Будем искать частное решение однородной системы в виде

$$y_1 = \alpha_1\, e^{kx},\ \ y_2 = \alpha_2\, e^{kx}, \ldots,\ \ y_n = \alpha_n\, e^{kx}, \qquad (3.14)$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n,\ k$ – неизвестные постоянные. Подставляя (3.14) в (3.13), сокращая на e^{kx}, после элементарных преобразований получим

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\,\alpha_n = 0, \\ a_{21}\,\alpha_1 + (a_{22}-k)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\,\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn}-k)\,\alpha_n = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Как известно, чтобы система линейных однородных алгебраических уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы её определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{3.16}$$

Раскрывая этот определитель, получим алгебраическое уравнение n-ой степени относительно k. Уравнение (3.16) называется *характеристическим или вековым*[13] *уравнением*, а его корни – корнями характеристического уравнения или *собственными значениями*. Если все корни k_i (i=1,2,...,n) этого уравнения действительные и различные числа (ограничимся только этим случаем), то последовательно подставляя их в систему (3.15), найдем соответствующие этим корням неизвестные числа α_{1i}, $\alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{n\,i}$ (здесь второй индекс i = 1,2, ..., n соответствует номеру корня), а затем из (3.14) - n частных решений системы дифференциальных уравнений в виде

$$y_{1i} = \alpha_{1i}\, e^{k_i x},\ y_{2i} = \alpha_{2i}\, e^{k_i x}, \ldots,\ y_{ni} = \alpha_{ni}\, e^{k_i x}. \tag{3.17}$$

При этом первый индекс указывает номер неизвестной функции, а второй - номер корня. Полученные таким образом n частных решений линейной однородной системы образуют фундаментальную систему решений этой системы.

[13] Такое название связано с тем, что к аналогичным уравнениям в астрономии приводилась задача определения периодов так называемых вековых неравенств (отклонений движения планет от эллиптического, имеющих периоды, исчисляемые веками).

$$\boldsymbol{Y}_1(x)=\begin{bmatrix} y_{11}(x)\\ y_{21}(x)\\ .\\ .\\ .\\ y_{n1}(x)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Y}_2(x)=\begin{bmatrix} y_{12}(x)\\ y_{22}(x)\\ .\\ .\\ .\\ y_{n2}(x)\end{bmatrix},\ \ldots,\boldsymbol{Y}_n(x)=\begin{bmatrix} y_{1n}(x)\\ y_{2n}(x)\\ .\\ .\\ .\\ y_{nn}(x)\end{bmatrix}$$

Следовательно, общее решение однородной системы дифференциальных уравнений запишется в виде

$$\boldsymbol{Y}(x)=C_1\boldsymbol{Y}_1(x)+C_2\boldsymbol{Y}_2(x)+\ldots+C_n\boldsymbol{Y}_n(x)$$

или

$$\begin{aligned} y_1(x)&=C_1y_{11}(x)+C_2y_{12}(x)+\ldots+C_ny_{1n}(x),\\ y_2(x)&=C_1y_{21}(x)+C_2y_{22}(x)+\ldots+C_ny_{2n}(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n(x)&=C_1y_{n1}(x)+C_2y_{n2}(x)+\ldots+C_ny_{nn}(x), \end{aligned}$$

где $C_1,\ C_2,\ldots,C_n$ - произвольные постоянные.

Пример. Решить методом Эйлера систему

$$\begin{cases} y_1'=-4y_1+y_2,\\ y_2'=-2y_1-y_2. \end{cases} \tag{3.18}$$

Решение. Принимаем

$$y_1=\alpha_1 e^{kx},\quad y_2=\alpha_2 e^{kx}. \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в (3.18), получим алгебраическую систему

$$\begin{cases} (-4-k)\alpha_1+\alpha_2=0,\\ -2\alpha_1+(-1-k)\alpha_2=0. \end{cases} \tag{3.20}$$

Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} -4-k & 1\\ -2 & -1-k \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно,

$$(-4-k)(-1-k)+2=0 \quad \text{или} \quad k^2+5k+6=0.$$

Корни уравнения $k_1=-2,\ k_2=-3$ - действительны и различны.

Подставляя $k_1=-2$ в (3.20), получим

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.21)$$

Система (3.21) совместная, но неопределённая. Полагая $\alpha_1 = \alpha_{11} = 1$, находим $\alpha_2 = \alpha_{21} = 2$. Поэтому

$$y_{11} = e^{-2x}, \quad y_{21} = 2e^{-2x}. \qquad (3.22)$$

Подставляем теперь в систему (3.20) $k_2 = -3$. Получим

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.23)$$

Решение этой системы принимаем в виде $\alpha_1 = \alpha_{12} = 1$, $\alpha_2 = \alpha_{22} = 1$. При этом

$$y_{12} = e^{-3x}, \quad y_{22} = e^{-3x}. \qquad (3.24)$$

Общее решение однородной системы (3.18) запишется в виде

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1 y_{11}(x) + C_2 y_{12}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}, \\ y_2(x) &= C_1 y_{21}(x) + C_2 y_{22}(x) = 2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}. \end{aligned} \qquad (3.25)$$

3.3. Метод вариации произвольных постоянных

Этот метод применим к решению систем неоднородных линейных уравнений n-го порядка. Ограничимся для простоты нормальной системой двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + f_2(x). \end{cases} \qquad (3.26)$$

Пусть общее решение однородной системы уравнений известно:

$$\begin{aligned} y_{10} &= C_1 y_{11} + C_2 y_{12}, \\ y_{20} &= C_1 y_{21} + C_2 y_{22}, \end{aligned} \qquad (3.27)$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные, а y_{11}, y_{21}, y_{12}, y_{22} - частные решения однородной системы, соответствующие различным корням характеристического уравнения.

В соответствии с методом вариации частное решение неоднородной системы отыскивается в форме, аналогичной по структуре общему решению однородной системы, но произвольные постоянные в (3.27) заменяются неизвестными функциями, то есть принимается

$$y_{1*} = C_1(x)\, y_{11} + C_2(x)\, y_{12},$$
$$y_{2*} = C_1(x)\, y_{21} + C_2(x)\, y_{22}. \qquad (3.28)$$

Подстановка (3.28) в (3.26) приводит к следующей системе двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно производных от неизвестных функций $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_{11} + C_2'(x)\, y_{12} = f_1(x), \\ C_1'(x)\, y_{21} + C_2'(x)\, y_{22} = f_2(x). \end{cases} \qquad (3.29)$$

Разрешая систему (3.29) по формулам Крамера, получим два дифференциальных уравнения первого порядка

$$C_1'(x) = \frac{f_1 y_{22} - f_2 y_{12}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}, \quad C_2'(x) = \frac{f_2 y_{11} - f_1 y_{21}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}. \qquad (3.30)$$

Интегрируя эти уравнения, находим варьируемые функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ и подставляем их в (3.28). Общее решение системы (3.26) запишется в виде

$$y_1 = y_{10} + y_{1*},$$
$$y_2 = y_{20} + y_2.$$

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2 + x, \\ y' = -2y_1 - y_2 + 3x. \end{cases} \qquad (3.31)$$

Решение. Общее решение однородной системы, согласно (3.25), имеет вид

$$y_{10} = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{-3x},$$
$$y_{20} = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} = 2C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{-3x}. \qquad (3.32)$$

Принимаем частное решение системы (3.31) в виде

$$y_{1*} = C_1(x)\, e^{-2x} + C_2(x)\, e^{-3x},$$
$$y_{2*} = 2C_1(x)\, e^{-2x} + C_2(x)\, e^{-3x}. \qquad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в (3.31), получим

$$\begin{cases} C_1'(x)\, e^{-2x} + C_2'(x)\, e^{-3x} = x, \\ 2C_1'(x)\, e^{-2x} + C_2'(x)\, e^{-3x} = 3x. \end{cases}$$

Решение этой системы приводит к дифференциальным уравнениям первого порядка с разделяющимися переменными:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & e^{-3x} \\ 3x & e^{-3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ 2e^{-2x} & e^{-3x} \end{vmatrix}} = 2xe^{2x}, \quad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & x \\ 2e^{-2x} & 3x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ 2e^{-2x} & e^{-3x} \end{vmatrix}} = -xe^{3x}.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$C_1(x) = 2\int xe^{2x}dx = e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right), \;\; C_2(x) = -\int xe^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3}\left(\frac{1}{3} - x\right).$$

Поэтому

$$y_{1*} = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-3x} = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - x\right) = \frac{2x}{3} - \frac{7}{18},$$

$$y_{2*} = 2C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-3x} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - x\right) = \frac{5x}{3} - \frac{8}{9}.$$

Общее решение системы запишется в виде:

$$y_1 = y_{10} + y_{1*} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \frac{2x}{3} - \frac{7}{18},$$

$$y_2 = y_{20} + y_{2*} = 2C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{-3x} + \frac{5x}{3} - \frac{8}{9}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО – ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Вариант № 1

Решить уравнения:

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$,

2. $xy' = (3y^3 + 2yx^2)/(2y^2 + x^2)$,

3. $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0.$

4. Решить задачу Коши: $y' + ytgx = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2$.

Решить уравнения:

5. $y'''ctg2x + 2y'' = 0$.

6. $3y'''' + y''' = 6x - 1$,

7. $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 3\cos 3x$,

8. $y'' + 9y = 9/\cos 3x$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$, $y(0) = 0$, $y(\pi/6) = 1$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

11. Решить уравнение $y'' - x^2y = x + 1$.

12. Решить систему уравнений: $\begin{cases} y' = 4y - z + e^{3x}, \\ z' = y + 2z + \cos x. \end{cases}$

Вариант № 2

Решить уравнения:

1. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$,

2. $xy' = (3y^3 + 10yx^2)/(2y^2 + 5x^2)$

3. $(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0.$

4. Решить задачу Коши: $y' + 2xy = -2x^3$, $y(1) = 1/e$.

5. Решить уравнение $y''cthx - y' + \dfrac{1}{chx} = 0$.

Решить уравнения:

6. $y''' - y'' = 6x + 5$,

7. $y''' - 16y' = e^{2x} + 3\cos 2x - \sin x$,

8. $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1 + e^{-2x})$.

9. Решить краевую задачу: $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$,

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{10}\right) = 10.$$

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

11. Решить уравнение $y'' - xy' - 2y = 1$

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = z + 2e^x, \\ z' = y + x^2. \end{cases}$

Вариант № 3

Решить уравнения:

1. $x\sqrt{3 + y^2}dx + y\sqrt{2 + x^2}dy = 0$,

2. $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$,

3. $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0.$

4. Решить задачу Коши: $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$, $y(0) = 1$.

5. Решить уравнение $(x+1)y''' + y'' = x + 1$.

Решить уравнения:

6. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$,

7. $y'' + 3y' = 2sh3x + 2\sin x$,

8. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$, $y(0) = 1$,

$$y(\pi/4) = 0.$$

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

11. Решить уравнение $y'' - x^2 y = 0$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 2z - y - 5e^x \sin x. \end{cases}$

Вариант № 4

Решить уравнения:

1. $\sqrt{5 + y^2} + y'y\sqrt{1 - x^2} = 0$,

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$,

3. $\dfrac{y}{x^2}\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)dx - \left[\dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + 2y\right]dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.

5. Решить уравнение $y''' cth 2x = 2y''$.

Решить уравнения:

6. $y^V - y^{IV} = 2x + 3$,

7. $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$,

8. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$,
$y(0) = 0$, $y(\pi/8) = 1$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = y(\pi)$.

11. Решить задачу Коши: $y' = x + y^{-1}$, $y(0) = 1$.
Учесть пять членов разложения.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = 3y + 2z + 4e^{5x}, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

Вариант № 5

Решить уравнения:

1. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$,

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x^2}+4\dfrac{y}{x}+2$,

3. $(y^2+y\sec^2 x)\,dx+(2xy+tgx)\,dy=0$.

4. Решить задачу Коши: $y'+y\cos x=\sin 2x$, $y(0)=0$.

5. Решить уравнение $x^2y''+xy'=1$,

Решить уравнения:

6. $y^{V}-2y^{IV}=2x+3$,

7. $y''+16y=16\cos 4x-16e^{4x}$,

8. $y''+9y=\dfrac{9}{\sin 3x}$.

9. Решить краевую задачу: $y''+y=2\cos 3x-3\sin 3x$,

$y(0)=1$, $y(\pi/3)=0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y''+\lambda^2 y=0$, $y(0)=0$, $y(1)=0$.

11. Решить уравнение $y''-xy'+xy=0$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y_1'=2y_1+y_2+2e^x, \\ y_2'=y_1+2y_2-3e^{4x}. \end{cases}$

Вариант № 6

Решить уравнения:

1. $x\sqrt{4+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$,

2. $3\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{8y}{x}+4$,

3. $e^y dx+(\cos y+xe^y)\,dy=0$.

4. Решить задачу Коши: $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=x^2+1$, $y(1)=3$.

5. Решить уравнение $y'''tg5x = 5y''$,

Решить уравнения:

6. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$,

7. $y'' + 5y' = 50\,sh\,5x - \cos 2x$,

8. $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' - 4y' + 8y = e^x(2\sin x - \cos x)$,
$y(0) = 1, \quad y(\pi/8) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(\alpha) = 0, \quad y(b) = 0$.

11. Решить задачу Коши: $y'' = y'^2 - xy^3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$ Учесть 5 членов разложения.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = 4y + z + e^{2x}, \\ z' = z - 2y. \end{cases}$

Вариант № 7

Решить уравнения:

1. $\sqrt{3 + y^2}dx - y\,dy = x^2 y\,dy$,

2. $x\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$,

3. $(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0$

4. Решить задачу Коши: $y' - y\dfrac{2x - 5}{x^2} = 5, \quad y(2) = 4$.

5. Решить уравнение $x^5 y''' + x^4 y'' = 1$,

Решить уравнения:

6. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$,

7. $y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 5e^{5x}$,

8. $y'' - 3y' + 2y = 1/(3 + e^{-x})$.

9. Решить краевую задачу: $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$,
$y(0) = 1, \quad y = (\pi/12) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y

задачи: $y'' + 2\lambda y' + 5\lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(l) = 0$.

11. Решить уравнение $(1-x)y'' - 4xy' - 2y = 0$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y + 2e^x. \end{cases}$

Вариант № 8

Решить уравнения:

1. $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$,

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y}{2x-y}$,

3. $\left(\dfrac{1}{x^2} + 3\dfrac{y^2}{x^4}\right)dx - \dfrac{2y}{x^3}dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' + \dfrac{2xy}{1+x^2} = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = \dfrac{2}{3}$.

5. Решить уравнение $tgx\ y''' = 2y''$,

Решить уравнения:

6. $y'''' + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$,

7. $y'' - 3y' = 2\,ch3x - \sin 3x$,

8. $y'' + y = 8\,ctgx.$

9. Решить краевую задачу: $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$, $y(0) = 1$,
$y(\pi/6) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + 2\lambda y' + 5\lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(l) = 0.$

11. Решить задачу Коши: $y' = y^2 - x$, $y(0) = 1$. Учесть пять членов разложения в степенной ряд.

12 Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = y + z + 5e^{-x}. \end{cases}$

Вариант № 9

Решить уравнения:

1. $6x\,dx - 6y\,dy = 3x^2 y\,dy - 2xy^2 dx$,

2. $x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$,

3. $\dfrac{dx}{y}-(x+y^2)\dfrac{dy}{y^2}=0$.

4. Решить задачу Коши: $y'+\dfrac{y}{x}=e^x\dfrac{x+1}{x}$, $y(1)=e$.

5. Решить уравнение $x\,y'''-y''+\dfrac{1}{x}=0$,

Решить уравнения:

6. $y''''-3y'''+3y''-y'=x-3$,

7. $y''+49y=14\sin 7x+2\cos x+3e^{2x}$,

8. $y''+y/4=0{,}25\,ctg\,(x/2)$.

9. Решить краевую задачу: $y''+2y'=6e^x\sin 2x$,
$y(0)=0$, $y(\pi/4)=1$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y''-2\lambda y'+5\lambda^2 y=0$, $y'(0)=0$, $y(l)=0$.

11. Решить уравнение $y''-x^2y=x^2$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y'=2y-3z, \\ z'=y-2z+2\sin x. \end{cases}$

Вариант № 10

Решить уравнения:

1. $x\sqrt{5+y^2}\,dx+y\sqrt{4+x^2}\,dy=0$,

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}$,

3. $\dfrac{ydx}{x^2}-(xy+1)\dfrac{dy}{x}=0$.

4. Решить задачу Коши: $y'+\dfrac{y}{2x}=x^2$, $y(1)=1$.

5. Решить уравнение $xy'''+y''+x=0$.

Решить уравнения:

6. $y^{IV}+2y'''+y''=12x^2-6x$,

7. $y'''-36y'=6e^{6x}-3\cos 2x$,

8. $y''-3y'+2y=1/(2+e^{-x})$.

9. Решить краевую задачу: $y''-4y'+8y=e^x(\sin x-2\cos x)$,
$y(0)=0, \quad y(\pi/6)=1$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y''+9\lambda^2 y=0$, $y'(0)=0$, $y'(1)=0$.

11. Решить уравнение $y''-xy'+y=2$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y'=y+2z, \\ z'=y-5\sin x. \end{cases}$

Вариант № 11

Решить уравнения:

1. $y(4+e^x)dy-e^x dx=0$,

2. $x\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{2x^2+y^2}+y$,

3. $\left(xe^x+\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\dfrac{dy}{x}=0$.

4. Решить задачу Коши: $y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{12}{x^3}$, $y(1)=4$.

5. Решить уравнение $tgx\cdot y''=y'$.

Решить уравнения:

6. $y'''-4y''=32-384x^2$,

7. $y''+4y'=16sh4x+3\cos 4x$,

8. $y''+3y'+2y=e^{-x}/(2+e^x)$.

9. Решить краевую задачу: $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 5x$,
$y(0)=0, \quad y(\pi/3)=1$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y''+\lambda^2 y=0$, $y(0)=0$, $y'(\pi/2)=0$.

11. Решить уравнение $y''+y(x+1)=1$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y'=y+2z+16xe^x, \\ z'=2y-2z. \end{cases}$

Вариант № 12

Решить уравнения:

1. $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$,

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{6y}{x} + 6$,

3. $xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$, $y(1) = -\dfrac{5}{6}$.

5. Решить уравнение: $x\,y''' + y'' = \sqrt{x}$,

Решить уравнения:

6. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$,

7. $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x$,

8. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + y = 2\cos 7x$, $y(0) = 0$,
$y(\pi/12) = 1$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y'(0) = y(1)$, $y'(1) = y(0)$.

11. Решить уравнение $y'' + (x-1)y = x + 1$.

Решить системы уравнений:

20. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = z - 2y + 18x. \end{cases}$

Вариант № 13

Решить уравнения:

1. $2x\,dx - 2y\,dy = x^2y\,dy - 2xy^2dx$,

2. $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$,

3. $xy^2dx + y(x^2 + y)dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' + \dfrac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$.

5. Решить уравнение: $y'''tgx = y'' + 1$.

Решить уравнения:

6. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$,

7. $y''' + 49y' = 14e^{7x} - 49\cos 7x$,

8. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$, $y(0) = 1$, $y(\pi/12) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = y(\pi)$, $y'(\pi) = 0$.

11. Решить уравнение $y'' - xy' + xy = 1$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = 2y - 4z, \\ z' = y - 3z + e^x. \end{cases}$

Вариант № 14

Решить уравнения:

1. $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$,

2. $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$,

3. $\dfrac{1+xy}{x^2 y}dx + \dfrac{1-xy}{xy^2}dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$.

5. Решить уравнение: $(1+\sin x)y''' = y''\cos x$.

Решить уравнения:

6. $7y''' - y'' = 12x$,

7. $y'' + 64y = \sin 8x - e^{8x}$,

8. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$, $y(0) = 1$, $y(\pi/12) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' - 6\lambda y' + 10\lambda^2 y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(l) = 0$.

11. Решить уравнение $y'' + 3xy' - y = 2$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 4y_2 - 8x, \\ y_2' = 3y_1 + 6y_2. \end{cases}$

Вариант № 15

Решить уравнения:

1. $(e^{2x} + 5)\,dy - ye^{2x}dx = 0$,

2. $x\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$,

3. $(y^3 + \cos x)\,dx + (3xy^2 + e^y)\,dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y(1) = 1$.

5. Решить уравнение: $y''' \cdot th7x = 7y''$.

Решить уравнения:

6. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$,

7. $y''' - 25y' = 4\sin 2x - 10e^x$,

8. $y'' + 4y = 4ctg\,2x$

9. Решить краевую задачу: $y'' + 2y' = 3e^x \sin x$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y'(0) = y(0)$, $y'(1) = y(0)$.

11. Решить уравнение $y'' - xy' - 4y = 0$.

1**2.** Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = 2y + z + e^x, \\ z' = -2y + 2x. \end{cases}$

Вариант № 16

Решить уравнения:

1. $\sqrt{4 + y^2}dx - ydy = x^2 ydy$,

2. $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{8y}{x} + 8$,

3. $xe^{y^2}dx + (x^2 ye^{y^2} + tgy)dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3y}{x}$, $y(1) = 1$.

5. Решить уравнение $x^2 y''' + xy'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Решить уравнения:

6. $y'''' + y''' = x$,

7. $y'' + 25y = 2\cos 5x - \sin 5x + e^{5x}$,

8. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{(3 + e^{-x})}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + 2y' + 5y = -3\sin 2x$, $y(0) = 1$, $y(\pi/8) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(b) = y(b)$.

11. Решить уравнение $y'' - xy' - 4y = 0$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = 4y - 3z + \sin x, \\ z' = 2y - z - \cos x. \end{cases}$

Вариант № 17

Решить уравнения:

1. $6xdx - 6ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$,

2. $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{6y}{x} + 3$,

3. $\left(y + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dx + \left(x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

5. Решить уравнение $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$.

Решить уравнения:

6. $y'''' + 4y''' + 4y'' = x - x^2$,

7. $y''' - 16y' = e^{2x} + 3\cos 2x - \sin x$,

8. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$,
$y(0) = 1$, $y(\pi/5) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(b) = y(0) + y(b)$.

11. Решить уравнение $y'' + xy' - 2y = 1$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y_1' = 2y_2 - y_1 + x, \\ y_2' = 3y_2 - 2y_1 + e^{-x}. \end{cases}$

Вариант № 18

Решить уравнения:

1. $y \ln y + x\dfrac{dy}{dx} = 0$,

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$,

3. $\left[\sin(x + y^2) + \sin x\right]dx + 2y\sin(x + y^2)\,dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' + \dfrac{xy}{2(1 - x^2)} = \dfrac{x}{2}$, $y(0) = \dfrac{2}{3}$.

5. Решить уравнение $xy''' + 2y'' = 0$.

Решить уравнения:

6. $y'''' + 2y''' + y'' = 4x^2$,

7. $y'' + 2y' = 2sh2x + 3\sin x$,

8. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$, $y(0) = 0$,
$y(\pi/10) = 1$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y'(0) = y'(\pi)$, $y(\pi) = 0$.

11. Решить задачу Коши: $y'' + xy = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = y - z + 8x, \\ z' = 5y - z - 2e^{2x}. \end{cases}$

Вариант № 19

Решить уравнения:

1. $(1+e^x)\dfrac{dy}{dx} = ye^x$,

2. $x\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{2x^2+y^2}+y$,

3. $\left(xy^2+\dfrac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\dfrac{x^2}{y^3}\right)dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y'+xy=-x^3$, $y(0)=3$.

5. Решить уравнение $x^4y''+x^3y'=1$.

Решить уравнения:

6. $y'''+y''=5x^2-1$,

7. $y''+36y=e^{6x}+2\sin 6x$,

8. $y''+\pi^2 y=\dfrac{\pi^2}{\cos\pi x}$.

9. Решить краевую задачу: $y''+y=2\cos 5x+3\sin 5x$, $y(0)=1$, $y(\pi/5)=0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y''+\lambda^2 y=0$, $y'(0)=0$, $y'(1)=0$.

11. Решить уравнение $y''-(4x-2)y'+2y=e^x$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y'=2y-4z+e^{-2x}, \\ z'=2y-2z. \end{cases}$

Вариант № 20

Решить уравнения:

1. $\sqrt{1-x^2}\dfrac{dy}{dx}+xy^2+x=0$,

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{8y}{x}+12$,

3. $[\sin 2x-2\cos(x+y)]dx-2\cos(x+y)\,dy=0$.

4. Решить задачу Коши: $y'-\dfrac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2$, $y(0)=1$.

5. Решить уравнение $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$,

Решить уравнения:

6. $y'''' + 4y''' + 4y'' = x - x^2$,

7. $y'' - 2y' = 2ch2x + \sin 3x$,

8. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + 2y' + 5y = -3\sin 2x$, $y(0) = 1$,
$y(\pi / 12) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi / 2) = 0$.

11. Решить уравнение $y'' - xy' + xy = 2$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = z - 5\cos x, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$

Вариант № 21

Решить уравнения:

1. $6xdx - 2ydy = 2yx^2 dy - 3xy^2 dx$,

2. $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$,

3. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$, $y(0) = 1$.

5. Решить уравнение $tgx \cdot y''' = 2y''$.

Решить уравнения:

6. $7y''' - y'' = 12x$,

7. $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x$,

8. $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x)$,
$y(0) = 0$, $y(\pi / 2) = 1$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y'(0) = y(1)$, $y'(1) = y(0)$.

11. Решить задачу Коши: $y' = y + xe^{y}$, $y(0) = 0$. Учесть пять членов разложения.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = z + \sin^2 2x - 1, \\ z' = -y + \sin 2x. \end{cases}$

Вариант № 22

Решить уравнения:

1. $y(1 + \ln y) + x\dfrac{dy}{dx} = 0$,

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$,

3. $[\sin 2x - 2cos(x + y)]dx - 2\cos(x + y)dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$.

5. Решить уравнение $y''' + ch2x = 2y''$.

Решить уравнения:

6. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$,

7. $y''' - y' = 2e^{x} + \cos x$,

8. $y'' + 4y = 4ctg2x$.

9. Решить краевую задачу: $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$, $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(a) = y(0)$.

11. Решить задачу Коши: $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$. Учесть пять членов разложения.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = 2z - x, \\ z' = 4z - 3y + x^2. \end{cases}$

Вариант № 23

Решить уравнения:

1. $(3 + e^{x})y\dfrac{dy}{dx} = e^{x}$,

2. $x\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$,

3. $\left(xy^2 + \dfrac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2 y - \dfrac{x^2}{y^3}\right)dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^3 + 2x$, $y(-1) = -3/2$.

5. Решить уравнение $x^4 y'' + x^3 y' = 1$,

Решить уравнения:

6. $y''' + 3y'' + 2y' = -x^2$,

7. $y'' - 2y = sh2x - 3\cos 2x$,

8. $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$,
$y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' - 2\lambda y' + 2\lambda^2 y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(l) = 0$.

11. Решить задачу Коши: $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = 1$. Учесть пять членов разложения.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 2y_1 - y_2 + x. \end{cases}$

Вариант № 24

Решить уравнения:

1. $\sqrt{3 + y^2} + \sqrt{1 - x^2}\, y\dfrac{dy}{dx} = 0$,

2. $4\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{10y}{x} + 5$,

3. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx - \dfrac{2y\,dy}{x^3} = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$, $y(0) = 1$.

5. Решить уравнение $x\,y''' + 2y'' = 0$,

Решить уравнения:

6. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$,

7. $y'' + 4y = 2\sin 2x + \cos 2x + 4e^{2x}$,

8. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + y' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$,
$y(0) = 0, \quad y(\pi/7) = 1$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = y'(0) + y(1)$.

11. Решить задачу Коши: $y'' = xy' - y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$. Учесть пять членов разложения.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = -4y - 2z + 2, \\ z' = 6y + 3z - 3(e^x - 1). \end{cases}$

Вариант № 25

Решить уравнения:

1. $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$,

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$,

3. $y\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dx}{x^2} - \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} + 2y\right)dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x, \quad y(\pi/2) = 1$.

5. Решить уравнение $y'''x\ln x = y''$.

Решить уравнения:

6. $y''' - y' = x^2 + x$,

7. $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^x$,

8. $y'' + \dfrac{y}{\pi^2} = \dfrac{1}{\pi^2\cos(x/\pi)}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$,
$y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y

задачи: $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

11. Найти решение задачи Коши: $y'' = (y')^2 + xy$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$. Учесть пять членов разложения.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + \cos x, \\ y_2' = 2y_1' - y_2. \end{cases}$

Вариант № 26

Решить уравнения:

1. $\sqrt{4 + y^2}dx - ydy = x^2 ydy$,

2. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$,

3. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $y' + y/x = \sin x$, $y(\pi) = 1/\pi$.

5. Решить уравнение $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$,

Решить уравнения:

6. $y'''' - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$,

7. $y'' - 4y' = 16ch4x, +2\sin 3x$

8. $y'' - 3y' = 9\dfrac{e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$.

9. Решить краевую задачу:
$y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$, $y(0) = 0$, $y(\pi/4) = 1$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + 2\lambda^2 y = 0$, $y'(0) = y(1)$, $y'(1) = 0$.

11. Решить уравнение $y'' + y\cos x = 0$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = 2z - y + 5x, \\ z' = 4z - 3y + x^2. \end{cases}$

Вариант № 27

Решить уравнения:

1. $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$,

2. $2y' = y^2/x^2 + 6y/x + 3$,

3. $\left[3x^2+\dfrac{2\cos(2x/y)}{y}\right]dx-\dfrac{2x\cdot\cos(2x/y)}{y^2}dy=0,\ .$

4. Решить задачу Коши: $y'+y/2x=x^2,\quad y(1)=1.$

5. Решить уравнение $2xy'''=y''.$

Решить уравнения:

6. $y''''-y'''=5(x+2)^2,$

7. $y''+9y=-\sin 3x-6e^{3x},$

8. $y''+y=4ctgx.$

9. Решить краевую задачу: $y''+2y'=e^x(\sin x+\cos x),$
$y(0)=0,\quad y(\pi/2)=1.$

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y''+\lambda^2y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(1)=y(1).$

11. Решить уравнение $y''-xy'-2y=0.$

12. Решить систему уравнений $\begin{cases}y'=4y-3z+\sin x,\\ z'=2y-z.\end{cases}$

Вариант № 28

Решить уравнения:

1. $\sin x\,dx/(1+\cos y)=\cos^2 x(1-\cos y)dy,$

2. $(2y^2x+x^3)dy=(2yx^2+3y^3)dx,$

3. $(y/x+\sin x)dx+(\ln x+\cos y)dy=0.$

4. Решить задачу Коши: $y'x+2y=-x^2,\quad y(1)=2.$

5. Решить уравнение $(tg2x)y''=y'.$

Решить уравнения:

6. $y'''+2y''+y'=x^2-1,$

7. $y''-64y=\sin 8x-e^{3x},$

8. $y''-y=\dfrac{e^x}{e^x+1}.$

9. Решить краевую задачу: $y''+4y=\cos 2x,\quad y(0)=1,\quad y(1)=2.$

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y''+\lambda^2y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(l)=0.$

11. Решить уравнение $y''+xy'+y=1,$

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = z + 4\sin x, \\ z' = 3y + z. \end{cases}$

Вариант № 29

Решить уравнения:

1. $cosx\,dx/(1-\sin y) = \sin^3 x(1+\sin y)\,dy$,

2. $(5x^3 + 2y^2x)\,dy - (3y^3 + 10x^2y)\,dx = 0$,

3. $[\sin(x+y) - x^2]dx + [\sin(x+y) + y]dy = 0$.

4. Решить задачу Коши: $ctgx\,y' + y = \cos^2 x$, $y(\pi/4) = 1/4$.

5. Решить уравнение: $y'' + y' = x.$

Решить уравнения:

6. $y''' - 2y'' = 8x^2$,

7. $y''' - 25y' = \sin 2x - e^{6x}$,

8. $y'' + 2y' + y = e^{-x}/x$.

9. Решить краевую задачу: $y'' + 2y' = x^2 - 1$, $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + 10\lambda y' + 26\lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(l) = 0$.

11. Решить уравнение $y'' + 2xy' + y = x - 1$,

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + 4x, \\ y_2' = 2y_1 - y_2. \end{cases}$

Вариант № 30

Решить уравнения:

1. $(1+cosx)\sqrt{\sin y + 1}\,dx = \cos y dy/(1+\cos x)$,

2. $(x^2 + xy)dy - (2xy + y^2)dx = 0$,

3. $(e^y + 1)dx + (\sin y + xe^y)dy = 0$,

4. Решить задачу Коши: $x\,y' - y = -\ln x$, $y(2) = 1$.

5. Решить уравнение $y''' - (ctgx)y'' = ctgx$.

Решить уравнения:

6. $y'' + 4y' = 2x^2$,

7. $y'' - 4y' = e^{2x} + \cos 2x - \sin x$,

8. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

9. Решить краевую задачу: $y'' - 6y' + 5y = e^{5x}(x + 1)$, $y(0) = 1$,
$y(1) = 1$.

10. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи: $y'' + 12\lambda y' + 40\lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

11. Решить уравнение $y'' + xy' + 2y = x^2$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} y_1' = y_2 - 2y_1 - x^2, \\ y_2' = 4y_1 + 3x. \end{cases}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вопросы для самопроверки

1. Формы записи обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
2. Теорема существования и единственности решения для дифференциального уравнения первого порядка.
3. Понятие общего и частного решений дифференциального уравнения первого порядка.
4. Понятие общего и частного интегралов дифференциального уравнения первого порядка.
5. Постановка задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
6. Геометрический смысл общего интеграла обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
7. Геометрический смысл обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
8. Определение изоклин дифференциального уравнения первого порядка, уравнение семейства изоклин.
9. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.
10. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
11. Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным, применяемые подстановки.
12. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
13. Метод вариации произвольной постоянной.
14. Метод произведений (Бернулли) решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
15. Уравнение Бернулли.
16. Уравнение в полных дифференциалах.
17. Формы записи дифференциальных уравнений n – го порядка.
18. Общее и частное решения дифференциального уравнения n – го порядка.
19. Постановка задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка.
20. Постановка краевой задачи для дифференциального уравнения n – го порядка.
21. Решение уравнения $y^{(n)} = f(x)$ методом понижения порядка.

22. Решение уравнения $y'' = f(x, y')$ методом понижения порядка.
23. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n – го порядка.
24. Понятие фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n – го порядка.
25. Построение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n – го порядка с постоянными коэффициентами.
26. Характеристическое уравнение, его связь с линейным однородным дифференциальным уравнением n – го порядка.
27. Вид частных линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n – го порядка в зависимости от вида корней характеристического уравнения.
28. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n – го порядка.
29. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения для правых частей вида $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$,

    $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x,\quad f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$
30. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных.
31. Постановка задачи на собственные значения для линейного однородного дифференциального уравнения 2 – го порядка.
32. Интегрирование дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом степенных рядов.
33. Системы дифференциальных уравнений. Понятие нормальной системы. Понятия общего и частного решений системы. Постановка задачи Коши для системы дифференциальных уравнений. Теорема о приведении дифференциального уравнения n-го порядка к нормальной системе. Метод исключения неизвестных.
34. Решение нормальной системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера. Характеристическое (вековое) уравнение.
35. Решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных.

Дополнительные задачи

Уравнения с разделяющимися переменными		
$y'y\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-y^2}$	$xy'+y=y^2$	$yy'=2x\sqrt{1-y^2}$
$xy'=y\ln y$	$yy'=\dfrac{\sqrt{5+y^2}}{1+x^2}$	$y'\sqrt{1-x^2}=\dfrac{\sqrt{5-y^2}}{y}$
$yy'=\dfrac{\sqrt{1+y^2}}{x^2-1}$	$xy'=y^2-1$	$\dfrac{e^x-1}{\cos^2 y}y'=e^x tgy$
$(y+x^2y)y'=\sqrt{3+y^2}$	$y'\sqrt{x^2+1}=x+xy^2$	$(y+y^3)y'=x+x^3$
$(x^2-1)y'=(y^3-y)x$	$e^x y'=y^2(1+e^x)$	$xy^2dx+dy=0$

Однородные уравнения		
$y'=\dfrac{x+3y}{x}$	$y'=\dfrac{x-2y}{x}$	$y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}$
$y'=\dfrac{y-2x}{x+y}$	$y'=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}$	$y'=\dfrac{y(x^2+y^2)}{x^3}$
$y'=\dfrac{y(x+y)}{x^2}$	$y'=\dfrac{y}{x}+e^{-y/x}$	$y'=\dfrac{xy}{4y^2+x^2}$
$y'=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$	$y'=\dfrac{y+\sqrt{y^2-4x^2}}{x}$	$y'+\dfrac{y^2+x^2}{xy}=0$
$y'=\dfrac{y}{x}-ctg\dfrac{y}{x}$	$y'=\dfrac{y}{x}+tg\dfrac{y}{x}$	$x\ln\dfrac{x}{y}dy-ydx=0$
Линейные уравнения первого порядка		
$y'-\dfrac{3y}{x}=x^3e^x$	$y'+\dfrac{y}{x}=\sin x$	$xy'+y=x^3+3x+2$
$y'+\dfrac{2x}{1+x^2}y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$	$y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^2$	$y'+\dfrac{x}{1-x^2}y=\arcsin x$
$2(xy'+y)=x^2$	$y'-3y=\cos x$	$y'+y\cdot tgx=\cos^2 x$
$y'-\dfrac{2x}{1+x^2}y=arctgx$	$y'-\dfrac{2}{x}y=x^2\sin x$	$y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{\ln x}{x}$
$y'-y=e^x\sin 5x$	$y'-y\cdot ctgx=tgx$	$y'+2xy=e^{-x^2}\sin x$

Уравнения, допускающие понижение порядка		
$y'' - y' ctgx = 0$	$(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$	$xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$(1+\sin x)y'' = y'\cos x$	$y'' ctg2x + 2y' = 0$	$y'' tgx - 2y' = 0$
$y'' + \frac{1}{x}y' = \frac{1}{x^2}$	$y'' - \frac{1}{x\ln x}y' = 0$	$y''' + \frac{1}{1-x}y'' = 0$
$y'' tg3x = 3y'$	$y'' + \frac{1}{x}y' - 1 = 0$	$xy''' - y'' = 0$
$y'' - \frac{1}{x}y' = x^2 - 1$	$y'' - \frac{4}{x}y' = x^3 - 1$	$y''' tgx - y'' = 1$
Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами		
$y'' + y' - 6y = 0$	$3y'' - 2y' - 8y = 0$	$y''' + 3y'' + 2y' = 0$
$y'' - 6y' + 13y = 0$	$y'' + 2y' + 5y = 0$	$y''' + 2y'' + 3y' = 0$
$y'' - 4y' + 4y = 0$	$y''' + 8y'' + 16y' = 0$	$y^{iV} - 6y'' + 9y = 0$
$y''' - 3y' - 2y = 0$	$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$	$y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$
$y''' + 6y'' + 12y' + 8 = 0$	$y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$	$y^{vi} + 2y^{v} + y^{iv} = 0$
$64y^{viii} + 48y^{vi} + 12y^{iv} + y'' = 0$	$y^{iv} - y = 0$	$y^{iv} + y = 0$
Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами		
$y'' - 5y' + 4y = 2x(1-x)$	$y'' - 5y' + 4y = 2e^{3x}$	$y'' - 5y' + 4y = 2\sin x$
$y'' + 2y' + y = 2 - 3x^2$	$y'' + 2y' + y = 5e^{-x}$	$y'' + 2y' + y = 5\cos x$
$y^{IV} + 2y''' + y'' = 2x^2 - 1$	$y'' - 10y' + 25y = xe^{5x}$	$y'' + 2y' + 5y = (x+1)e^{2x}$
$y''' - 5y'' + 7y' - 3y =$ $= (4x+5)e^x$	$y''' - 4y'' + 5y' - 2y =$ $= (16 - 12x)e^{-x}$	$y''' - 3y' + 2y =$ $= (4x+9)e^{2x}$
$y'' + 4y = \sin 2x$	$y'' + 9y = \cos 3x$	$y'' + y = x\cos 4x$
Решить задачу Коши		
$y'' - y' - 2y = -(1+2x)$, $y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$	$y'' + 4y' + 3y = 24e^{3x}$, $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$	$y'' - 3y' + 2y = 4x$, $y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$
$y'' + 8y' + 16y = \cos 4x$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$	$y'' - y' = 2 - 2x$, $y(0) = y'(0) = 1$	$y'' + 2y' + y = 2\cos x - \sin x$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
$y'' + y' = x^2 + 1$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$	$y'' - 3y' = 13\sin 2x$, $y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$	$y'' - 4y' + 3y = (x+2)e^x$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
Решить краевую задачу		

$y''-2y'=e^x(\sin x-\cos 2x)$, $y(0)=1,\quad y(\pi/2)=0.$	$y''+2y'+y=4e^{3x}$, $y(0)=1,\quad y(1)=0$.	$y''+6y'+10y=x-1$, $y(0)=0,\quad y(\pi/2)=1$
$y''-y'-2y=x^2$, $y(0)=0,\quad y(1)=0$	$y''+y=\cos x$, $y(0)=1,\ y(\pi/2)=0$	$y''-6y'+10y=3\sin x$, $y(0)=2,\quad y(\pi/2)=3.$
Указать вид частного решения с неопределенными коэффициентами		
$y'''-4y''+4y'=x^2\sin 2x$	$y''-2y'+5y=e^x\cos 2x$	$y''+3y'=(x^2+2)e^{-3x}$
$y''-y'-2y=4x\cos x+\sin x$	$y''+9y=x^2\cos 3x+$ $+2x\sin 3x$	$y''+y=x^2e^x\cos x$
$y''+y'+2y=x\cos x-2\sin x$	$2y''+y'+2y=x^2e^{-x}$	$4y''+y'-y=$ $=e^x\left[(x+1)\cos x+\sin x\right]$
$y''+2y'+4y=x^2\cos 2x$	$y''+2y'+3y=$ $=e^{-x}\cos\sqrt{2}x$	$y''-6y'+13y=$ $=xe^{3x}\sin 2x$
$y''+4y'+5y=e^{-2x}\sin x$	$3y''-2y'-y=xe^x\cos x$	$y''+6y'+13y=$ $=(x-2)e^{-3x}\cos 2x$
Решить методом вариации произвольных постоянных		
$y''+4y=ctg 2x$	$y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$	$y''-y'=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$
$y''+y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}$	$y''-2y'+y=-\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$
$y''+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{4\cos(x/2)}$	$y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$	$y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$
$y''+y=tgx$	$y''+y=tg^2x$	$y''-y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$
$y''+y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y''-y'=e^{2x}\sqrt{1+e^x}$	$y''-y'=e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$
Найти собственные значения и собственные функции задачи		
$y''+\lambda^2y=0$, $y(0)=y(2l)=0$	$y''+\lambda^2y=0$, $y'(0)=y(b)=0$	$y''+\lambda^2y=0$, $y(0)=y'(l)+y(0)=0$
$y''+\lambda^2y=0$, $y'(0)=y'(l)-y(l)=0$	$y''+\lambda^2y=0$, $y'(a)=y'(b)=0$	$y''+\lambda^2y=0,\ \ y'(0)=0$, $y'(1)=y(0)+y(1)$
$y''+\lambda^2y=0,\ y(0)=y(1)$, $y'(1)=y'(0)+y(1)$	$y''-6\lambda y'+10\lambda^2y=0$, $y(0)=y(1)=0$	$y''-6\lambda y'+10\lambda^2y=0$, $y(0)=y'(2\pi)=0$
$y''-6\lambda y'+10\lambda^2y=0$,	$y''+2\lambda y'+5\lambda^2y=0$,	$y''+2\lambda y'+5\lambda^2y=0$,

$y(0)=y'(\pi)+y(\pi)=0$	$y(0)=y(\pi)=0$	$y(0)=y(l)=0$
$y''-6\lambda y'+10\lambda^2 y=0,$ $y(0)=y(\pi)=0$	$y''+2\lambda y'+5\lambda^2 y=0,$ $y(0)=y(\pi/2)=0$	$y''+2\lambda y'+5\lambda^2 y=0,$ $y(0)=0,\ y(l)+y'(l)=0$
Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами		
$\begin{cases} y_1'=2y_1+y_2, \\ y_2'=7y_1+y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=6y_1-3y_2, \\ y_2'=-5y_1+8y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=2y_1+y_2, \\ y_2'=7y_1+y_2 \end{cases}$
$\begin{cases} y_1'=3y_1-y_2, \\ y_2'=y_1+y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=y_1+4y_2, \\ y_2'=-y_1-3y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=2y_1+4y_2, \\ y_2'=3y_1-2y_2 \end{cases}$
$\begin{cases} y_1'=5y_1+3y_2, \\ y_2'=3y_1-y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=-4y_1-2y_2, \\ y_2'=6y_1+3y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=y_1+y_2, \\ y_2'=2y_1-y_2 \end{cases}$
$\begin{cases} y_1'=-3y_1-y_2, \\ y_2'=y_1-y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=3y_1+y_2, \\ y_2'=6y_1+3y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=2y_1-3y_2, \\ y_2'=y_1+2y_2 \end{cases}$
$\begin{cases} y_1'=y_1-y_2, \\ y_2'=4y_1+4y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=y_1+2y_2, \\ y_2'=2y_1-2y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=y_1-3y_2, \\ y_2'=3y_1+3y_2 \end{cases}$
Системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами		
$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=-y_1+x^2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=2y_1+4y_2, \\ y_2'=-y_1-2y_2+1 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=-2y_2+3x^2, \\ y_2'=2y_1+4x \end{cases}$
$\begin{cases} y_1'=-0{,}5y_1, \\ y_2'=2y_1+3x \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=2y_1-3y_2+2x+1, \\ y_2'=y_1+y_2-x^2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=2y_2-y_1, \\ y_2'=3y_2-2y_1+x^2 \end{cases}$
$\begin{cases} y_1'=5y_1+2y_2+1, \\ y_2'=-4y_1-y_2-6 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=3y_1+5y_2+2e^{3x}, \\ y_2'=y_1+y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=-3y_1-y_2+\sin x, \\ y_2'=y_1-y_2+2\cos x \end{cases}$
$\begin{cases} y_1'=7y_1+9y_2, \\ y_2'=-4y_1-5y_2+2e^x \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'+3y_1+y_2=e^x, \\ y_2'-y_1+y_2=0 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=-2y_1+3y_2+\sin 2x, \\ y_2'=-2y_1-4y_2-3\cos 2x \end{cases}$
$\begin{cases} y_1'=y_1+4y_2+3x, \\ y_2'=y_2-3y_1 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'=y_1-y_2+xe^x, \\ y_2'=-8y_1+3y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_1'-y_2'=y_2+x, \\ 2y_1'+y_2'=y_1-2y_2 \end{cases}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ВАРИАНТЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ВАРИАНТ № 1

ЗАДАНИЕ № 1.

Общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2} = xdx$ имеет вид

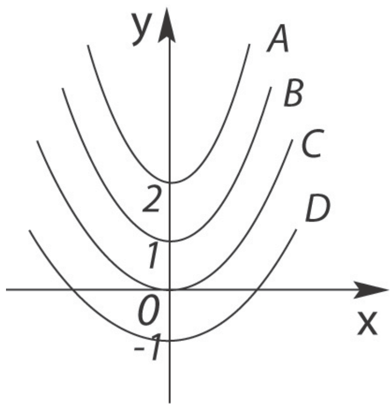
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$ 2) $-\frac{1}{y} = x^2 + C$ 3) $y = \frac{x^2}{2} + C$ 4) $\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$.

ЗАДАНИЕ № 2.

Укажите интегральную кривую решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $xy' = 2y$; $y(1) = 1$.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) D 2) C 3) A 4) B.



ЗАДАНИЕ № 3.

Дано дифференциальное уравнение третьего порядка $y''' = x + 2$. Тогда общее решение уравнения имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$ 2) $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$

3) $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$

4) $y = x^4 + x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

ЗАДАНИЕ № 4.

Решение задачи Коши $y'' = x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$ имеет вид
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = \frac{x^3}{6}$ 2) $y = \frac{x^3}{6} + 2x$ 3) $y = \frac{x^3}{6} + 2x + 1$ 4) $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 1$.

ЗАДАНИЕ № 5.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка $xy'' + y' = 0$, тогда его общее решение имеет вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 6.

Корни характеристического уравнения равны $k_1 = k_2 = 2i, k_3 = = k_4 = -2i.$ тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 7.

Известна фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения: $y_1 = 1,\quad y = x,\quad y_3 = x^2$. Тогда частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\quad y'(0) = 1,\quad y''(0) = 1,$ равно:
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $1 + x$ 2) $\frac{x^2}{2}$ 3) $x + \frac{x^2}{2}$ 4) $1 + x + \frac{x^2}{2}$.

ЗАДАНИЕ № 8.

Общее решение дифференциального уравнения $y''' + 9y' = 0$ имеет вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 9.

Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = x + 1$ по виду его правой части соответствует функция

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $y_* = Ax^2 + Bx$ 2) $y_* = Ae^{2x} + Be^{3x}$ 3) $y_* = e^{2x}(Ax + B)$ 4) $y_* = Ax + B$.

ЗАДАНИЕ № 10.

Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y'' - 5y' + 6y = \dfrac{e^{2x}}{1 - e^x}$. В каком виде следует искать частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных?

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 11.

Решение краевой задачи $y'' = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$ имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = x - 1$ 2) $y = x$ 3) $y = x + 1$ 4) $y = 3x + 1$.

ЗАДАНИЕ № 12.

Общее решение системы дифференциальных уравнений

$\begin{cases} y_1' = y_2 + 2, \\ y_2' = y_1 + 1 \end{cases}$ имеет вид:

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2 e^{-x}, \\ y_2 = -C_2 e^{-x} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1, \\ y_2 = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2 e^x, \\ y_2 = C_2 e^x - 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2 e^x - 1, \\ y_2 = C_2 e^x - 2. \end{cases}$

ВАРИАНТ № 2

ЗАДАНИЕ № 1.

Общий интеграл дифференциального уравнения $dy / y^3 = x^2 dx$ имеет вид

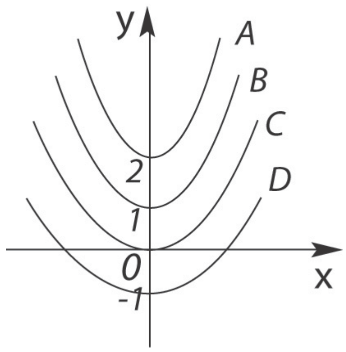
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $-\dfrac{1}{2y^2}=\dfrac{x^3}{3}+C$ 2) $\dfrac{1}{2y^2}=\dfrac{x^3}{3}+C$ 3) $\dfrac{1}{y^2}=x^3+C$ 4) $\dfrac{1}{y^4}=\dfrac{x^3}{3}+C$.

ЗАДАНИЕ № 2.

Укажите интегральную кривую решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $xy'=2(y-1)$; $y(1)=2$.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) D 2) C 3) A 4) B.



ЗАДАНИЕ № 3.

Дано дифференциальное уравнение третьего порядка $y'''=1-x$. Тогда общее решение уравнения имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{12}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$ 2) $y=x^3-6x^4+C_1x^2+C_2x+C_3$

3) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{12}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x$ 4) $y=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^4}{24}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$.

ЗАДАНИЕ № 4.

Решение задачи Коши $y''=x+1$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$ имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}$ 2) $y=\dfrac{x^3}{6}$ 3) $y=\dfrac{x^3}{6}+x^2$ 4) $y=\dfrac{x^3}{2}+x^2+1$.

ЗАДАНИЕ № 5.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка $xy''-y'=0$, тогда его общее решение имеет вид

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 6.

Корни характеристического уравнения равны $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 2$, тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения будет иметь вид

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 7.

Известна фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения: $y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2$. Тогда частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$, равно:

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $1 + x^2$ 2) $1 - x^2$ 3) $\dfrac{x^2}{2}$ 4) $1 + x - \dfrac{x^2}{2}$.

ЗАДАНИЕ № 8.

Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y''' + 9y' = 0$, тогда его общее решение имеет вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 9.

Частному решению уравнения $y'' + y' = e^x$ по виду его правой части соответствует функция:

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y_* = (Ax + B)e^x$ 2) $y_* = Axe^x$ 3) $y_* = Ae^x$ 4) $y_* = Ae^{-x}$.

ЗАДАНИЕ № 10.

Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y'' + y' = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$. В каком виде следует искать частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных ?

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 11.

Решение краевой задачи $y'' = 0, \quad 0 \le x \le 2, \quad y(0) = 2, \quad y(2) = 4$ имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = x - 2$ 2) $y = x + 2$ 3) $y = x - 4$ 4) $y = x + 4$.

ЗАДАНИЕ № 12.

Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = -2y_2, \\ y_2' = y_2 - y_1 \end{cases}$$ имеет вид:

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \\ y_2 = \frac{1}{2} C_1 e^{-x} - C_2 e^{2x} \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}, \\ y_2 = -C_2 e^{2x} \end{array}$

3) $\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}, \\ y_2 = \frac{1}{2} C_1 e^{-x} + \frac{1}{2} C_2 e^{-2x} \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}, \\ z = C_1 e^{-x} - \frac{1}{2} C_2 e^{x}. \end{array}$

ВАРИАНТ № 3

ЗАДАНИЕ № 1.

Общий интеграл дифференциального уравнения $dy / y = xdx$ имеет вид

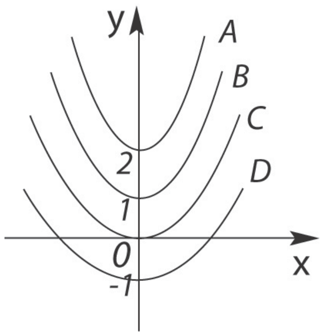
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = Ce^{x^2/2}$ 2) $y = \frac{x^2}{2} + C$ 3) $\frac{1}{y^2} = \frac{x^2}{2} + C$ 4) $y = Ce^{-x^2/2}$.

ЗАДАНИЕ № 2.

Укажите интегральную кривую решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $xy' = 2(y+1);\ y(1) = 2$.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) D 2) C 3) A 4) B



ЗАДАНИЕ № 3.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = x^2 - 1$. Тогда общее решение уравнения имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = -\dfrac{x^4}{12} + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2 x$ 2) $y = \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$

3) $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ 4) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$

ЗАДАНИЕ № 4.

Решение задачи Коши $y'' = x^2 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$ имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = \dfrac{x^4}{12} + 2$ 2) $y = \dfrac{x^4}{12} + 2x$ 3) $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{8}{3}x$ 4) $y = \dfrac{x^4}{6} + 2x.$

ЗАДАНИЕ № 5.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка $xy'' + 2y' = 0,$ тогда его общее решение имеет вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 6.

Корни характеристического уравнения равны $k_1 = k_2 = -4,\ k_3 = 2,$ $k_4 = 3;$ тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения будет иметь вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 7.

Известна фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения: $y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2.$ Тогда частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1,$ равно:

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\dfrac{1}{2}(1 + x^2)$ 2) $1 - x + \dfrac{1}{2}x^2$ 3) $1 - \dfrac{x^2}{2}$ 4) $1 + x + \dfrac{x^2}{2}.$

ЗАДАНИЕ № 8.

Дано линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y'' - 2y' + 5y = 0,$ тогда его общее решение имеет вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 9.

Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = xe^{-x}$ по виду его правой части соответствует функция

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y_* = (Ax^2 + Bx)e^{-x}$ 2) $y_* = Axe^{-x}$ 3) $y_* = (Ax + B)e^{-x}$

4) $y_* = Ae^{-x}$.

ЗАДАНИЕ № 10.

Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. В каком виде следует искать частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных ?

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 11.

Решение краевой задачи $y'' = x^2$, $(0 \le x \le 2)$, $y(0) = 1$, $y(2) = 0$ имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ 2) $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{1}{6}x + 1$ 3) $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{7}{6}x + 1$

4) $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{7}{6}x$.

ЗАДАНИЕ № 12.

Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = -6y_1 - 3y_2 \end{cases}$$ имеет вид:

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\begin{array}{l} y_1 = C_1 + C_2 e^{-x}, \\ y_2 = -2C_1 - 3C_2 e^{-x} \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = -3C_1 \cos x - 3C_2 \sin x \end{array}$

3) $\begin{array}{l} y_1 = C_1 + C_2 e^x, \\ y_2 = -2C_1 - C_2 e^x \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \\ y_2 = -C_1 e^x - 3C_2 e^{-x}. \end{array}$

ВАРИАНТ № 4

ЗАДАНИЕ № 1.

Общий интеграл дифференциального уравнения $dy / y^2 = xdx$ имеет вид

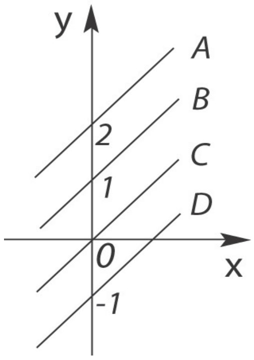
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $-\dfrac{1}{y} = \dfrac{x^2}{2} + C$ 2) $-\dfrac{1}{y} = x^2 + C$ 3) $y = \dfrac{x^2}{2} + C$ 4) $\dfrac{1}{y} = \dfrac{x^2}{2} + C$.

ЗАДАНИЕ № 2.

Укажите интегральную кривую решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $xy' = y + 1;$ $y(1) = 1.$

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) D 2) C 3) A 4) B



ЗАДАНИЕ № 3.

Дано дифференциальное уравнение третьего порядка $y''' = x - 1.$ Тогда общее решение уравнения имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = x^4 - x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

2) $y = \dfrac{1}{24} x^4 - \dfrac{1}{3} x^3 + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$

3) $y = \dfrac{1}{24} x^4 - \dfrac{1}{6} x^3 + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$

4) $y=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$

ЗАДАНИЕ № 4.

Решение задачи Коши $y''=1-x^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+1$ 2) $y=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+x+1$ 3) $y=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+x$

4) $y=x^2-x^4+1.$

ЗАДАНИЕ № 5.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка

$xy''-2y'=0,$ тогда его общее решение имеет вид

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 6.

Корни характеристического уравнения равны $k_1=k_2=k_3=3,$ $k_{4,5}=\pm3i.$ тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 7.

Известна фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения: $y_1=1,$ $y=x,$ $y_3=x^2.$ Тогда частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,$ $y'(0)=1,$ $y''(0)=-2,$ равно:

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $1-x^2$ 2) $0{,}5x^2$ 3) $x-0{,}5x^2$ 4) $1+x-0{,}5x^2$.

ЗАДАНИЕ № 8.

Общее решение дифференциального уравнения $y''+7y'+12y=0$ имеет вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 9.

Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$ по виду его правой части соответствует функция

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y_* = Axe^x$ 2) $y_* = Ae^x$ 3) $y_* = e^x(Ax+B)$ 4) $y_* = Ax + B$.

ЗАДАНИЕ № 10.

Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y'' + 7y' + 12y = \dfrac{e^{-3x}}{e^{-3x}+1}$. В каком виде следует искать частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных ?

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 11.

Решение краевой задачи $y'' = 1 - x^2,\ (0 \le x \le 2),\ \ y(0) = 0,\ \ y(2) = 0$ имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x}{3}$ 2) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x}{3}$

3) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{x}{3}$ 4) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{x}{2}$.

ЗАДАНИЕ № 12.

Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - y_1, \\ y_2' = 2y_1 \end{cases}$$ имеет вид:

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \\ y_2 = 3C_2 e^{2x} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{x} - C_2 e^{-2x}, \\ y_2 = 2C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} \end{cases}$

3) $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}, \\ y_2 = 2C_1 e^{x} - C_2 e^{-2x} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}, \\ y_2 = -C_2 e^{-2x}. \end{cases}$

ВАРИАНТ № 5

ЗАДАНИЕ № 1.

Общий интеграл дифференциального уравнения $y^2 dy = dx / x$

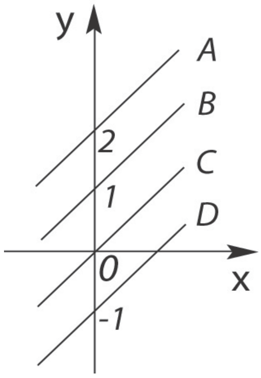
имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $\frac{y^3}{3} = \ln x + C$ 2) $\frac{y^3}{3} = -\frac{1}{x^2} + C$

3) $y^3 = \frac{3}{x} + C$ 4) $\frac{y^3}{3} = -\ln x + C.$

ЗАДАНИЕ № 2.

Укажите интегральную кривую решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $xy' = y - 1;$ $y(1) = 2.$



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) A 2) B 3) C 4) D.

ЗАДАНИЕ № 3.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = 3x^2 + 2$.
Тогда общее решение уравнения имеет вид
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = \frac{x^4}{4} + x^2 + C_1x + C_2$ 2) $y = \frac{1}{12}x^4 + x^3 + C_1x + C_2$

3) $y = \frac{x^4}{4} + 2x^2 + C_1x + C_2$ 4) $y = 6x^4 + 2x^2 + C_1x + C_2.$

ЗАДАНИЕ № 4.

Решение задачи Коши $y'' = x^2 - x,$ $y(0) = y'(0) = 1$ имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + x$ 2) $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + 1$

3) $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + x + 1$ 4) $y = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{3} + x + 1.$

ЗАДАНИЕ № 5.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка $2xy'' + y' = 0,$

тогда его общее решение имеет вид

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 6.

Корни характеристического уравнения равны $k_1 = k_2 = k_3 = -2$, $k_{4,5} = 3 \pm 2i.$ тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 7.

Известна фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения: $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2.$ Тогда частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -1,$ равно:

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $y = 1 + 2x - x^2$ 2) $y = 1 + 2x - 0{,}5x^2$ 3) $y = 1 - 2x + 0{,}5x^2$ 4) $y = 1 + x - 0{,}5x^2$.

ЗАДАНИЕ № 8.

Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$ имеет вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 9.

Частному решению линейного неоднородного уравнения $y'' - 5y' + 6y = 3xe^x$ по виду его правой части соответствует функция

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $y_* = (Ax + B)e^x$ 2) $y_* = Axe^x$ 3) $y_* = Ax + B$ 4) $y_* = (Ax^2 + Bx)e^x$.

ЗАДАНИЕ № 10.

Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{e^{3x}}{e^{3x} - 1}$. В каком виде следует искать частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных ?

Ответ	

ЗАДАНИЕ № 11.

Решение краевой задачи $y'' = x^2 - x, \quad 0 \le x \le 2, \quad y(0) = 1, \quad y(2) = 1$ имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + 1$ 2) $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - 1$

3) $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + 2$ 4) $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x + 1.$

ЗАДАНИЕ № 12.

Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$ имеет вид:

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\begin{cases} y_1 = C_1e^x + C_2xe^x, \\ y_2 = -C_1e^x - C_2xe^x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1 = C_1e^x + C_2xe^x, \\ y_2 = -C_1e^x + C_2e^x(1 - x) \end{cases}$

3) $\begin{cases} y_1 = C_1e^x + C_2e^x, \\ y_2 = -C_1e^x - C_2e^x \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y_1 = C_1e^x + C_2xe^x, \\ y_2 = -C_1e^x + C_2e^x(x + 1). \end{cases}$

ОТВЕТЫ

ВАРИАНТ 1

№ задания	Ответ (вариант ответа)
1	1
2	2
3	3
4	3
5	$y = C_1 \ln x + C_2$
6	$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x$
7	3
8	$y = C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$
9	4
10	$y_* = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{3x}$

11	3
12	2

ВАРИАНТ 2

№ задания	Вариант ответа
1	1
2	4
3	4
4	1
5	$y = C_1 x^2 / 2 + C_2$
6	$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x} + C_4 x^3 e^{2x}$
7	3
8	$C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$
9	3
10	$y = C_1(x) + C_2(x) e^{-x}$
11	2
12	1

ВАРИАНТ № 3

№ задания	Вариант ответа
1	1
2	1
3	3
4	2
5	$y = -C_1 / x + C_2$
6	$y = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{3x}.$
7	4
8	$y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x.$
9	3
10	$y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{2x}$
11	3
12	1

ВАРИАНТ № 4

№ задания	Вариант ответа
1	1
2	1
3	3
4	1
5	$y = C_1 x^3 / 3 + C_2$
6	$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 x^2 e^{3x} + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x$
7	1
8	$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}.$
9	2
10	$y = C_1(x) e^{-3x} + C_2(x) e^{-4x}.$
11	2
12	3

ВАРИАНТ № 5

№ задания	Вариант ответа
1	1
2	2
3	1
4	3
5	$y = 2C_1 \sqrt{x} + C_2$
6	$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + C_3 x^2 e^{-2x} +$ $+ C_4 e^{3x} \cos 2x + C_5 e^{3x} \sin 2x$
7	2
8	$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$
9	1
10	$y = C_1(x) e^{x} + C_2(x) e^{3x}$
11	1
12	2

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

СПРАВОЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Основные формулы и правила дифференцирования

$y = C \quad (C = const)$	$dy = 0$
$y = x^{\mu}$	$dy = \mu x^{\mu - 1} dx$
$y = \dfrac{1}{x}$	$dy = -\dfrac{dx}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$
$y = a^x$	$dy = a^x \ln a dx$
$y = e^x$	$dy = e^x dx$
$y = \log_a x$	$dy = \dfrac{\log_a e}{x} dx$
$y = \ln x$	$dy = \dfrac{dx}{x}$
$y = \sin x$	$dy = \cos x dx$
$y = \cos x$	$dy = -\sin x dx$
$y = tgx$	$dy = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$
$y = ctgx$	$dy = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \arccos x$	$dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = arctgx$	$dy = \dfrac{dx}{1 + x^2}$
$y = arcctgx$	$dy = -\dfrac{dx}{1 + x^2}$

Продолжение таблицы

$y = shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус	$dy = chxdx$
$y = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ - гиперболический косинус $(ch^2 x - sh^2 x = 1)$	$dy = shxdx$
$y = thx = \dfrac{shx}{chx}$ - гиперболический тангенс	$dy = \dfrac{dx}{ch^2 x}$
$y = cthx = \dfrac{chx}{shx}$ - гиперболический котангенс	$dy = -\dfrac{dx}{sh^2 x}$
Правила дифференцирования	
$d(cu) = c \cdot du, \quad (c = const)$	
$d(u \pm v) = du \pm dv$	
$d(uv) = vdu + udv$	
$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$	
Функции нескольких переменных.	
производная сложной функции $u = f[x(t), y(t), z(t)]$ трёх переменных $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}$	
полный дифференциал функции трёх переменных $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz$	

Таблица интегралов

1	$\int dx = x$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left\|x+\sqrt{1+x^2}\right\|$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left\|x+\sqrt{a^2+x^2}\right\|$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\|$	17	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$
4	$\int e^x dx = e^x$	18	$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} +$ $+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$
5	$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$	19	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
6	$\int a^x dx = \frac{e^x}{\ln a}$	20	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \quad \left(x^2 < a^2\right)$
7	$\int xe^x dx = e^x(x-1)$	21	$\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$
8	$\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln\frac{e^x}{1+e^x}$	22	$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$
9	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx$	23	$\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{(\ln x)^2}{2}$
10	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$	24	$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$
11	$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}arctg\frac{bx}{a}$	25	$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \frac{\ln^3 x}{3}$
12	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|$	26	$\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln\|\ln x\|$
13	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|$	27	$\int \cos x dx = \sin x$
14	$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left\|\frac{a+bx}{a-bx}\right\|$	28	$\int \sin x dx = -\cos x$

Продолжение таблицы

29	$\int \cos nxdx = \frac{\sin nx}{n}$	40	$\int x\sin xdx = \sin x - x\cos x$
30	$\int \sin nxdx = -\frac{\cos nx}{n}$	41	$\int x^2 \cos xdx = 2x\cos x + {}$ $+ (x^2-2)\cos x$
31	$\int tgxdx = -\ln\cos x$	42	$\int x^2 \sin xdx = 2x\sin x -{}$ $-(x^2-2)\cos x$
32	$\int ctgxdx = \ln\sin x$	43	$\int e^{ax}\cos nxdx =$ $= \frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(a\cos nx + n\sin nx)$
33	$\int \cos^2 xdx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$	44	$\int e^{ax}\sin nxdx =$ $= \frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(a\sin nx - n\cos nx)$
34	$\int \sin^2 xdx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$	45	$\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + {}$ $+\sqrt{a^2-x^2}$
35	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln tg\left\|\frac{x}{2}\right\| = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$	46	$\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - {}$ $-\sqrt{a^2-x^2}$
36	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln tg\left\|\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right\| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$	47	$\int shxdx = chx$
37	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx$	48	$\int chxdx = shx$
38	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx$	49	$\int thxdx = \ln chx$
39	$\int x\cos xdx = \cos x + x\sin x$	50	$\int cthxdx = \ln\|shx\|$

Примечание: для краткости записи произвольная постоянная C опущена.

Рекомендуемая литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. М.: Наука, 1985. 560 с.
2. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высшая школа, 1983. 128 с.
3. Бугров Л.С., Никольский С.Н. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.:Наука, 1989. 464 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.-Л.: Гос изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 220 с.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу. Для втузов. Под ред. Б.П.Демидовича. Изд. четвертое, испр. М.: Наука, 1964. 472 с.
6. Ахметшин А.А., Ишмухаметов А.З., Тюмнев Н.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Учебное пособие. М.: МАМИ, 2002. 144 с.
7. Коган Е.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и операционное исчисление. Гриф УМО вузов РФ по образованию в области транспортных машин и транспортно-технологических комплексов М.: МГТУ “МАМИ”. 2007. 140 с.
8. Коган Е.А., Корнейчук Л.Г., Юрченко АА. Сборник тестовых заданий по математике (Учебно - методическое пособие по дисциплине «Математика» для студентов всех специальностей и направлений подготовки дипломированных специалистов и бакалавров очного и очно-заочного отделений) М.: Университет машиностроения, 2012. 194 с.

Для заметок

Учебное пособие

Коган Ефим Александрович

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Учебное пособие по курсу «Математика» для студентов всех специальностей и направлений подготовки дипломированных специалистов и бакалавров заочного отделения

Оригинал – макет подготовлен редакционно – издательским отделом Университета машиностроения

По тематическому плану внутривузовских изданий учебной литературы на 2014 г.

Подписано в печать Формат 60 90 1/16. Бумага 80 г/м^2

Гарнитура «Таймс». Ризография. Усл. п.л.

Тираж 105 экз. Заказ №

ФГБОУ ВПО Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)

107023, г. Москва, Б. Семёновская ул., 38.