Вариант №3

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача линейного программирования

Решить задачу многокритериальной оптимизации методом ограничений:

Минимизировать: $f\_{1}\left(x\right)=x\_{1}+5x\_{2}$

Максимизировать: $f\_{2}\left(x\right)=3x\_{1}-5x\_{2}$

При ограничениях:

$$\begin{matrix}δ\_{1}:x\_{1}+2x\_{2}\geq 5\\δ\_{2}:3x\_{1}+x\_{2}\geq 14\\δ\_{3}:-3x\_{1}+5x\_{2}\leq 21\\δ\_{4}:5x\_{1}-x\_{2}\leq 23\\δ\_{5}:3x\_{1}-4x\_{2}\leq 7\\x\_{1},x\_{2}\geq 0\end{matrix}$$

Решение:

$$\begin{matrix}δ\_{1}:x\_{2}\geq \frac{5}{2}-\frac{x\_{1}}{2}\\δ\_{2}:x\_{2}\geq 14-3x\_{1}\\δ\_{3}:x\_{2}\leq \frac{21}{5}+\frac{3x\_{1}}{5}\\δ\_{4}:x\_{2}\geq 5x\_{1}-23\\δ\_{5}:x\_{2}\geq \frac{3x\_{1}}{4}-\frac{7}{4}\\x\_{1},x\_{2}\geq 0\end{matrix}$$

Найдём допустимое множество решений задачи (представлено на рис. 1 желтым многоугольником ABCD).

Координаты угловых точек (вершин) многоугольника следующие:

$$A=\left(2.7222;5.8333 \right); B=\left(6.1818;7.9091\right); C=\left(4.2;1.4\right); D=\left(5;2\right);$$



Рисунок 1- Допустимое множество решений

Значения критериев в данных точках представлены в таблице 1.

Таблица 1 Значения критериев

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Точка | $$f\_{1}\left(x\right)=x\_{1}+5x\_{2}$$ | $$f\_{2}\left(x\right)=3x\_{1}-5x\_{2}$$ |
|  | $$x\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ |  |  |
| A | 2,72222 | 5,83333 | 31,889 | -21 -min |
| B | 6,18182 | 7,90909 | 45,727 - max | -21 -min  |
| C | 4,2 | 1,4 | **11,2 -min** | **5,6 - max** |
| D | 5 | 2 | 15 | 5  |

2. Для каждого критерия f(x) найдём наилучшее и наихудшее решения и значения целевых функций в соответствующих точках симплекс - методом.

Получаем результат:

♦ Функция $f\_{1}\left(x\right)=x\_{1}+5x\_{2}$:

■ принимает наихудшее значение 45.727 в точке $B=\left(\frac{68}{11};\frac{87}{11}\right)$;

■ принимает **наилучшее** значение 11.2 в точке$ C=\left(4.2;1.4\right)$;

♦ Функция $f\_{2}\left(x\right)=3x\_{1}-5x\_{2}$:

■ принимает наихудшее значение -21 в точках $A=\left(\frac{49}{18};\frac{35}{6} \right) и B=\left(\frac{68}{11};\frac{87}{11}\right)$

■ принимает **наилучшее** значение 5.6 в точке$ C=\left(4.2;1.4\right)$.

Результат совпадает с значениями таблицы 1.

Точка C определяет эффективный план задачи. Убедимся в этом.

3. Рассмотрим случай, когда критерии равноценны, т.е. $ρ\_{1}=ρ\_{2}$, а будем искать компромиссное решение на множестве эффективных планов, обеспечивающее минимальные одинаковые относительные потери $k\_{0}=x\_{3}$ для обоих критериев.

Вычислим функции относительных потерь:

$$W\_{1}=0.65W\_{1}=0.65∙\frac{f\_{1}\left(x\right)-f\_{1}^{0}}{f\_{1 max }^{}-f\_{1}^{0}}=0.65∙\frac{x\_{1}+5x\_{2}-11.2}{45.727-11.2}=0.65∙\frac{x\_{1}+5x\_{2}-11.2}{34.527}$$

$$W\_{2}=0.35W\_{2}=0.35∙\frac{f\_{2}^{0}-f\_{2}\left(x\right)}{f\_{2}^{0}-f\_{2 min}^{}}=0.35∙\frac{5.6-3x\_{1}+5x\_{2}}{5.6+21}=0.35∙\frac{5.6-3x\_{1}+5x\_{2}}{26.6}$$

Запишем эквивалентную задачу линейного программирования для определения компромиссного решения:

Целевая функция: $x\_{3}\rightarrow min$

При условиях:

$$0.65∙\frac{x\_{1}+5x\_{2}-11.2}{34.527}\leq x\_{3}$$

$$0.35∙\frac{5.6-3x\_{1}+5x\_{2}}{26.6}\leq x\_{3}$$

$$\begin{matrix}x\_{1}+2x\_{2}\geq 5\\3x\_{1}+x\_{2}\geq 14\\-3x\_{1}+5x\_{2}\leq 21\\5x\_{1}-x\_{2}\leq 23\\3x\_{1}-4x\_{2}\leq 7\\x\_{1},x\_{2},x\_{3}\geq 0\end{matrix}$$

Или:

Целевая функция: $x\_{3}\rightarrow min$

При условиях:

$$x\_{1}+5x\_{2}-53.118x\_{3}\leq 11.2$$

$$-3x\_{1}+5x\_{2}-76x\_{3}\leq -5.6$$

$$\begin{matrix}x\_{1}+2x\_{2}\geq 5\\3x\_{1}+x\_{2}\geq 14\\-3x\_{1}+5x\_{2}\leq 21\\5x\_{1}-x\_{2}\leq 23\\3x\_{1}-4x\_{2}\leq 7\\x\_{1},x\_{2},x\_{3}\geq 0\end{matrix}$$

Решим данную задачу с помощью программы SimplexWin 3.1. Ввод исходных данных представлен на рисунке 2, полученный результат – на рисунках 3 и 4.



Рисунок 2- Ввод данных в программу SimplexWin 3.1



Рисунок 3 - Результат вычислений программы SimplexWin 3.1



Рисунок 4 - Конечный результат вычислений программы SimplexWin 3.1

Убеждаемся, что точка C определяет эффективный план задачи.

Ответ: $x^{0}=\left(4.2;1.4\right)$ - компромиссное решение ЗЛП

$$f\_{1}\left(x^{0}\right)=11.2$$

$$f\_{2}\left(x^{0}\right)=5.6$$

Относительные потери критериев при компромиссном решении

$$W\_{1}\left(f\_{1}\left(x^{0}\right)\right)=W\_{2}\left(f\_{2}\left(x^{0}\right)\right)=0$$

Т.е. в одной точке $x^{0}$ области допустимых решений достигается оптимум по обоим критериям.