

ЗАДАЧА №2

Расчет токов в цепях постоянного тока с несколькими источниками энергии

Режим любой цепи полностью характеризуется уравнениями, составленными на основании первого и второго законов Кирхгофа.

Для определения токов во всех ветвях необходимо составить и решить систему уравнений, количество которых равно числу ветвей.

Расчет разветвленной электрической схемы, содержащей несколько источников, можно проводить с помощью метода, использующего непосредственное применение законов Кирхгофа, метода контурных токов и метода узловых потенциалов.

Расчет цепей путем непосредственного применения законов Кирхгофа

Вначале выбирают и обозначают направления токов в ветвях. Затем упрощают схему цепи, заменяя эквивалентными резистивные элементы, соединенные последовательно или параллельно.

Для определения токов во всех ветвях эквивалентной схемы цепи составляется система независимых уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа.

По первому закону Кирхгофа составляют уравнения для всех узлов без одного, за который принимают узел с наибольшим числом сходящихся в нем токов.

По второму закону Кирхгофа составляют уравнения для внутренних контуров схемы цепи. Число таких уравнений равно: $k = \nu - y + 1$, где ν – число ветвей, y – число узлов цепи.

Пример №1

Задание. Определить токи во всех ветвях схемы рис.7.

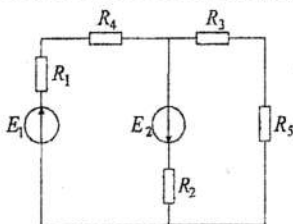


Рис. 7

Исходные данные:

$E_1 = 50 \text{ В}$; $E_2 = 30 \text{ В}$; $R_1 = 40 \text{ Ом}$; $R_2 = 30 \text{ Ом}$; $R_3 = 20 \text{ Ом}$; $R_4 = 50 \text{ Ом}$; $R_5 = 10 \text{ Ом}$;

Перед началом расчета заменим последовательно соединенные резисторы R_1 и R_4 эквивалентным R_{14} , а R_3 и R_5 — R_{35} (рис.8):

$$R_{14} = R_1 + R_4 = 40 + 50 = 90 \text{ Ом}; R_{35} = R_3 + R_5 = 20 + 10 = 30 \text{ Ом}.$$

Выберем направление токов в ветвях с источниками в сторону стрелки ЭДС, а в ветви R_{35} — произвольно. Направление обхода внутренних контуров можно выбирать произвольно, например, по часовой стрелке, как показано на рис.8.

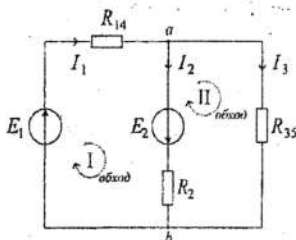


Рис. 8

В полученной таким образом цепи три ветви ($\sigma = 3$) и два узла ($\gamma = 2$).

По первому закону Кирхгофа составим одно уравнение ($\gamma - 1 = 2 - 1 = 1$), а по второму Закону Кирхгофа два уравнения ($\sigma - \gamma + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$):

для узла «a» (или для узла «b»)

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

для левого контура («I»)

$$I_1 \cdot R_{14} + I_2 \cdot R_2 = E_1 + E_2$$

для правого контура («II»)

$$I_3 \cdot R_{35} - I_2 \cdot R_2 = -E_2$$

Подставляя численные значения, получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} -I_1 + I_2 + I_3 &= 0, \\ 90I_1 + 30I_2 &= 80, \\ 30I_3 - 30I_2 &= -30. \end{aligned} \right\}$$

Решив систему уравнений, определим токи ветвей:

$$I_1 = 0,619 \text{ A};$$

$$I_2 = 0,809 \text{ A};$$

$$I_3 = -0,191 \text{ A}.$$

Ток I_3 получился отрицательным. Это говорит о том, что выбранное направление тока противоположно действительному.

Для проверки правильности расчетов составляют баланс мощностей для исходной цепи:

$$\text{мощность всех источников } E_1 I_1 + E_2 I_2 = 50 \cdot 0,619 + 30 \cdot 0,809 = 55,22 \text{ Вт.}$$

$$\begin{aligned} \text{мощность всех приемников } \sum_{k=1}^5 R_k \cdot I_{Rk}^2 &= 40 \cdot 0,619^2 + 30 \cdot 0,809^2 + 20 \cdot (-0,191)^2 + \\ &+ 50 \cdot 0,619^2 + 10 \cdot (-0,191)^2 = 55,22 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $I_4 = I_1$ и $I_5 = I_3$.

Мощности источников и приёмников одинаковы, баланс мощностей имеет место.

Расчет цепей методом контурных токов

При расчете методом контурных токов выбирают контурные токи в каждом независимом контуре, число которых равно числу уравнений по второму закону Кирхгофа. Направление контурного тока в контуре выбирается произвольно. Ток любой ветви равен контурному току, если эта ветвь входит в этот контур, или равен алгебраической сумме контурных токов, проходящих через эту ветвь, если ветвь входит в несколько контуров. Согласно второму закону Кирхгофа составляется система уравнений относительно контурных токов. Полученная система уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} R_{11} \cdot I_{1k} + R_{12} \cdot I_{2k} + \dots + R_{1N} \cdot I_{Nk} &= E_{11}; \\ R_{21} \cdot I_{1k} + R_{22} \cdot I_{2k} + \dots + R_{2N} \cdot I_{Nk} &= E_{22}; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ R_{N1} \cdot I_{1k} + R_{N2} \cdot I_{2k} + \dots + R_{NN} \cdot I_{Nk} &= E_{NN}, \end{aligned} \right\}$$

где $R_{11}, R_{22}, \dots, R_{NN}$ — собственные сопротивления 1-го, 2-го ..., N -го контура, равные сумме сопротивлений всех резистивных элементов, входящих в 1-й, 2-й, ..., N -й контур;

R_{12} и R_{21}, R_{13} и R_{31}, \dots, R_{1N} и R_{N1} — взаимные сопротивления первого и второго контуров, первого и третьего, ..., первого и N -го. Взаимные сопротивления равны сумме сопротивлений элементов, общих для обоих контуров и могут быть как отрицательными, так и положительными. Взаимные сопротивления положительны, если контурные токи в них направлены

одинаково, и отрицательны, если токи направлены навстречу друг другу. При этом $R_{12} = R_{21}$, $R_{13} = R_{31}$, ..., $R_{1N} = R_{N1}$.

E_{11} , E_{22} , ..., E_{NN} — контурные ЭДС соответственно 1-го, 2-го, ..., N -го контура, равные алгебраической сумме ЭДС источников, входящих в 1-й, 2-й, ..., N -й контур. Если в контуре имеются ЭДС, то в уравнение они включаются со знаком «+», если направление стрелки ЭДС совпадает с выбранным направлением контурного тока, и со знаком «-» если не совпадает.

Пример №2

Рассчитать токи в цепи рис. 8. Параметры элементов взять из примера №1.

В схеме цепи два внутренних контура. Примем в левом и правом контурах контурные токи I_{1k} и I_{2k} , например, по часовой стрелке (рис.9).

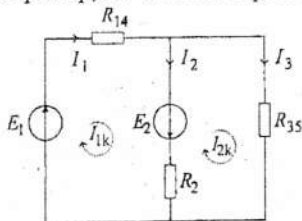


Рис. 9

Составим систему двух контурных уравнений. Для этого рассчитаем собственные и взаимные сопротивления, а также контурные ЭДС:

собственные сопротивления контуров

$$R_{(11)} = R_{14} + R_2 = 90 + 30 = 120 \text{ Ом};$$

$$R_{(22)} = R_2 + R_{35} = 30 + 30 = 60 \text{ Ом}.$$

взаимное сопротивление

в оба контура (первый и второй) входит резистивный элемент R_2 , поэтому

$$R_{(12)} = R_{(21)} = -R_2 = -30 \text{ Ом}.$$

взаимное сопротивление $R_{(12)}$ отрицательное, потому что в R_2 контурные токи I_{1k} и I_{2k} направлены навстречу друг другу

Контурные ЭДС

$$E_{(11)} = E_1 + E_2 = 50 + 30 = 80 \text{ В};$$

$$E_{(22)} = -E_2 = -30 \text{ В};$$

Во втором контуре контурный ток и E_2 не совпадают по направлению, поэтому взят знак «-».

Итак, система контурных уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} 120 \cdot I_{1k} - 30 \cdot I_{2k} &= 80, \\ -30 \cdot I_{1k} + 60 \cdot I_{2k} &= -30. \end{aligned} \right\}$$

Решая систему, получим

$$I_{1к} = 0,619 \text{ A},$$

$$I_{2к} = -0,191 \text{ A}.$$

Найденные значения контурных токов позволяют рассчитать истинные токи, протекающие через резистивные элементы цепи.

Поскольку в резисторе R_1 только один контурный ток $I_{1к}$, то

$$I_1 = I_{1к} = 0,619 \text{ A},$$

Так как в резисторе R_2 контурные токи $I_{1к}$ и $I_{2к}$ направлены противоположно друг другу, то ток I_2 определяется алгебраической суммой контурных токов.

$$I_2 = I_{1к} - I_{2к} = 0,619 + 0,191 = 0,81 \text{ A},$$

Здесь $I_{1к}$ взят со знаком «+» потому что его направление совпадает с выбранным заранее направлением тока I_2 , а $I_{2к}$ взят со знаком «-», потому что он направлен противоположно току I_2 .

В резисторе R_{35} только один контурный ток $I_{2к}$:

$$I_3 = I_{2к} = -0,191 \text{ A},$$

Как видно из сопоставления полученных результатов с результатами расчета токов по методу, использующему непосредственное применение законов Кирхгофа для той же схемы (пример №1), значения рассчитанных токов совпадают.

Метод узловых потенциалов

Пример №3

Для цепи рис. 8 по методу узловых потенциалов (двух узлов) вычисляются напряжение между узлами «а» и «б» (принимая потенциал точки «б» $\phi_b = 0$):

$$U_{ab} = \frac{\sum E_n \cdot \frac{1}{R_n}}{\sum \frac{1}{R_n}} = \frac{\frac{E_1}{R_{14}} - \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_{14}} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{35}}} = \frac{\frac{50}{90} - \frac{30}{30}}{\frac{1}{90} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30}} = -5,71 \text{ В}.$$

Зная напряжение между узлами, токи в ветвях определяют по закону Ома и второму закону Кирхгофа

$$\text{по закону Ома } I_3 = \frac{U_{ab}}{R_{35}} = \frac{-5,71}{30} = -0,190 \text{ A}.$$

по второму закону Кирхгофа $U_{ab} + I_1 \cdot R_{14} = E_1$, отсюда

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_{14}} = \frac{50 - (-5,71)}{90} = 0,619 \text{ A};$$

по второму закону Кирхгофа $U_{ab} - I_2 \cdot R_2 = -E_2$, отсюда

$$I_2 = \frac{E_2 + U_{ab}}{R_2} = \frac{30 - 5,71}{30} = 0,810 \text{ A.}$$

Потенциальная диаграмма

Пример №4

Потенциальной диаграммой называют график распределения потенциалов вдоль контура электрической цепи.

Потенциальную диаграмму строят следующим образом: по оси абсцисс откладывают в выбранном масштабе все сопротивления контура, встречающиеся при его последовательном обходе, по оси ординат откладывают потенциалы соответствующих точек.

Построим потенциальную диаграмму для контура б-г-д-а-в-б рис.10. Токи элементов рассчитаны в примере №2.

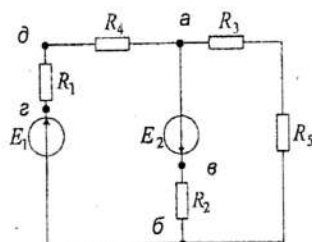


Рис.10

Потенциал узла «б»:

$$\varphi_b = 0$$

Потенциал узла «г»:

$$\varphi_g = \varphi_b + E_1 = 50 \text{ В;}$$

Потенциал узла «д»:

$$\varphi_d = \varphi_g - I_1 \cdot R_1 = 50 - 24,76 = 25,24 \text{ В;}$$

Потенциал узла «а»:

$$\varphi_a = \varphi_d - I_1 \cdot R_4 = 25,24 - 30,95 = -5,71 \text{ В;}$$

Потенциал узла «в»:

$$\varphi_v = \varphi_a + E_2 = -5,71 + 30 = 24,29 \text{ В;}$$

Потенциал узла «б»:

$$\varphi_b = \varphi_v - I_2 \cdot R_2 = 24,29 - 24,27 \approx 0 \text{ В.}$$

Потенциальная диаграмма приведена на рис.11.

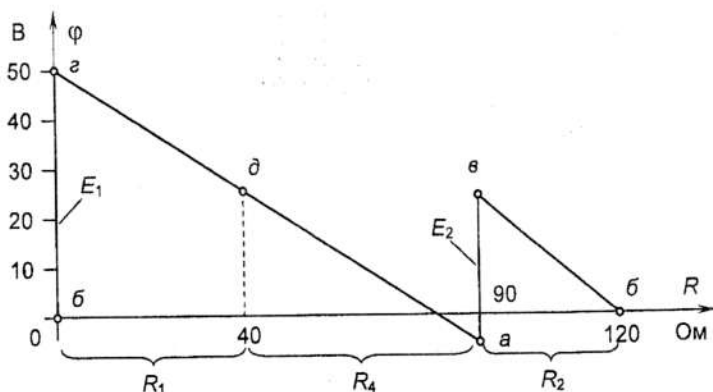


Рис.11