Теория, примеры:

Теорема Бернштейна

Пусть имеем уравнение:

(1) $y'' = F(x, y, y')$

если ф-ии $F, F_y, F_{y'}$ непрерывны в каждой конечной точке x, y для люб. конечного y' и если $\exists k > 0$ (константа), и такие ограниченные в каждой конечной части плоскости ф-ии

$\alpha = \alpha(x, y) \geq 0$

$\beta = \beta(x, y) \geq 0$

что $F_y(x, y, y') > k$ (2)

$|F(x, y, y')| \leq \alpha \cdot y'^2 + \beta$

то через любые две точки плоскости (a, A) и (b, B), имеющие различные абсциссы, проходит одна и только одна интегральная кривая $y = \varphi(x)$ уравнения (1)

Пример 1:

Д-ть, что через любые две точки плоскости с различными абсциссами проходит ~~по~~ одна и только одна экстремаль функционала:

$$\int e^{-2y^2}(y'^2-1)\,dx$$

ур-е Эйлера

$$-\frac{d}{dx}2y'e^{-2y^2}-4ye^{-2y^2}y'^2-4ye^{2y^2}=0$$

$$-2y''e^{-2y^2}+4\cancel{2}y'2ye^{-2y^2}y'-4ye^{-2y^2}y'^2-4ye^{-2y^2}=0$$

$$y''=2y^2y-2yy'-2y=0$$

$$\cancel{-\frac{d}{dx} e^{-2y^2}\cdot 2y' - (y'^2-1)\cdot e^{-2y^2}}$$

$$\cancel{y'' = 2yy'^2 + (y'^2-1)2yy'}$$

$$2yy'^2 + 2y$$

$$y'' = \underbrace{2yy'^2 + 2y}_{F}$$

Произв. по y

$$F = 2y(y'^2+1)$$

$$F_y = 2(y'^2+1) \geq 2 = K > 0 \text{ (усл. 2 вып.)}$$

$$2yy'^2 + 2y \leq 2|y|y'^2 + 2|y|$$

$$\alpha = \beta = 2|y| \text{ (условие 3 выполнено)}$$

Через люб. 2 точк. прох. одна и тольк. одна экстремаль

Пример 2:

Найти экстремаль

$$J[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{y(1+y'^2)}\,dx$$

$$y(0) = y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Решение в общем виде:

$\int_0^1 F(y, y')\,dx$ не зависит от x.

$$-\frac{d}{dx} F_{y'} + F_y = 0 \qquad F_{y'}(y, y')$$

$$-\frac{dF_{y'}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dF_{y'}}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} + F_y = 0$$

$-F_{y'y} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' + F_y = 0$ (домножим на y')

$$-F_{y'y} \cdot y'^2 - F_{y'y'} \cdot y'y'' + y' \cdot F_y = 0$$

Это есть производная $\frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) = 0$ ⊛

$F(y, y')$

$$\frac{dF}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} \quad \frac{dF}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx}$$

$$F_y y' + \cancel{F_{y'} y''} - \cancel{y'' \cdot F_{y'}} - y' \cdot (F_{y'y} \cdot y' +$$

$$+ F_{y'y'} \cdot y'') = 0$$ (проверили, это так!)

из (*) $\Rightarrow$ $F - y' \cdot F_{y'} = C$

Сост. диф. ур-е

$$\sqrt{y(1+y'^2)} - y' \cdot \frac{\cancel{2} y y'}{\cancel{2}\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$$

$$\frac{y(1+y'^2) - yy'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$$

$$C \cdot \sqrt{y(1+y'^2)} = y$$

и так далее...