Министерство образования и науки Российской Федерации
Саратовский государственный технический университет
Балаковский институт техники, технологии и управления

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания к выполнению контрольных работ
по курсу «Теоретическая механика» для студентов специальностей
100700, 250600, 100401 заочной формы обучения
Часть 1

Одобрено
редакционно-издательским советом
Балаковского института техники,
технологии и управления

Балаково 2006

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика как одна из важнейших физико-математических дисциплин играет существенную роль в подготовке инженеров любых специальностей. На основных законах и принципах теоретической механики базируются многие общеинженерные дисциплины, такие, как сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика, теория механизмов и машин, детали машин и др.

Хорошее усвоение курса теоретической механики требует не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков в решении задач. Для этого необходимо самостоятельно решить большое количество задач по всем разделам.

При изучении курса «Теоретическая механика» студент должен выполнить ряд заданий в контрольной работе и изучить теоретические вопросы, помогающие в решении задач.

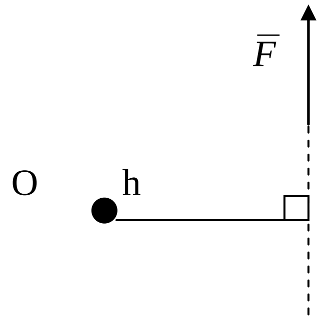
Во всех разделах широко используется векторная алгебра. В статике необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически и аналитически их сумму, скалярное и векторное произведение. В кинематике необходимо уметь дифференцировать векторы, функции и строить графики функций. Для изучения динамики надо уметь дифференцировать векторы, интегрировать функции и дифференциальные уравнения.

При решении задач номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, номер условия в таблице – по последней.

СТАТИКА

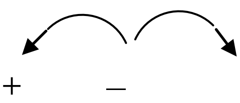
Основные понятия для плоской системы сил

Момент силы относительно центра (точки) – это алгебраическая величина, равная взятому со знаком «+» или «–» произведению модуля силы на плечо, кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы

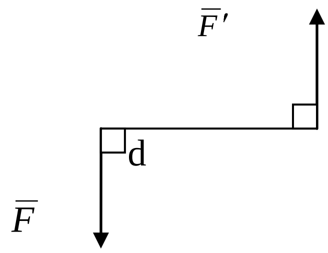


$$M_O(\overline{F}) = \pm F \cdot h.$$

Знак «+» берется если вращение силы вокруг центра видно происходящим против хода часовой стрелки.

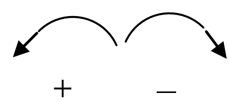


Момент пары сил – это алгебраическая величина, равная произведению плеча пары (кратчайшего расстояния между линиями действия силы) на величину одной из сил пары, взятая со знаком «+» или «–».



$$M(\overline{F}, \overline{F}') = \pm F \cdot d = \pm F' \cdot d$$

Знак «+» берется если вращение пары видно происходящим против хода часовой стрелки.



Теорема Вариньона

Если плоская система сил приводится к равнодействующей, то момент этой равнодействующей относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно того же центра.

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \sim \overline{F}$$

$$M_O(\overline{F}) = \sum_{i=1}^{n} M_O(\overline{F}_i)$$

Задача С1

Задание. Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис.2 – 3), закреплена в точке А шарнирно-неподвижной опорой, а в точке В прикреплена или к шарнирно-стрежневой, или к шарнирно-подвижной опоре. В точке С к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом Р=25 кН. На раму действуют момент М =100 кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице 1. Принять a=0,5 м.

Определить реакции связей в точках А, В, вызываемые действующими нагрузками.

Указания. Задача С1 – на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, будут одинаковыми, так как трением пренебрегают. При вычислении момента силы $\overline{F}$ ее раскладывают на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, для которых плечи легко определяются, и используют теорему Вариньона.

Пример. Жесткая пластина ABCD (рис.1) имеет в точке А шарнирно-неподвижную опору, а в точке В – шарнирно-подвижную опору. Все действующие нагрузи и размеры показаны на рисунке.

Д а н о: F = 25 кН, α = 60º, P = 18 кН, γ = 75º, M = 50 кН·м, β = 30º, a = 0,5 м.

О п р е д е л и т ь: реакции в точках А и В, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие конструкции (рис.1). Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на пластину силы: силу $\overline{F}$, момент М, натяжение троса $\overline{T}$ (по модулю Т = Р) и реакции опор $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{R}_B$.

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки А воспользуемся теоремой Вариньона: $F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$. Получим:

$$\sum F_{ix} = 0,\ \ X_A + R_B \sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0,\ \ Y_A + R_B \cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_A(\overline{F}_i) = 0,$$

$$M - R_B\cos\beta\cdot 4a + F\cos\alpha\cdot 2a - F\sin\alpha\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a = 0 \qquad (3)$$

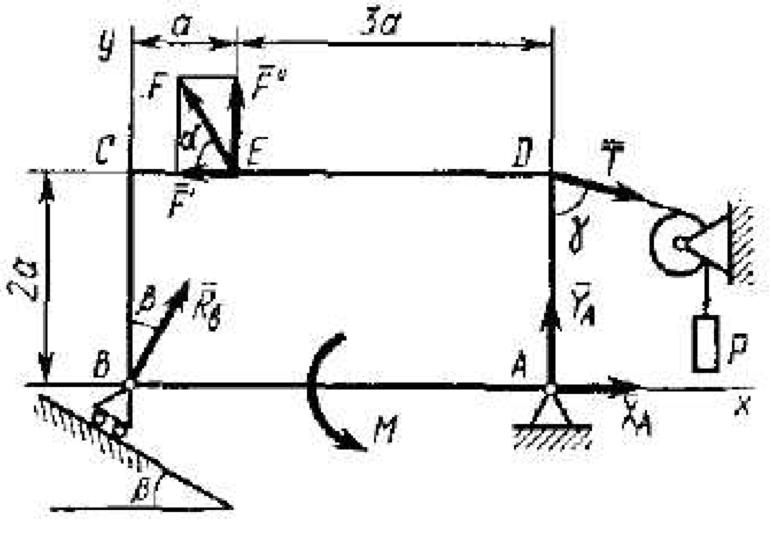


Рис. С1

Рис.1. Схема рассматриваемого примера

Подставив в уравнения (1) – (3) числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

О т в е т: $X_A = -8{,}5$ кН, $Y_A = -23{,}3$ кН, $R_B = 7{,}3$ кН. Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ направлены противоположно показанным на рис.1.

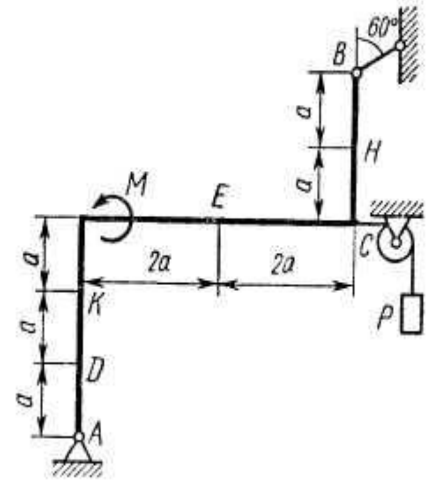


Схема С1.0

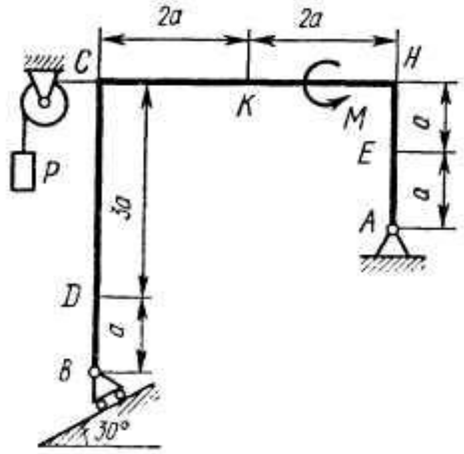


Схема С1.1

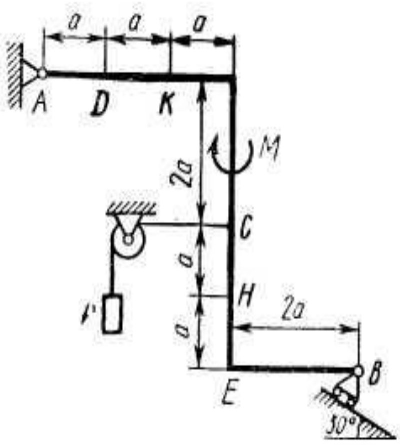


Схема С1.2

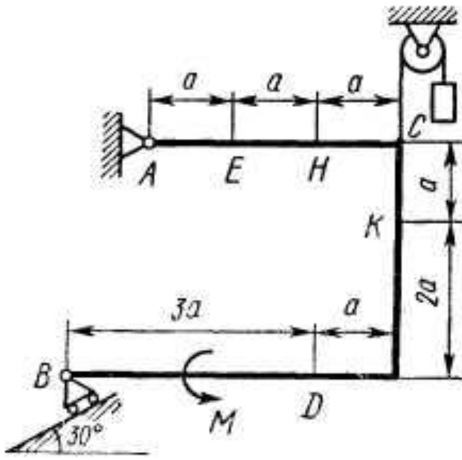


Схема С1.3

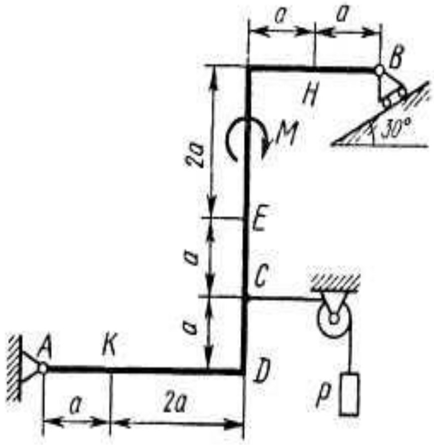


Схема С1.4

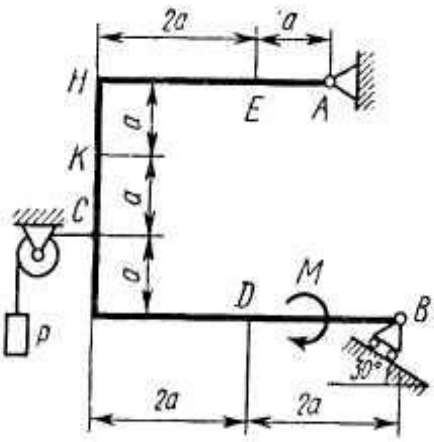


Схема С1.5

Рис.2. Схемы конструкций

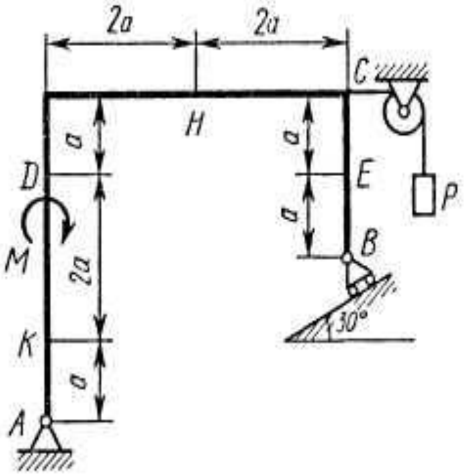


Схема С1.6

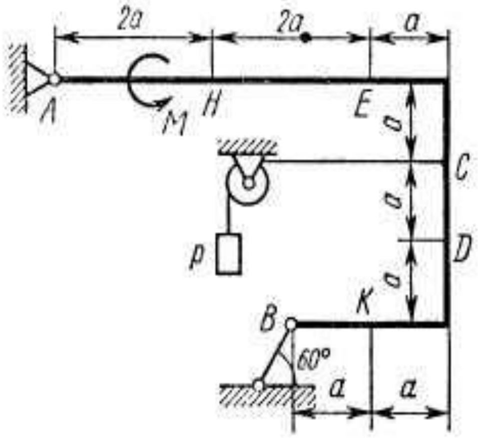


Схема С1.7

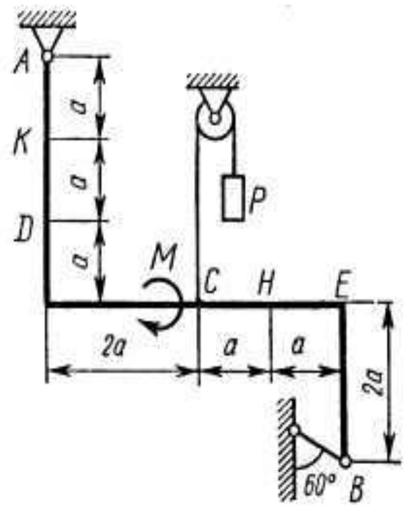


Схема С1.8

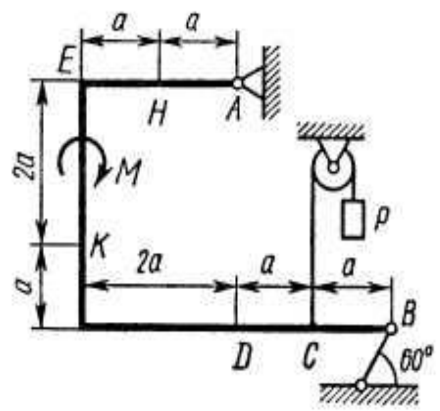
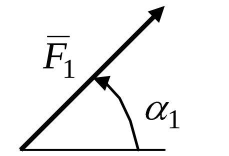
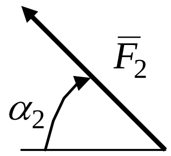
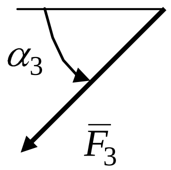
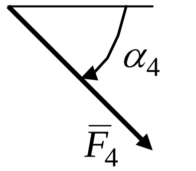


Схема С1.9

Рис.3. Схемы конструкций

Таблица 1

Силы								
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	H	30	–	–	–	–	K	60
1	–	–	D	15	E	60	–	–
2	K	75	–	–	–	–	E	30
3	–	–	K	60	H	30	–	–
4	D	30	–	–	–	–	E	60
5	–	–	H	30	–	–	D	75
6	E	60	–	–	K	15	–	–
7	–	–	D	60	–	–	H	15
8	H	60	–	–	D	30	–	–
9	–	–	E	75	K	30	–	–

Задача С2

Задание. Конструкция (рис.5 – 6) состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке С или соединены друг с другом шарнирно (схема С2.0 – С2.5), или свободно опираются друг на друга (схема С2.6 – С2.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке А или шарнирно-неподвижная опора, или жесткая заделка; в точке В или гладкая плоскость (схема С2.0, С2.1), или невесомый стержень ВВ' (схема С2.2, С2.3), или шарнирно-неподвижная опора (схема С2.4 – С2.9); в точке D или невесомый стержень DD' (схема С2.0, С2.3, С2.8), или шарнирно-неподвижная опора (схема С2.7).

На каждую конструкцию действуют: момент M = 60 кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 20 кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в таблице 2. В этой же таблице указано, на каком участке действует распределенная нагрузка. Ее направление на различных участках указано в таблице 2а.

Определить реакции связей в точках A, B, C (для схем C2.0, C2.3, C2.7, C2.8 также реакцию в точке D), вызванные заданными нагрузками. Принять a=0,2 м.

Указание. Задача C2 – на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия.

Пример. На угольник ABC ($\angle$ABC = 90º), конец A которого жестко заделан, в точке C опирается стержень DE (рис.4,а). Стержень имеет в точке D шарнирно-неподвижную опору и к нему приложена сила $\overline{F}$, а к угольнику – равномерно распределенная на участке KB нагрузка интенсивности q и момент M.

Д а н о: F =10 кН, M = 5 кН·м, q =20 кН/м, a= 0,2 м.

О п р е д е л и т ь: реакции в точках A, C, D, вызванные заданными нагрузками.

Решение. 1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня DE (рис.4,б). Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на стержень силы: силу $\overline{F}$, реакцию $\overline{N}$ и реакции $\overline{X}_D$ и $\overline{Y}_D$. Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad X_D + F - N\sin 60^0 = 0; \tag{4}$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad Y_D + N\cos 60^0 = 0; \tag{5}$$

$$\sum M_D = 0, \quad N \cdot 2a - F \cdot 5a\sin 60^0 = 0; \tag{6}$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис.4,в). На него действуют сила давления стержня $\overline{N}'$, направленная противоположно реакции $\overline{N}$, равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем сосредоточенной силой $\overline{Q}$, приложенной в середине участка КВ (численно $Q = q \cdot 4a$=16 кН), момент М и реакции жесткой заделки $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, M_A$. Для этой плоской системы сил также составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad X_A + Q\cos 60^0 + N'\sin 60^0 = 0; \tag{7}$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad Y_A - Q\sin 60^0 - N'\cos 60^0 = 0; \tag{8}$$

$$\sum M_A(\overline{F}_i) = 0, \quad M_A + M + Q \cdot 2a + N'\cos 60^0 \cdot 4a + N'\sin 60^0 \cdot 6a = 0; \tag{9}$$

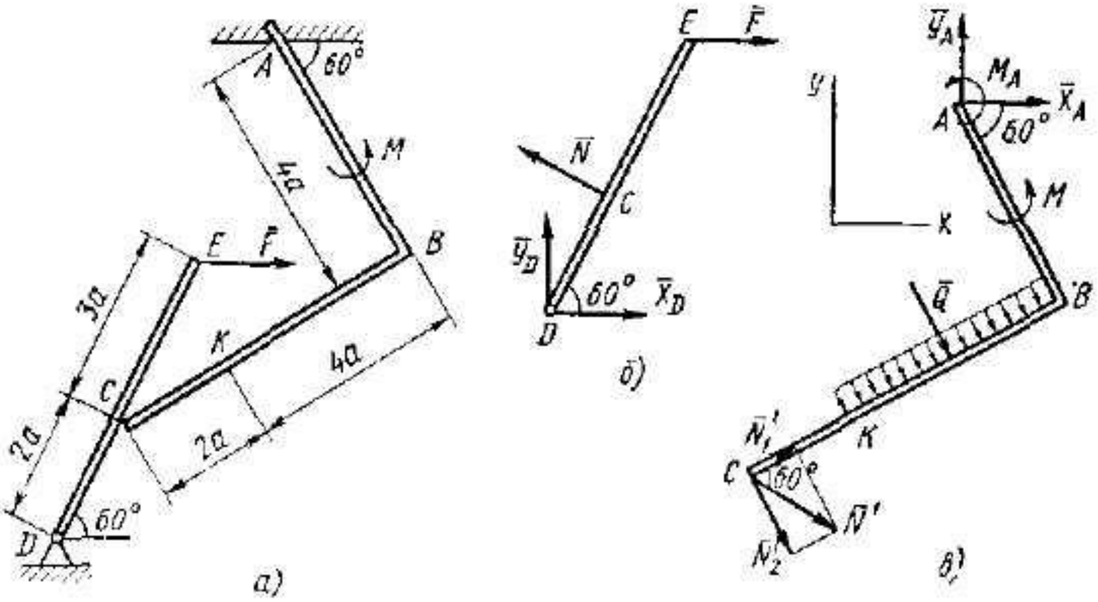


Рис. С2

Рис.4.Схема рассматриваемого примера

При вычислении момента силы $\overline{N}'$ применяем теорему Вариньона. Подставив в уравнения (4) – (9) числовые значения заданных величин и решив систему этих уравнений, определи искомые реакции. При решении учитываем, что численно $N' = N$ по закону равенства действия и противодействия.

О т в е т: $N = 21{,}7\,кН,\ Y_D = -10{,}8\,кН,\ X_D = 8{,}8\,кН,\ X_A = -26{,}8\,кН,$
$Y_A = 24{,}7\,кН, \mathrm{M}_A = -42{,}6\,кН \cdot м$

Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A, \overline{Y}_D$ и M_A направлены противоположно показанным на схеме.

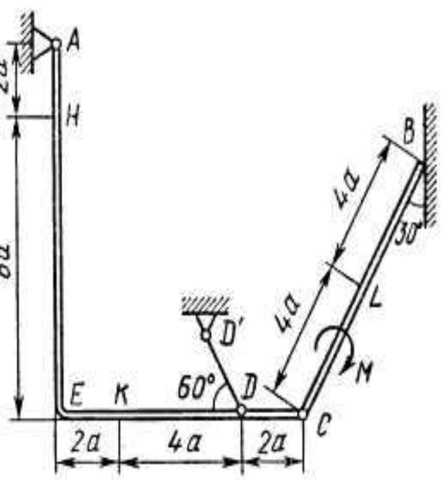


Схема С2.0

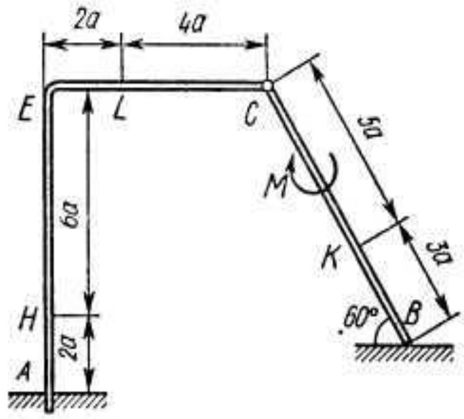


Схема С2.1

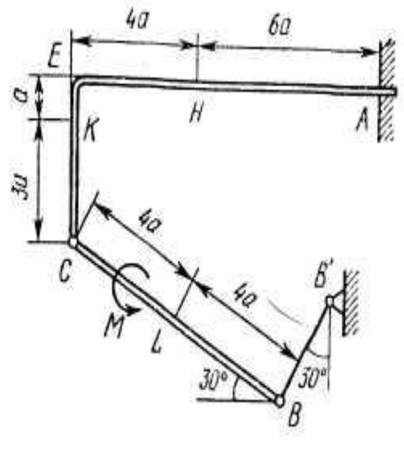


Схема С2.2

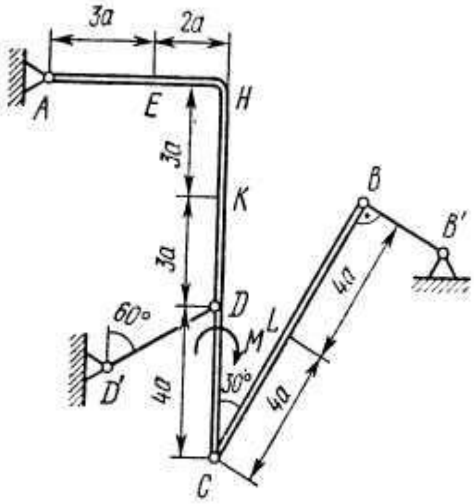


Схема С2.3

Рис.5.Схемы конструкций

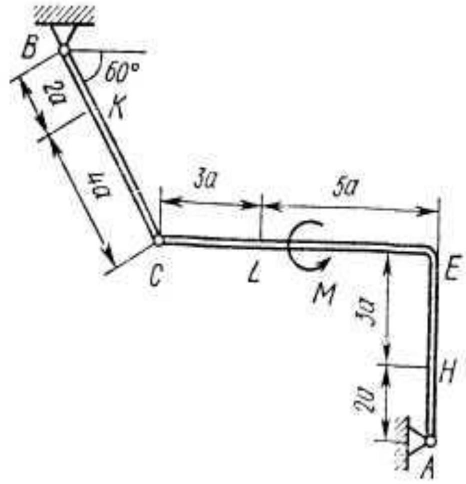


Схема С2.4

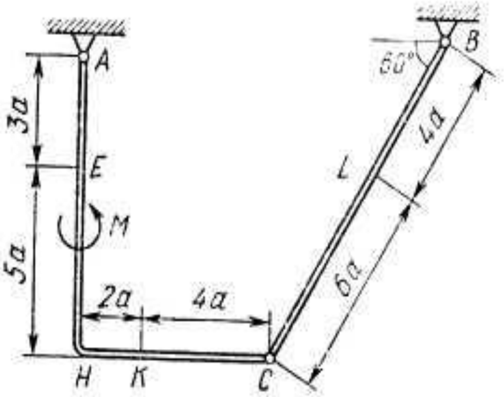


Схема С2.5

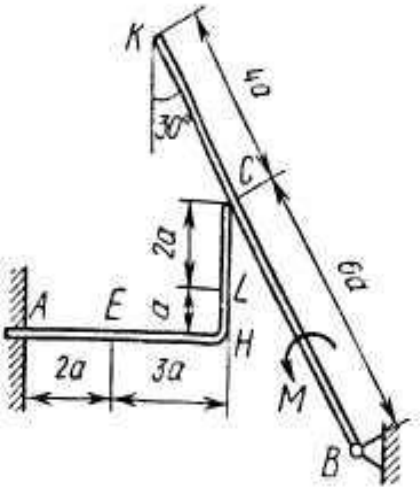


Схема С2.6

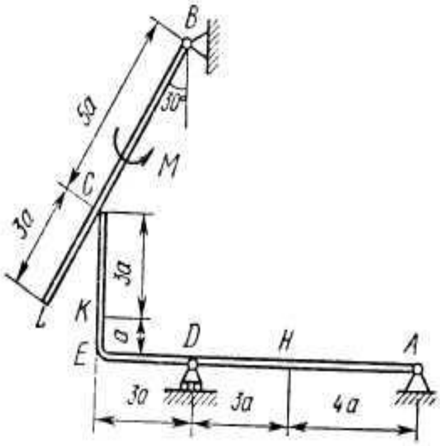


Схема С2.7

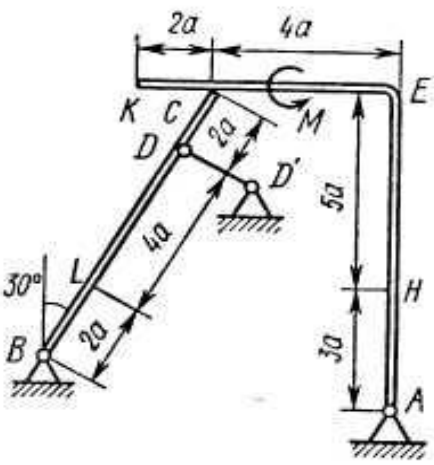


Схема С2.8

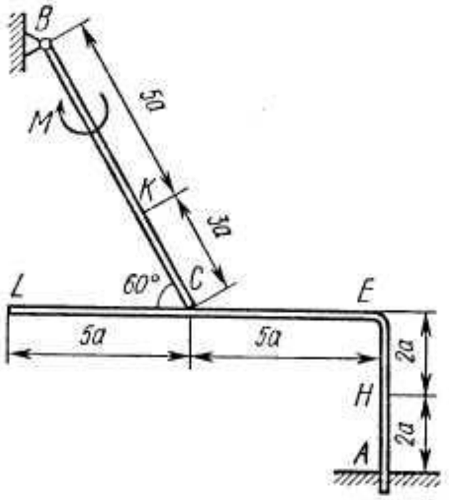


Схема С2.9

Рис.6.Схемы конструкций

Таблица 2

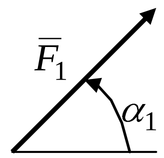
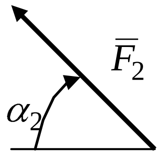
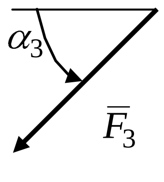
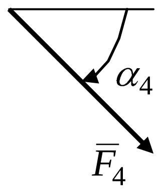
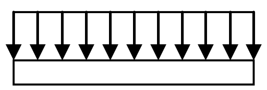
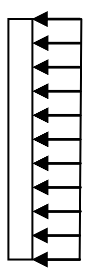
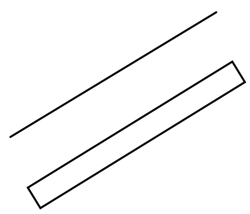
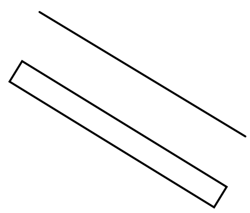
Силы									Нагруженный участок
Номер условия	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН		
	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град	
0	K	60	–	–	H	30	–	–	CL
1	–	–	L	60	–	–	E	30	CK
2	L	15	–	–	K	60	–	–	AE
3	–	–	K	30	–	–	H	60	CL
4	L	30	–	–	E	60	–	–	CK
5	–	–	L	75	–	–	K	30	AE
6	E	60	–	–	K	75	–	–	CL
7	–	–	H	60	L	30	–	–	CK
8	–	–	K	30	–	–	E	15	CL
9	H	30	–	–	–	–	L	60	CK

Таблица 2а

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	Схема С2.0, С2.3, С2.5, С2.7, С2.8	Схема С2.1, С2.2, С2.4, С2.6, С2.9
			

КИНЕМАТИКА

Основные понятия

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения параллельной своему первоначальному положению.

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (совпадающие при наложении) траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.

$S = S(t)$ – закон поступательного движения (10)

Скорость точки при поступательном движении равна первой производной по времени от перемещения: $V = \dfrac{dS}{dt} = \dot{S}$ (11)

Ускорение точки при поступательном движении равно первой производной по времени от скорости или второй производной по времени от перемещения: $a = \dfrac{d^2S}{dt^2} = \ddot{S} = \dfrac{dV}{dt} = \dot{V}$. (12)

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными (эта прямая называется ***ось вращения***), а все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

$\varphi = \varphi(t)$ – закон вращательного движения, (13)

где φ – угол поворота тела.

Скорость точки при вращательном движении равна произведению модуля угловой скорости тела на кратчайшее расстояние от точки до оси вращения (радиус окружности): $V = \omega \cdot R$. (14)

Вектор скорости направляется по касательной к траектории в сторону вращения тела (в сторону угловой скорости тела ω).

Угловая скорость тела равна первой производной по времени от угла поворота:
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{15}$$

Ускорение точки при вращательном движении равно:
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \tag{16}$$

где $a_\tau = R \cdot \varepsilon$ – касательное (или вращательное) ускорение, направляется по касательной к траектории вращения в сторону углового ускорения тела ε.

Угловое ускорение тела равно первой производной по времени от угловой скорости или второй производной по времени от угла поворота тела:
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \tag{17}$$

$a_n = R \cdot \omega^2$ – нормальное (или центростремительное) ускорение, всегда направляется к центру (к оси) вращения тела.

Плоским или плоскопараллельным называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела движутся в плоскостях параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Плоское движение тела может быть представлено в виде совокупности 2-х движений: поступательного, вместе с выбранным полюсом, и вращательного вокруг оси, проходящей через выбранный полюс.
$$\left.\begin{aligned} x_O &= x_O(t) \\ y_O &= y_O(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где x_O, y_O – координаты полюса, φ – угол поворота тела.

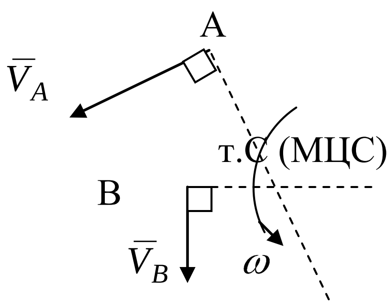
Скорость точки при плоском движении тела равна геометрической сумме скорости полюса и относительной скорости точки при вращении плоской фигуры вокруг полюса: $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$ (19)

где $\overline{V}_A$ – скорость полюса.

Теорема о проекциях скоростей двух точек тела:
проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, алгебраически равны.

Мгновенный центр скоростей (МЦС) – это точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

МЦС находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных из начала скоростей.



$V_A = \omega \cdot AC$
$V_B = \omega \cdot BC$

Ускорение точки при плоском движении твердого тела равно геометрической сумме ускорения выбранного полюса и касательной и нормальной составляющих относительного ускорения при вращении точки вокруг полюса: $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau$ (20)

где $\overline{a}_A$ – ускорение полюса,

$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB$ – нормальная составляющая относительного ускорения, всегда направляется по звену АВ от точки к полюсу,

$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ – касательная составляющая относительного ускорения, направляется перпендикулярно звену АВ в сторону углового ускорения звена ε_{AB}.

Задача К1

Задание. Механизм (рис.8 – 9) состоит из ступенчатых колес 1– 3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (схемы К2.0 – К2.9). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 – $r_1 = 2\,\text{см}, R_1 = 4\,\text{см}$, у колеса 2 – $r_2 = 6\,\text{см}, R_2 = 8\,\text{см}$, у колеса 3 – $r_3 = 12\,\text{см}, R_3 = 16\,\text{см}$.На ободьях колес расположены точки А, В и С.

В табл.3 указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса 1, $S_4(t)$ – закон движения рейки 4, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса 2, $V_5\,(t)$ – закон изменения скорости груза 5 и т.д. (φ – выражено в радианах, S – в сантиметрах, t – в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для S_4, S_5 и V_4 , V_5 – вниз.

Определить в момент времени t_1= 2 с указанные в табл.3 скорости (V – линейные, ω – угловые) и ускорения (a – линейные, ε – угловые) соответствующих точек или тел (V_5 – скорость груза 5 и т.д.).

Указания. Задача К1 – на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же. А когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня (и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес) в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Пример. Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2, r_2 и колесо 3 радиуса R_3, скрепленное с валом радиуса r_3, находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 (рис.7). Рейка движется по закону $S_1 = f(t)$.

Д а н о: R_2= 6 см, r_2= 4 см, R_3= 8 см, r_3=3 см, $S_1 = 3t^3$ (S – в сантиметрах, t – в секундах), А – точка обода колеса 3, t_1= 3 с.

О п р е д е л и т ь: ω_3, V_4, ε_3, a_A в момент времени t = t_1.

Решение. Обозначим скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i), через V_i, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), – через U_i.

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени t. Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$V_1 = \dot{S}_1 = 9t^2. \tag{21}$$

Так как колесо 2 и рейка находятся в зацеплении, то V_2= V_1 или $\omega_2 R_2 = V_1$. Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно, U_2= V_3 или $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \qquad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2 \tag{22}$$

Тогда для момента времени t_1= 3 с получим $\omega_3 = 6{,}75\ c^{-1}$.

2. Определяем V_4.

Так как V_4= V_B= $\omega_3 r_3$, то при t_1= 3 с V_4= 20,25 см/с.

3. Определяем ε_3. Учитывая второе из равенств (22), получим ε_3= $\dot{\omega}_3$= 1,5t. Тогда при t_1= 3 с ε_3= 4,5 c^{-2}.

4. Определяем a_A. Для точки А $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n}$, где численно $a_A^{\tau} = R_3\varepsilon_3$, $a_A^{n} = R_3\omega_3^2$. Тогда для момента времени t_1= 3 с имеем

$$a_A^{\tau} = 36\ \text{см}/c^2,\ a_A^{n} = 364{,}5\ см/c^2;$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^{\tau})^2 + (a_A^{n})^2} = 366{,}3\ см/c^2.$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис.7.

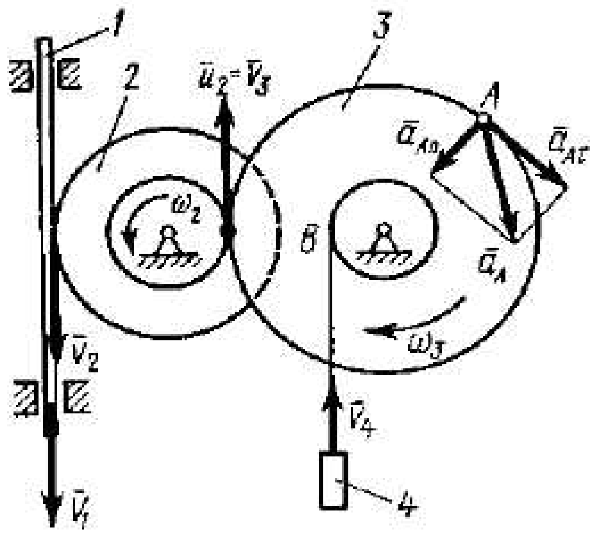


Рис. К2

Рис.7.Схема рассматриваемого примера

О т в е т: $\omega_3 = 6{,}75\ c^{-1}$; $V_4 = 20{,}25$ см/с; $\varepsilon_3 = 4{,}5\ c^{-2}$; $a_A = 366{,}3$ см/c^2.

Таблица 3

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$S_4 = 4(7t - t^2)$	V_B, V_C	ε_3, a_A, a_5
1	$V_5 = 2(t^2 - 3)$	V_A, V_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	V_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	V_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	V_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	V_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$V_4 = 3t^2 - 8$	V_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$S_5 = 2t^2 - 5t$	V_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_A, a_4

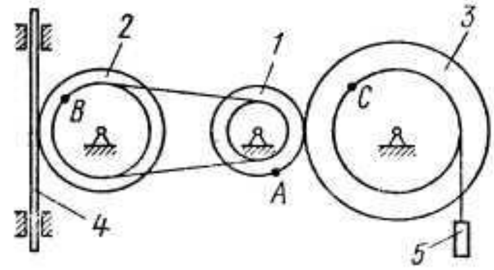


Схема К1.0

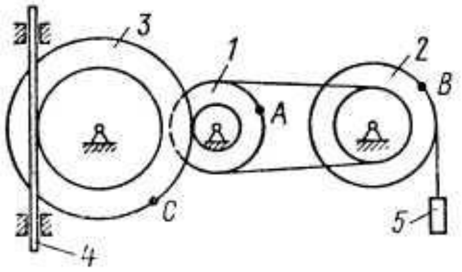


Схема К1.1

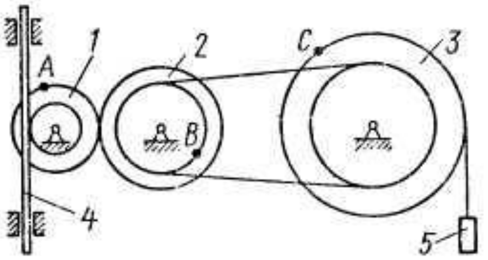


Схема К1.2

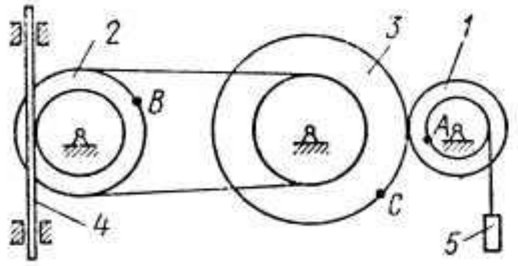


Схема К1.3

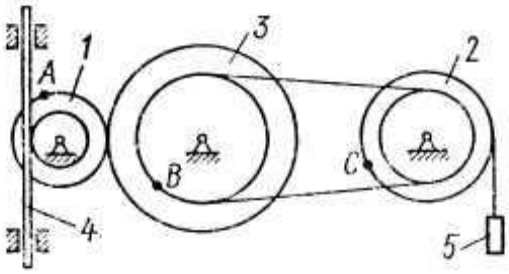


Схема К1.4

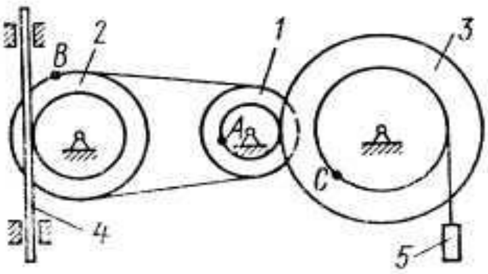


Схема К1.5

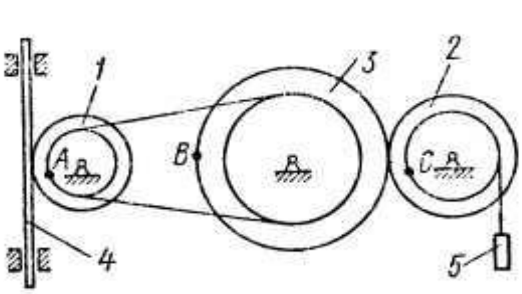


Схема К1.6

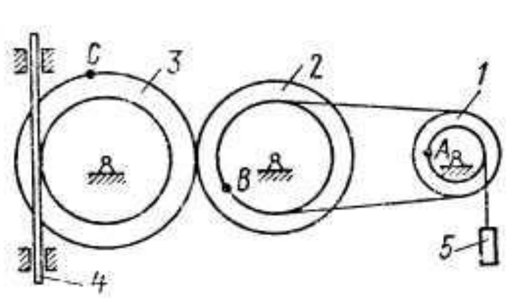


Схема К1.7

Рис.8. Схемы механизмов

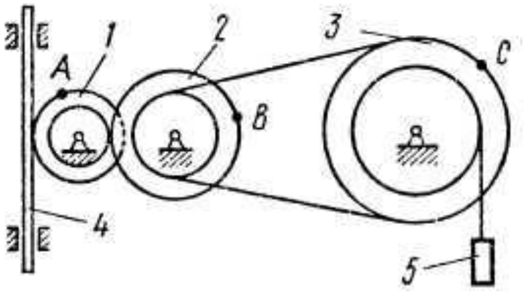


Схема К1.8

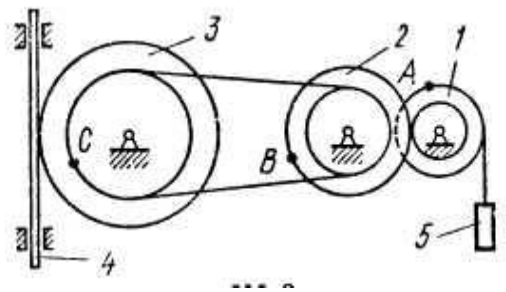


Схема К1.9

Рис. 9. Схемы механизмов

Задача К2

Задание. Плоский механизм (рис.11 – 12) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В или Е (схемы К2.0 – К2.7) или из стержней 1, 2, 3 и ползунов В и Е (схемы К2.8 – К2.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами. Точка D находится в середине стержня АВ. Длины стержней равны соответственно $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $l_4 = 0{,}6$ м. Положение механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл.4а (для схем К2.0 – К2.4) или в табл.4б (для схем К2.5 – К2.9); при этом в табл.4а ω_1 *и* ω_4 – величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах.

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α. Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\bar{V}_B$ и ускорение $\bar{a}_B$ – от точки В к b (на схеме К2.5 – К2.9).

Указания. Задача К2 – на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. Чтобы определить скорости точек механизма и угловые скорости его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей.

Пример. Механизм (рис.10а) состоит из стержней 1, 2. 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Д а н о: $\alpha = 60^0$, $\beta = 150^0$, $\gamma = 90^0$, $\varphi = 30^0$, $\theta = 30^0$, $AD = DB$, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $l_4 = 0{,}6$ м, $\omega_1 = 2c^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7c^{-2}$ (направления ω_1 *и* ε_1 – против хода часовой стрелки).

О п р е д е л и т ь : V_B, V_E, ω_2, a_B, ε_3.

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. 10б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

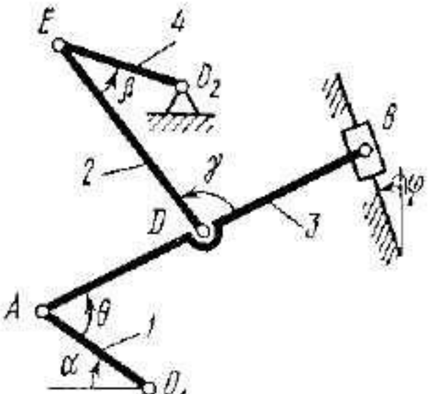


Рис. К3а

Рис.10а. Схема механизма

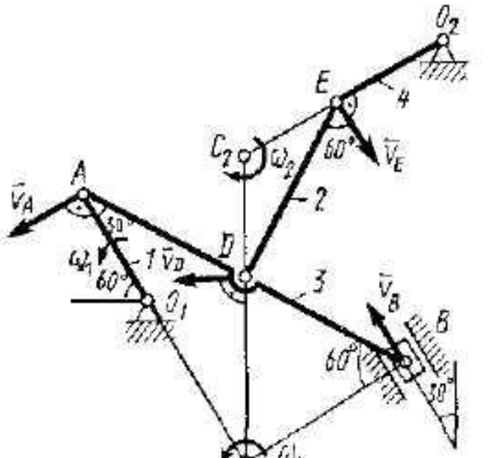


Рис. К3б

Рис.10б. Направление скоростей

2. Определяем V_B. Точка В принадлежит стержню АВ. Чтобы найти V_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\overline{V}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\overline{V}_A$; численно

$$V_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \text{ м/с}; \quad \bar{V}_A \perp O_1 A. \qquad (23)$$

Направление $\bar{V}_B$ найдем, учтя, что точка В принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{V}_A$ и направление $\bar{V}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня АВ) на прямую, соединяющую эти точки (прямая АВ). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{V}_B$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$V_B \cos 30^0 = V_A \cos 60^0 \quad \text{и} \quad V_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (24)$$

3. Определяем V_E. Точка Е принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar{V}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню АВ. Для этого, зная $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня АВ; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$, восстановленных из точек А и В (к $\bar{V}_A$ перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора $\bar{V}_A$ определяем направление поворота стержня АВ вокруг МЦС C_3. Вектор $\bar{V}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину V_D найдем из пропорции

$$\frac{V_D}{C_3 D} = \frac{V_B}{C_3 B} \; . \qquad (25)$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что $\Delta A C_3 B$ – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30^0 и 60^0, и что $C_3B = AB \sin 30^0 =$ 0,5AB = BD. Тогда $\Delta B C_3 D$ является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (25) дает

$$V_D = V_B = 0{,}46 \text{ м/с}; \quad \bar{V}_D \perp C_3 D. \qquad (26)$$

Так как точка Е принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\overline{V}_E \perp O_2E$. Тогда, восстанавливая из точек Е и D перпендикуляры к скоростям $\overline{V}_E$ и $\overline{V}_D$, строим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\overline{V}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\overline{V}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис.10б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^0$, откуда $C_2D = C_2E$. Составив пропорцию, найдем, что

$$\frac{V_E}{C_2E} = \frac{V_D}{C_2D}, \quad V_E = V_D = 0{,}46 \text{ м/с.} \tag{27}$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и

$$C_2D = \frac{l_2}{2\cos 30^0} = 0{,}69 \text{ м}, \quad \text{то } \omega_2 = \frac{V_D}{C_2D} = 0{,}67 \ c^{-1} \tag{28}$$

5. Определяем $\overline{a}_B$ (рис.10в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка В принадлежит стержню АВ. Чтобы найти $\overline{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня АВ и траекторию точки В.

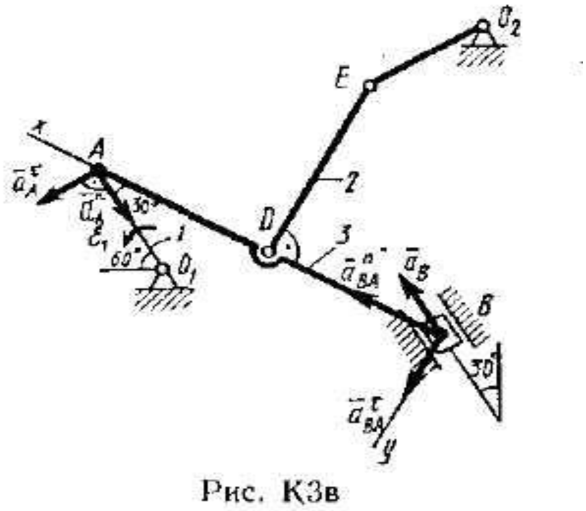


Рис.10в. Направление ускорений

По данным задачи можем определить $\overline{a}_A = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2; \quad a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6 \text{ м/с}^2 \tag{29}$$

Вектор $\overline{a}_A^n$ направлен вдоль АО$_1$, а $\overline{a}_A^\tau$ – перпендикулярно АО$_1$; изображаем эти векторы на чертеже (рис.10в). Так как точка В одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\overline{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\overline{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\overline{V}_B$. Для определения $\overline{a}_B$ воспользуемся равенством

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau. \tag{30}$$

Изображаем на чертеже векторы $\overline{a}_{BA}^n$ (вдоль ВА от В к А) и $\overline{a}_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно ВА); численно $a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{V_A}{C_3 A} = \frac{V_A}{l_3 \cos 30^0} = 0{,}66\ c^{-1} \quad \text{и} \quad a_{BA}^n = 0{,}61 \text{ м/с}^2 \tag{31}$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (30), неизвестны только числовые значения $\overline{a}_B$ и $\overline{a}_{BA}^\tau$; их можно найти, спроектировав обе части равенства (30) на оси координат.

Чтобы определить a_B, спроектируем обе части равенства (30) на направление ВА (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\overline{a}_{BA}^\tau$. Тогда получим

$$a_B \cos 30^0 = a_A^\tau \cos 60^0 - a_A^n \cos 30^0 + a_{BA}^n. \tag{32}$$

Подставив в равенство (32) числовые значения всех величин из (29) и (30), найдем, что

$$a_B = 0{,}72 \text{ м/с}^2. \tag{33}$$

Так как получилось $a_B > 0$, то следовательно, вектор $\overline{a}_B$ направлен как показано на рис.10в.

6. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a_{BA}^τ. Для этого обе части равенства (30) спроектируем на направление, перпендикулярное АВ (ось y). Тогда получим

$$-a_B \sin 30^0 = a_A^\tau \sin 60^0 + a_A^n \sin 30^0 + a_{BA}^\tau. \tag{34}$$

Подставив в равенство (34) числовые значения всех величин из (33) и (29), найдем, что a^{τ}_{BA}= –3,58 м/с^2. Знак указывает, что направление $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ противоположно показанному на рис.10в.

Теперь из равенства $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_3 l_3$ получим $\varepsilon_3 = \dfrac{\left|a^{\tau}_{BA}\right|}{l_3} = 2{,}56\ c^{-2}$.

Ответ: $V_B = 0{,}46$ м/с; $V_E = 0{,}46$ м/с; $\omega_2 = 0{,}67\ c^{-1}$; $a_B = 0{,}72$ м/с^2; $\varepsilon_3 = 2{,}56\ c^{-2}$.

Таблица 4а

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ω_2, 1/с	V точек	ω звена	a точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	–	B, E	D E	B	AB
1	90	120	150	0	30	–	4	A, E	AB	A	AB
2	30	60	30	0	120	5	–	B, E	AB	B	AB
3	60	150	150	90	30	–	5	A, E	D E	A	AB
4	30	30	60	0	150	4	–	D, E	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60	–	6	A, E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3	–	B, E	D E	B	AB
7	0	60	60	0	120	–	2	A, E	D E	A	AB
8	60	150	120	90	30	2	–	D, E	AB	B	AB
9	30	120	150	0	60	–	8	A, E	D E	A	AB

Таблица 4б

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ε_1, 1/с²	V_B, м/с	a_B, м/с²	V точек	ω звена	a точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	–	–	B, E	AB	B	AB
1	0	60	90	0	120	–	–	4	6	A, E	D E	A	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	–	–	B, E	AB	B	AB
3	0	150	30	0	60	–	–	6	8	A, E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	–	–	B, E	D E	B	AB
5	90	120	90	90	60	–	–	8	10	D, E	D E	A	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	–	–	B, E	D E	B	AB
7	30	120	30	0	60	–	–	2	5	A, E	AB	A	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	–	–	B, E	D E	B	AB
9	60	60	60	90	63	–	–	5	4	D, E	AB	A	AB

Примечание. Если точка В, ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис.К3.0 – К3.4, где В движется по окружности радиуса O_2B), то направление $\overline{a}_B$ заранее неизвестно.

В этом случае $\overline{a}_B$ также следует представить двумя составляющими ($\overline{a}_B = \overline{a}_B^\tau + \overline{a}_B^n$) и исходное уравнение (30) примет вид

$$\overline{a}_B^\tau + \overline{a}_B^n = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau. \qquad (35)$$

При этом вектор $\overline{a}_B^n$ (см., например, рис.К3.0) будет направлен вдоль BO_2, а вектор $\overline{a}_B^\tau$ – перпендикулярно BO_2 в любую сторону. Числовые значения a_A^τ, a_A^n и a_{BA}^n определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть $a_A^\tau = 0$ или $a_A^n = 0$, если точка А движется прямолинейно).

Значение a_B^n также вычисляется по формуле $a_B^n = \dfrac{V_B^2}{\rho} = \dfrac{V_B^2}{l}$, где l – радиус окружности O_2B, а V_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (35) остаются неизвестными только значения a_B^τ и a_{BA}^τ и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (35) на две оси.

Найдя a_B^τ, можем вычислить искомое ускорение $a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}$.

Величина a_{BA}^τ служит для нахождения ε_{AB}(как в рассмотренном примере).

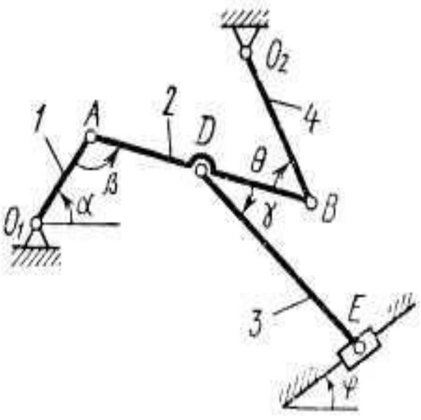


Схема К2.0

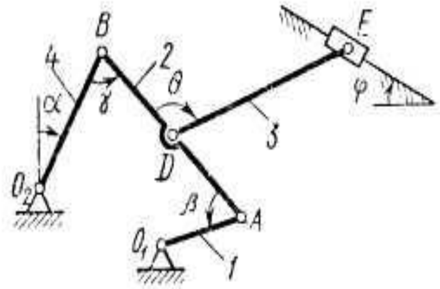


Схема К2.1

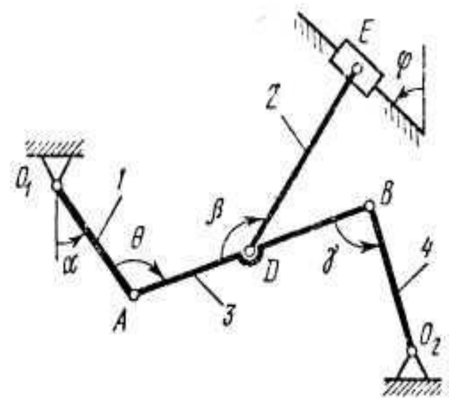


Схема К2.2

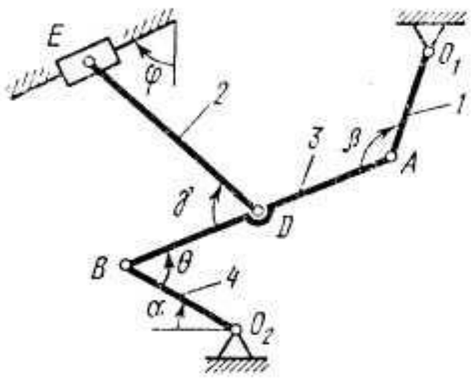


Схема К2.3

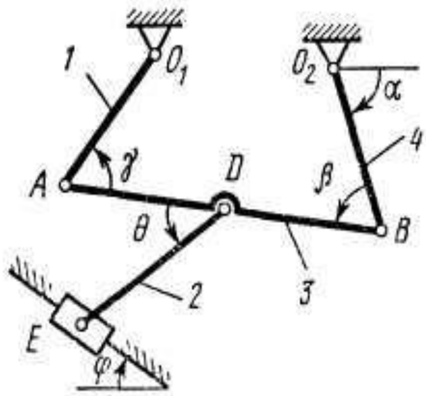


Схема К2.4

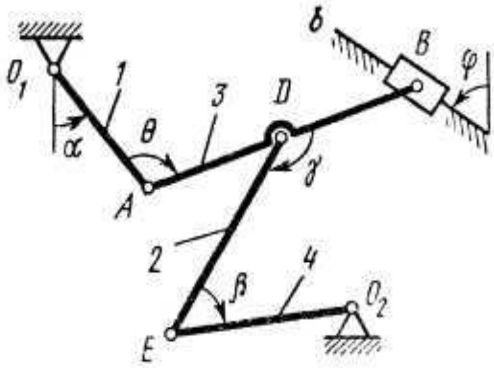


Схема К2.5

Рис.11 Схемы механизмов

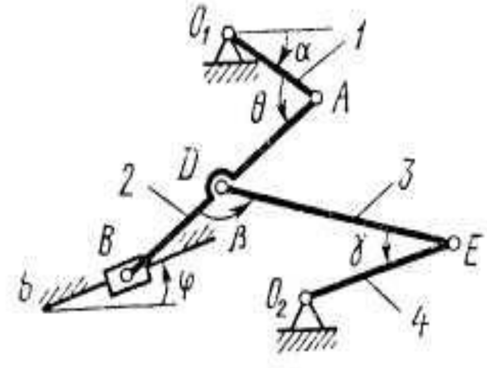


Схема К2.6

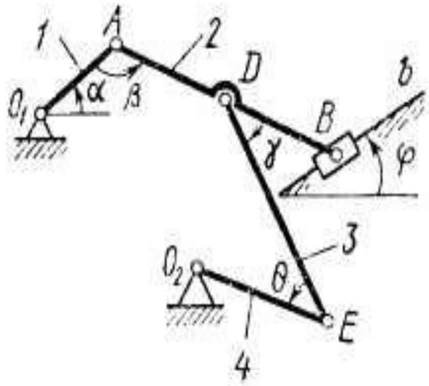


Схема К2.7

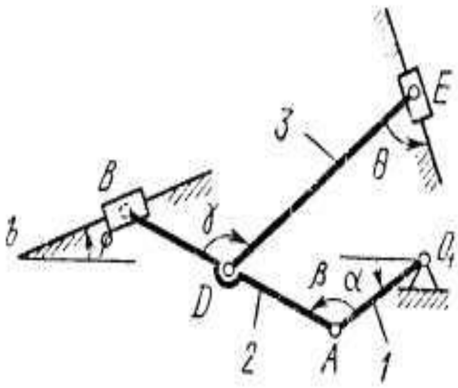


Схема К2.8

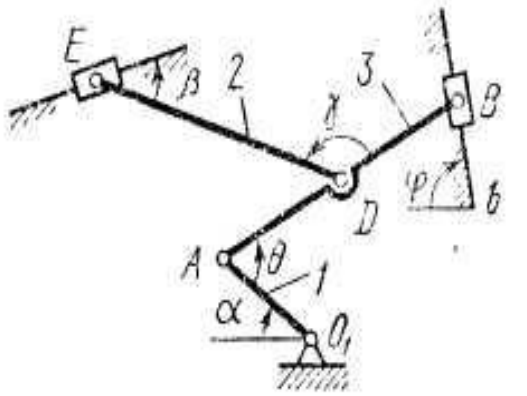


Схема К2.9

Рис.12. Схемы механизмов

Литература

1.Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для техн. вузов / Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др. – М.: Высшая школа, 1985.

2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука,1979.

3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики :Учебник для втузов. – 5-6 изд., испр. – М.: Высшая школа, 1977.

4. Бать М.И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1971.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

Методические указания к выполнению контрольных работ
по курсу «Теоретическая механика» для студентов специальностей
100700, 250600, 100401 заочной формы обучения
Часть 1

Составила Жванько Юлия Александровна
Рецензент О.В.Виштак
Редактор Л.В. Максимова
Корректор Н.Т. Мальчикова

Подписано в печать		Формат 60x84 1/16
Бумага тип.	Усл. печ. л.	Уч. – изд. л.
Тираж 150 экз.	Заказ	Бесплатно

Саратовский государственный технический университет
410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77
Копипринтер БИТТиУ, 413840, г. Балаково, ул. Чапаева, 140