Для функционала:

$$J[y]=\int_0^1\left(y'^2-yy'^3\right)dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=0.$$

указать и построить собственное и центральное поле экстремалей. Проверить достаточные условия Лежандра:

a) для включения экстремали в поле экстремалей;

b) экстремума функционала.

Небольшая теория и два примера:

Достаточное условие Лежандра
— для включения экстремали ф-ала

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx$$

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1$$

в поле экстремалей является

выполнения усиленного условия Лежандра: $F_{y'y'} > 0$ во всех точках рассматриваемой экстремали, т.е при $x \in [x_0, x_1]$

Пример 1:

$$J[y] = \int_0^2 (y'^4 + y'^2)\,dx$$

$$y(0) = 1, \ y(2) = 5$$

$$-\frac{d}{dx}(4y'^3 + 2y') = 0$$

$$4y'^3 + 2y' = C \quad /:2$$

$$2y'^3 + y' = C$$

$$+6y'^2y'' + y'' = 0$$

$$y''(6y'^2 + 1) = 0$$

$$y'' = 0 \Rightarrow y' = C \Rightarrow y = Cx + C_1$$

$6y'^2 + 1 \neq 0$

когда c_1 - собств, кога cx - центральное

$y(0) = c_1 = 1$

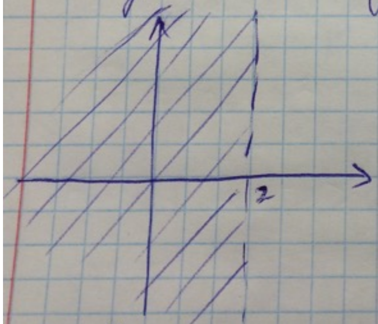
$y(2) = 2c + 1 = 5$

$c = 2$

$y = \underbrace{2x} + 1$ $\in$ полю экстремалей

$y = 2x + b$

$y = 2x + 1$ принадлежит собств. полю экстремалей $y = 2x + b$



Проверим условие Лежандра:

$F_{y'} = 4y'^3 + 2y'$

$F_{y'y'} = 12y'^2 + 2 > 0$ всегда.

во всех точках экстремали:

$y' = 2$, $F_{y'y'} = 12 \cdot 4 + 2 = 50 > 0$

усиленное условие Лежандра выполнено

Пример 2:

$J[y] = \int_{-1}^{1} (x^2 y'^2 + 12 y^2)\, dx$

$y(-1) = 1$, $y(1) = 1$

$-\frac{d}{dx}(2y'x^2) + 24y = 0$

$\cancel{2xy'^2 + 2x^2 y' + 24y}$

$-2y''x^2 - 4y'x + 24y = 0$

$\cancel{y'} \cdot y''x^2 + 2y'x - 12y = 0 \quad / : x^2$

$y = x^k$

$k(k-1) \cdot x^{k-2} x^2 + 2k x^{k-1} \cdot x - 12 \cdot x^k = 0$

характеристич. ур-е

$k^2 - k + 2k - 12 = 0$

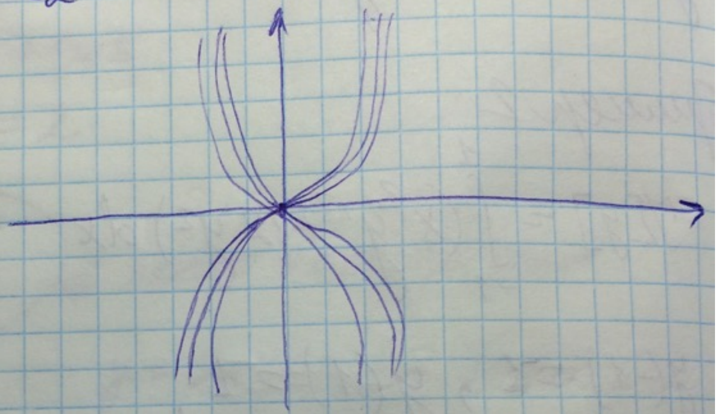
$k^2+k-12=0$

$k=-4,\ k=3$

$y=C_1x^3+C_2x^{-4}$

$C_2=0$

$C_1=1$



$y=x^3$

$y=x^3 \notin$ поля экстремалей.

условие лежандра:

$F_{y'}=2y'x^2$

$F_{y'y'}=2x^2\geqslant 0$ т.к $0\in[-1,1]$

не во всех точках $F_{y'y'}>0$