

ЧАСТЬ III

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

3.1. Введение

Методы решения задач классического вариационного исчисления, в которых поиск экстремума функционала сводится к интегрированию уравнений Эйлера-Лагранжа, применяются лишь к ограниченному классу задач, для которых возможно найти аналитическое решение. В связи с этим возникает необходимость нахождения приближенного решения другими методами, называемыми *прямыми*. Основная идея *прямых методов* заключается в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для некоторой задачи на экстремум функции конечного числа переменных. Последняя решается обычными методами, а затем предельным переходом получается решение соответствующей вариационной задачи. Для определенности будем предполагать, что речь идет о нахождении минимума функционалов. Тогда, если требуется найти минимум некоторого функционала $J[y(x)]$, о котором известно, что точная нижняя грань его значений $\inf J[y(x)] = m > -\infty$, то необходимо найти последовательность допустимых функций $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n(x)] = m$. Вариационная задача считается решенной, если минимизирующая последовательность $\{y_k(x)\}$ сходится к функции y , для которой $J[y(x)] = m$ [20].

Если предположить, что допустимые функции $y(x)$ могут быть разложены в степенные ряды:

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

или в ряды Фурье:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

или в какие-либо ряды вида

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

где $\varphi_n(x)$ – заданные функции, то исходный функционал $J[y(x)]$ можно рассматривать как функцию бесконечного множества переменных $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, т.е.

$$J[y(x)] = \Phi(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots).$$

Следовательно, различие между вариационными задачами и задачами на экстремум функций конечного числа переменных состоит в том, что в вариационном случае исследуется на экстремум функции бесконечного множества переменных. Поэтому основная идея прямых методов заключается в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для задачи на экстремум функций конечного числа переменных.

3.2. Конечно-разностный метод Эйлера

Рассмотрим простейшую вариационную задачу: найти экстремум функционала

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx; \quad y(x_0) = a, \quad y(x_1) = b. \quad (3.1)$$

В методе Эйлера значения функционала (3.1) рассматриваются не на произвольных допустимых в данной вариационной задаче кривых, а на ломаных, составленных из заданного числа n прямолинейных звеньев, с заданными абсциссами вершин (рис. 3.1):

$$a + h, \quad a + 2h, \quad \dots, \quad a + (n-1)h, \quad \text{где } h = \frac{x_1 - x_0}{n}.$$

На этих ломаных функционал $J[y(x)]$ превращается в функцию $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ ординат y_1, y_2, \dots, y_{n-1} – вершин ломаной. Ординаты y_1, y_2, \dots, y_{n-1} выбираются так, чтобы функция $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ достигала экстремума, т.е. они определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_{n-1}} = 0. \quad (3.2)$$

Полученная ломаная является приближенным решением вариационной задачи (3.1).

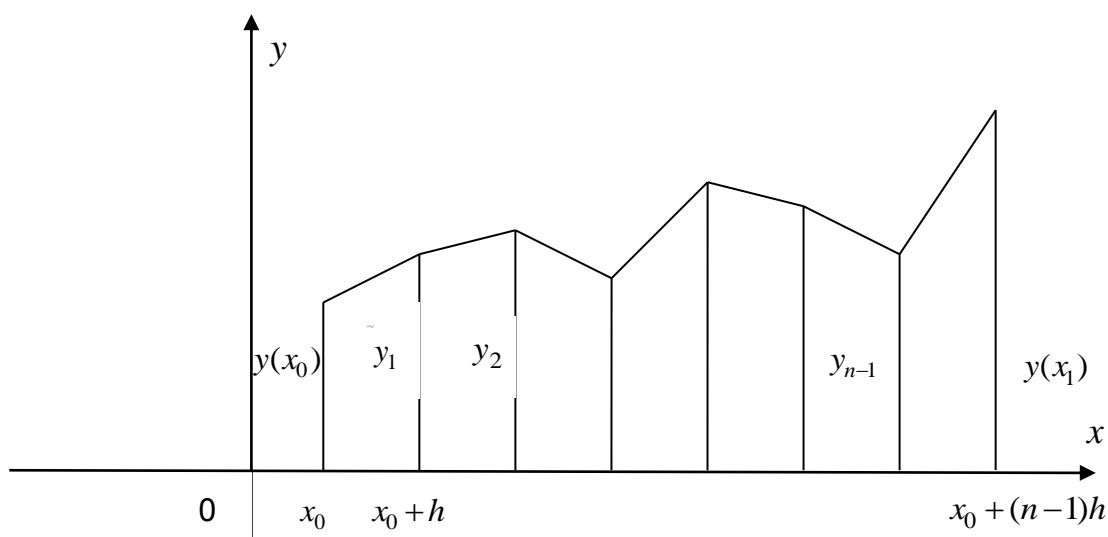


Рисунок 3.1

Пример 3.1. Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 4y \cos x) dx; \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Возьмем $n = 5$ и вычислим $h = \frac{\pi/2 - 0}{5} \approx 0,314159$. Положим

$$y_0 = y(0) = 0, \quad y_1 = y(h), \quad y_2 = y(2h), \\ y_3 = y(3h), \quad y_4 = y(4h), \quad y_5 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Значения производных приближенно заменим по формуле

$$y'_k = y'(x_k) \approx \frac{(y_{k+1} - y_k)}{h}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Тогда

$$y'(0) = \frac{y_1 - 0}{h}, \quad y'(h) = \frac{y_2 - y_1}{h}, \quad y'(2h) = \frac{y_3 - y_2}{h}, \\ y'(3h) = \frac{y_4 - y_3}{h}, \quad y'(4h) = \frac{y_5 - y_4}{h}.$$

Функционал $J[y(x)]$ заменим суммой по формуле прямоугольников:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})] \Delta x.$$

При $\Delta x = h$ будем иметь

$$\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = \left[\left(\frac{y_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{h} \right)^2 - y_1^2 + 4y_1 \cos h + \left(\frac{y_3 - y_2}{h} \right)^2 - y_2^2 + 4y_2 \cos 2h + \right. \\ \left. + \left(\frac{y_4 - y_3}{h} \right)^2 - y_3^2 + 4y_3 \cos 3h + \left(\frac{\pi/2 - y_4}{h} \right)^2 - y_4^2 + 4y_4 \cos 4h \right] \cdot h.$$

$\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4)$ – функция четырех переменных. Для определения ординат y_1, y_2, y_3, y_4 искомой ломаной составим систему уравнений (3.2):

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{2y_1}{h} - \frac{2(y_2 - y_1)}{h} - 2hy_1 + 4h \cos h = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = \frac{2(y_2 - y_1)}{h} - \frac{2(y_3 - y_2)}{h} - 2hy_2 + 4h \cos 2h = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} = \frac{2(y_3 - y_2)}{h} - \frac{2(y_4 - y_3)}{h} - 2hy_3 + 4h \cos 3h = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_4} = \frac{2(y_4 - y_3)}{h} - \frac{2(\pi/2 - y_4)}{h} - 2hy_4 + 4h \cos 4h = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (h^2 - 2)y_1 + y_2 = 2h^2 \cos h, \\ y_1 + (h^2 - 2)y_2 + y_3 = 2h^2 \cos 2h, \\ y_2 + (h^2 - 2)y_3 + y_4 = 2h^2 \cos 3h, \\ y_3 + (h^2 - 2)y_4 = 2h^2 \cos 4h - \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение этой системы:

$$y_1 = 0,091583, y_2 = 0,361859, y_3 = 0,756114, y_4 = 1,191768.$$

Значения точного решения $y = x \sin x$ (до шестого десятичного знака) в соответствующих точках:

$$y_1 = 0,097081, y_2 = 0,369316, y_3 = 0,762481, y_4 = 1,195133.$$

Средняя относительная погрешность приближенного решения вычисляется по

$$\text{формуле } \delta x^* = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \left| \frac{x - x^*}{x^*} \right| \cdot 100\%.$$

3.3. Метод Ритца

В основу метода положена идея Ритца (1908 г.) искать экстремум функционала $J[y(x)]$ задачи (3.1) не на всем пространстве допустимых функций, а использовать всевозможные линейные комбинации допустимых функций вида

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x), \quad (3.3)$$

где α_i – постоянные коэффициенты, система $\{\varphi_i(x)\}$ называется *системой координатных функций*, т.е. функции $\varphi_i(x)$ линейно независимы и образуют в рассматриваемом пространстве полную систему функций.

Требование, чтобы $y_n(x)$ были допустимыми функциями, накладывает на координатные функции $\varphi_i(x)$ некоторые дополнительные условия типа условий гладкости или удовлетворения граничным условиям. На таких линейных комбинациях функционал $J[y(x)]$ обращается в функцию аргументов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$J[y(x)] = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ выбирают таким образом, чтобы функция $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ достигала экстремума. Для этого необходимо решить систему, вообще говоря, нелинейных относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

и найденные значения α_i подставить в (3.3). Полученная таким образом последовательность $\{y_n(x)\}$ является минимизирующей последовательностью, т.е. такой, для которой последовательность значений функционала $\{J[y_n(x)]\}$ сходится к минимуму или к нижней грани значений функционала $J[y]$. Однако из того, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n(x)] = \min J[y(x)],$$

еще не следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$. Минимизирующая последовательность может и не стремиться к функции, реализующей экстремум в классе допустимых функций.

Совершая предельный переход при $n \rightarrow \infty$, в случае существования предела, получим функцию $y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x)$, являющуюся (при некоторых ограничениях, налагаемых на функционал $J[y(x)]$ и на последовательность $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$) точным решением рассматриваемой вариационной задачи. Если не совершать предельного перехода, а ограничиться лишь n первыми членами $y_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x)$, то получим приближенное решение вариационной задачи.

Можно указать условия, обеспечивающие существование абсолютного минимума функционала и его достижение на функциях $\{y_n(x)\}$. В случае, когда ищется экстремум функционала

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx; \quad y(x_0) = a, \quad y(x_1) = b,$$

эти условия таковы:

1. Функция $F(x, y, z)$ непрерывна по совокупности своих аргументов при любом z и при $(x, y) \in D$, где D – замкнутая область плоскости xOy , в которой лежат линии $y_n(x)$.

2. Существуют константы $\alpha > 0$, $p > 1$, β , для которых

$$F(x, y, z) \geq \alpha |z|^p + \beta,$$

каково бы ни было z и для любой точки $(x, y) \in D$.

3. Функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывную частную производную $F_z(x, y, z)$, причём эта производная для любой точки $(x, y) \in D$ есть неубывающая функция от z ($-\infty < z < +\infty$).

Сформулированные выше условия выполняются, в частности, для функционалов вида

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2r(x)y]dx,$$

$$y(x_1) = a, \quad y(x_2) = b,$$

где $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ – заданные непрерывные на $[x_1, x_2]$ функции, причём $p(x)$ имеет непрерывную производную $p'(x)$ и $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$.

Если таким методом определяется абсолютный экстремум функционала, то приближенное значение минимума функционала получается с избытком, так как минимум на любых допустимых кривых не больше, чем минимум того же функционала на части этого класса допустимых кривых – на кривых вида

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x).$$

Приближенное значение максимума функционала по тем же

причинам получается с недостатком.

От удачного выбора системы координатных функций $\{\varphi_i(x)\}$ в значительной степени зависит успех применения этого метода. Во многих случаях достаточно взять линейную комбинацию двух-трёх функций $\varphi_i(x)$ для того, чтобы получить вполне удовлетворительное приближение к точному решению.

Пример 3.2. Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 4y \cos x) dx; \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.4)$$

Решение. Так как второе условие неоднородное, то решение вариационной задачи будем искать в виде

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x),$$

где $\varphi_0(x)$ должно удовлетворять заданным граничным условиям $\varphi_0(x_0) = \varphi_0(0) = 0$, $\varphi_0(x_1) = \varphi_0(\pi/2) = \pi/2$, а все остальные $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, – однородным граничным условиям: $\varphi_k(0) = \varphi_k(\pi/2) = 0$.

Систему координатных функций φ_k выберем следующим образом:

$$\varphi_0(x) = x, \quad \varphi_k(x) = (\pi/2 - x)x^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функции $\varphi_k(x)$, $k=1,2,\dots$, очевидно, удовлетворяют краевым условиям $\varphi_k(0)=\varphi_k(\pi/2)=0$, являются линейно независимыми и представляют в пространстве $C^1[0, \pi/2]$ полную систему.

Возьмем $k=1$. Приближенное решение примет вид: $y_1(x) = x + c \cdot (\pi/2 - x)x$, где, очевидно, $y_1(x)$ при любом значении постоянной c удовлетворяет заданным краевым условиям. Подставляя выражение для $y_1(x)$ в функционал (3.4), получим

$$\begin{aligned} J[y_1] &= \int_0^{\pi/2} [1 + 2c(\pi/2 - 2x) + c^2(\pi/2 - 2x)^2 - x^2 - 2cx^2(\pi/2 - x) - \\ &\quad - c^2x^2(\pi/2 - x)^2 + (4x + 4cx(\pi/2 - x))\cos x] dx = \\ &= \frac{c^2\pi^3}{24} - \frac{c^2\pi^5}{960} - \frac{c\pi^4}{96} - 2\pi c + 8c + 2\pi - 4. \end{aligned}$$

Откуда

$$\frac{\partial J[y_1]}{\partial c} = \frac{c\pi^3}{12} - \frac{c\pi^5}{480} - \frac{\pi^4}{96} - 2\pi + 8 = 0.$$

Из последнего условия находим коэффициент c :

$$c = \frac{5\pi^4 + 960\pi - 3840}{40\pi^3 - \pi^5} \approx -0,36075.$$

Следовательно,

$$y_1(x) = x + \frac{5\pi^4 + 960\pi - 3840}{40\pi^3 - \pi^5} \left(\frac{\pi}{2} x - x^2 \right) \approx x - 0,36075 \cdot \left(\frac{\pi}{2} x - x^2 \right).$$

Сравним точное решение $y(x) = x \sin x$ с приближенным (таблица 3.1):

Таблица 3.1. Приближенное решение по методу Ритца

x	Точное решение	Приближенное решение
0	0	0
0,314159	0,097081	0,171740
0,628319	0,369316	0,414690
0,942478	0,762481	0,728849
1,256637	1,195133	1,114218
1,570796	1,570796	1,570796

Средняя относительная погрешность приближенного решения вычисляется по

формуле $\delta x^* = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \left| \frac{x - x^*}{x^*} \right| \cdot 100\%.$

3.4. Метод прогонки

Поиск экстремума функционала

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx; \quad y(a) = \xi, \quad y(b) = \eta,$$

в классическом вариационном исчислении сводится к решению уравнения Эйлера-Лагранжа, которое представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, при выполнении условий:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b; \quad (3.5)$$

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0; \quad (3.6)$$

$$\alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1, \quad (3.7)$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – известные функции; $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – заданные постоянные.

К задаче (3.5)–(3.7) применяем **метод сеток**. Для этого

1. На отрезке $[a, b]$ выбирается конечное множество точек x_i – узлов сетки:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Количество и расположение узлов сетки выбирается в зависимости от требуемой точности решения задачи. В случае равномерной сетки

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}. \quad (3.8)$$

2. Граничная задача (3.5)–(3.7) заменяется системой алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются величины, «близкие» к решению граничной задачи в точках x_0, x_1, \dots, x_n .

3. Система алгебраических уравнений решается по какому-либо численному алгоритму и тем самым находится приближенное решение граничной задачи.

Для построения системы алгебраических уравнений можно использовать замену производных в задаче (3.5)–(3.7) через значения функции. Замена может быть получена различными способами. Например, воспользовавшись разложением $y(x)$ в ряд Тейлора, в случае сетки (3.8), можно записать:

$$\text{для условия (3.6):} \quad y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \frac{h}{2} y''(\xi_{1i}), \quad x_i \leq \xi_{1i} \leq x_{i+1},$$

$$\text{для условия (3.7):} \quad y'(x_i) = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h} + \frac{h}{2} y''(\xi_{2i}), \quad x_{i-1} \leq \xi_{2i} \leq x_i,$$

$$\text{для уравнения (3.8):} \quad y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h}{6} y'''(\xi_{3i}), \quad x_{i-1} \leq \xi_{3i} \leq x_{i+1},$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} y'''(\xi_{4i}), \quad x_{i-1} \leq \xi_{4i} \leq x_{i+1}.$$

Система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая граничную задачу (3.5)–(3.7) для линейных дифференциальных уравнений второго порядка, обычно имеет вид:

$$a_i y_{i+1} + b_i y_i + c_i y_{i-1} = t_i, \quad i=1, 2, \dots, n-1, \quad (3.9)$$

$$\alpha_{01} y_0 + \beta_{01} y_1 = \gamma_{01}, \quad (3.10)$$

$$\alpha_{02} y_{n-1} + \beta_{02} y_n = \gamma_{02}, \quad (3.11)$$

где $a_i, b_i, c_i, t_i, \alpha_{0k}, \beta_{0k}, \gamma_{0k}$ – некоторые числа.

Решение системы (3.9)–(3.11) по методу **правой прогонки** состоит в следующем:

1) находим значения

$$X_1 = -\beta_{01}/\alpha_{01}, \quad Z_1 = \gamma_{01}/\alpha_{01};$$

2) по рекуррентным формулам

$$X_{i+1} = -\frac{a_i}{b_i + c_i X_i}, \quad Z_{i+1} = \frac{t_i - c_i Z_i}{b_i + c_i X_i}$$

последовательно вычисляем $X_2, Z_2, X_3, Z_3, \dots, X_n, Z_n$;

3) находим $y_n = \frac{1}{\Delta}(\gamma_{02} - \alpha_{02} Z_n)$, где $\Delta = \beta_{02} + \alpha_{02} X_n$;

4) по формуле $y_{i-1} = X_i y_i + Z_i$ вычисляем $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0$.

Первые два этапа называют *прямой прогонкой*, два последующие – *обратной прогонкой*. Они выполнены при условии, что $\alpha_{01} \neq 0, b_i + c_i X_i \neq 0, \Delta \neq 0$.

Метод правой прогонки будет устойчив к погрешностям округления при выполнении условий:

$$|\alpha_{01}| \geq |\beta_{01}|, \quad |b_i| \geq |c_i| + |a_i|, \quad i=1, 2, \dots, n-1. \quad (3.12)$$

При невыполнении этих условий погрешность решения системы (3.9)–(3.11) по описанному алгоритму может быть значительной.

Если выполняются условия:

$$|\beta_{02}| \geq |\alpha_{02}|, \quad |b_i| \geq |c_i| + |a_i|, \quad i=1, 2, \dots, n-1, \quad (3.13)$$

можно применить метод **левой прогонки**, который в этом случае будет устойчив к погрешностям округлений. Он состоит в следующем:

1) находим значения $X_{n-1}^{(1)} = -\alpha_{02}/\beta_{02}, Z_{n-1}^{(1)} = \gamma_{02}/\beta_{02}$;

2) по рекуррентным формулам

$$X_{i-1}^{(1)} = -\frac{c_i}{b_i + a_i X_i^{(1)}}, \quad Z_{i-1}^{(1)} = \frac{t_i - a_i Z_i^{(1)}}{b_i + a_i X_i^{(1)}}$$

вычисляем $X_{n-2}^{(1)}, Z_{n-2}^{(1)}, X_{n-3}^{(1)}, Z_{n-3}^{(1)}, \dots, X_0^{(1)}, Z_0^{(1)}$;

3) находим $y_0 = \frac{\gamma_{01} - \alpha_{01} Z_0^{(1)}}{\Delta_1}, \Delta_1 = \alpha_{01} + \beta_{01} X_0^{(1)}$;

4) по рекуррентным соотношениям $y_{i+1} = X_i^{(1)} y_i + Z_i^{(1)}$ определяем

y_1, y_2, \dots, y_n .

Отметим, что при выполнении ограничений (3.12) и (3.13) будут выполняться условия:

$$\alpha_{01} \neq 0, \quad b_i + c_i X_i \neq 0, \quad i=1, 2, \dots, n-1,$$

или

$$\beta_{02} \neq 0, \quad b_i + a_i X_i^{(1)} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Условия $\Delta \neq 0$ или $\Delta_1 \neq 0$ в этом случае будут выполняться, если система (3.9)–(3.11) имеет единственное решение.

Пример 3.3. Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 4y \cos x) dx; \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.14)$$

Решение. Составим уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt} 2y' - 2y + 4 \cos x = 0 \Rightarrow y'' + y = 2 \cos x.$$

Аппроксимируем граничную задачу

$$y'' + y = 2 \cos x; \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

на сетке $\{x_i\}$, $i = \overline{0, 5}$, с шагом $h = \frac{\pi/2 - 0}{5} \approx 0,314159$ разностной схемой:

$$y_{i+1} + (h^2 - 2)y_i + y_{i-1} = 2h^2 \cos x_i, \quad i = 1, \dots, 4, \\ y_0 = 0, \quad y_5 = \pi/2.$$

Согласно обозначениям, принятым в системе (3.9)–(3.11),

$$a_i = 1; \quad b_i = h^2 - 2; \quad c_i = 1; \quad t_i = 2h^2 \cos x_i; \\ \alpha_{01} = 1; \quad \beta_{01} = 0; \quad \gamma_{01} = 0; \\ \alpha_{02} = 0; \quad \beta_{02} = 1; \quad \gamma_{02} = \pi/2.$$

Для решения полученной системы используем метод правой прогонки. Прямой прогонкой находим прогоночные коэффициенты $X_n, Z_n, n = 1, \dots, 5$.

Обратной прогонкой вычисляем значения y_i по соотношениям: $y_5 = \frac{\gamma_{02} - \alpha_{02} Z_5}{\beta_{02} + \alpha_{02} X_5}$,

$$y_{i-1} = X_i \cdot y_i + Z_i, \quad i = 5, 3, \dots, 1.$$

Результаты вычислений записываем в таблицу 3.2.

Таблица 3.2

x_i	a_i	b_i	c_i	t_i	X_i	Z_i	y_i
0	1	-1,9013	1	0,197392	-	-	0
0,314159	1	-1,9013	1	0,187731	0	0	0,091583
0,628319	1	-1,9013	1	0,159694	0,525955	-0,09874	0,361859
0,942478	1	-1,9013	1	0,116024	0,727088	-0,1879	0,756114
1,256637	1	-1,9013	1	0,060998	0,851632	-0,25883	1,191768
1,570796	1	-1,9013	1	1,21E-17	0,952679	-0,3047	1,570796

Средняя относительная погрешность приближенного решения вычисляется по

формуле
$$\delta x^* = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \left| \frac{x - x^*}{x^*} \right| \cdot 100\% .$$

Для сравнения результатов решения задачи (3.14) различными методами сведем полученные решения в одну таблицу 3.3.

Таблица 3.3. Приближенное решение задачи прямыми методами

x	Точное решение $y = x \sin x$	Приближенное решение		
		Метод Эйлера	Метод Рунге	Метод прогонки
0	0	0	0	0
0,314159	0,097081	0,091583	0,171740	0,091583
0,628319	0,369316	0,361859	0,414690	0,361859
0,942478	0,762481	0,756114	0,728849	0,756114
1,256637	1,195133	1,191768	1,114218	1,191768
1,570796	1,570796	1,570796	1,570796	1,570796
Погрешность методов				

Метод Эйлера и метод прогонки показали одинаковые результаты. Однако, метод Эйлера более громоздкий, нежели метод прогонки.