ЗАДАЧА № 2

Абсолютно жесткий брус *AB* опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен с помощью шарниров к двум стальным стержням.

Требуется подобрать сечения стержней по условию их прочности, приняв запас прочности по отношению к пределу текучести $n_T = 2{,}5$.

Соотношение площадей поперечных сечений стержней указано на расчетных схемах, модуль упругости стали для всех вариантов $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа*.

Студенты строительных специальностей дополнительно определяют допускаемую силу, используя расчет по предельной грузоподъемности, и сравнивают ее с заданной.

Числовые данные берутся из табл.2, расчетные схемы - по рис. 3.

Таблица 2

Числовые данные к задаче № 2

Номер строки	Номер расчет. схемы по рис 2	Размер, м			Сила, кН	Марка стали	Предел текучести, МПа
		a	***b***	***c***			
1	1	1,2	1,6	1,0	3	20	250
2	2	1,2	1,5	0,8	5	30	300
3	3	1,4	1,4	1,0	4	40	340
4	4	1,4	1,6	0,9	2	20	250
5	5	1,4	1,5	0,7	6	50	380
6	6	1,3	1,4	0,8	5	30	300
7	7	1,5	1,2	1,0	3	40Х	800
8	8	1,5	1,1	0,9	4	20	250
9	9	1,2	1,5	1,0	6	40	340
0	10	1.2	1.6	1,0	4	40Х	800

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 2

Основные теоретические сведения и расчетные формулы

В задаче № 2 рассматривается статически неопределимая конструкция, стержневые элементы которой работают на растяжение или сжатие и число неизвестных сил, приложенных к абсолютно жесткому брусу, превышает возможное число уравнений статики. Разность между числом неизвестных усилий

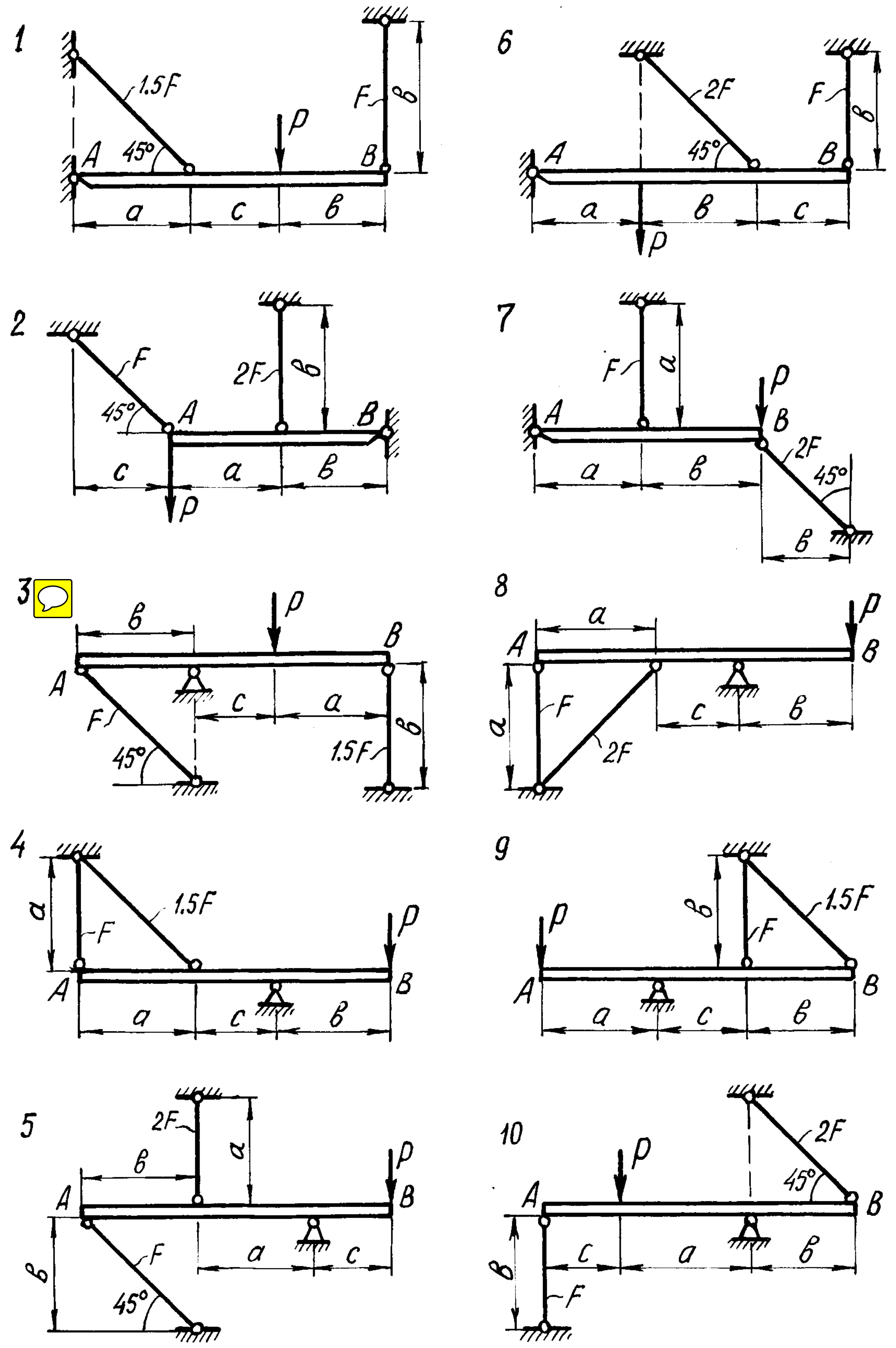

Рис. 3. Расчетные схемы к задаче № 2

и числом возможных уравнений статики определяет степень статической неопределимости системы. Уравнения, недостающие для определения усилий в стержнях, можно получить, рассматривая возможную деформацию системы. Условие, выражающее зависимость между деформациями отдельных элементов системы (конструкции), называется *условием совместности деформаций*. Оно получается из геометрических соотношений между деформациями элементов конструкции. Используемые при решении задачи расчетные формулы приведены в методических указаниях к решению задачи № 1.

Метод расчета статически неопределимой системы по предельной грузоподъемности (по разрушающим нагрузкам) достаточно подробно изложен в учебной литературе и в данном пособии рассмотрен на конкретном примере.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ №2

Жесткий брус *AB* закреплен, как показано на рис.4, и нагружен силой $P = 5$ кН.

Требуется подобрать сечения стержней из условия их прочности. Числовые данные к задаче берутся из табл.2. Для данной задачи примем

a =1,2 м; $в$ =1,4 м; c =1,0 м материал - сталь 40, $\sigma_T = 340$ МПа, $n_T = 2{,}5$,

$E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Вычислим степень статической неопределимости.

Жесткий брус *AB* закреплен с помощью шарнирно-неподвижной опоры и поддерживается двумя деформируемыми стальными стержнями *AE* и *BK*. На опоре *C* (рис.4) - две составляющие реакции X_C и Y_C, реакции в стержнях направлены вдоль их осей и приложены к брусу *AB* в точках *A* и *B*. Направление этих реакций рекомендуется установить после анализа возможного деформированного состояния конструкции.

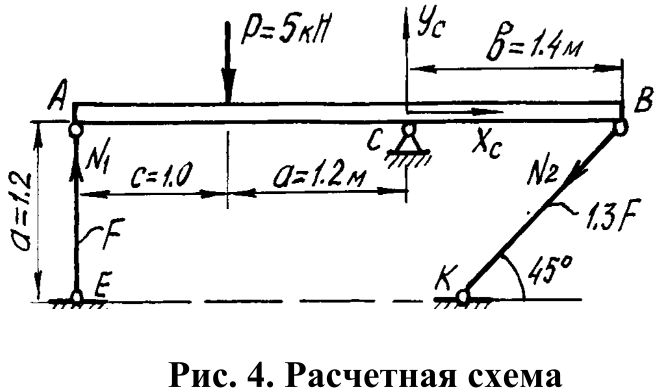

Рис. 4. Расчетная схема

Для плоской системы сил в общем случае ее приложения к конструкции можно составить только три независимых уравнения равновесия. В рассматриваемой задаче к брусу AB приложено четыре неизвестных усилия: две реакции в шарнире и два усилия в стержнях. Разность между числом неизвестных усилий и числом уравнений статики показывает, что для определения этих неизвестных необходимо составить еще одно уравнение статики, в которое входили бы интересующие нас величины. Такое уравнение или несколько подобных уравнений можно получить из геометрических зависимостей между деформациями элементов заданной конструкции.

Рассмотрим конструкцию после деформации ее элементов (рис.5). Под действием силы P жесткий брус может повернуться вокруг точки C, при этом стержни AE и BK будут деформированы. Точки A и B описывают при повороте бруса дуги окружностей, которые ввиду малости перемещений заменяются касательными, т.е. считается, что эти точки перемещаются по перпендикулярам к радиусам AC и BC этих дуг. Точка A смещается вниз и занимает положение A_1, точка B - вверх, занимая положение B_1. Брус, как абсолютно жесткий элемент конструкции, - положение A_1B_1 .Очевидно, что стержень AE сжат и стал короче на величину $AA_1 = \Delta l_1$. Соединив точки K и B_1, находим на чертеже положение стержня BK после его деформации. Опустив перпендикуляр из точки B на прямую B_1K , находим точку B_2.

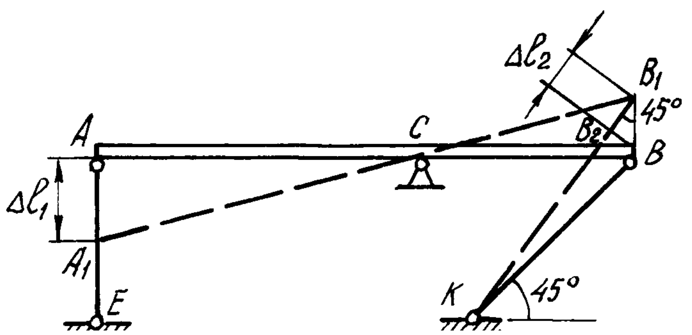

Рис. 5. Схема конструкции после деформации ее элементов

Отрезок $B_1B_2 = \Delta l_2$ - удлинение стержня BK.

Действительно, $\Delta l_2 = KB_1 - KB = KB_1 - KB_2$, так как $KB=KB_2$, и стержень KB растянут.

Выяснив направление усилий в стержнях, показываем векторы этих усилий на схеме недеформированного состояния конструкции (см. рис. 4) и составляем уравнение ее равновесия:

$$\sum M_C = 0: \qquad -N_1 \cdot (c + a) + P \cdot a - N_2 \cdot \sin 45^0 \cdot b = 0 \qquad (2.1)$$

Определения составляющих реакции шарнира X_C, Y_C для решения данной задачи не требуется, и два других уравнения статики не составляются.
Для вычисления усилий в стержнях N_1, N_2 необходимо иметь еще одно уравнение, называемое уравнением совместности деформаций. Это уравнение получаем из геометрических соотношений между деформациями элементов заданной конструкции. При этом ввиду малости деформаций изменением угла наклона стержня *BK* пренебрегаем, считая что $\angle BB_1B_2 = 45^0$.

Тогда

$$BB_1 = \frac{B_1B_2}{\cos 45^0}.$$

Из подобия треугольников A_1AC и B_1BC находим соотношение между деформациями стержней - Δl_1 и Δl_2:

$$\frac{AA_1}{AC} = \frac{BB_1}{BC}; \frac{\Delta l_1}{a + c} = \frac{\Delta l_2}{\cos 45^0 \cdot b};$$

$$\Delta l_1 = \frac{a + c}{b \cdot \cos 45^0} \cdot \Delta l_2 = \frac{(1{,}2 + 1)}{1{,}4 \cdot 0{,}707} \Delta l_2; \quad \Delta l_1 = 2{,}2 \cdot \Delta l_2 \qquad (2.2)$$

Полученная зависимость (2.2) называется условием *совместности деформаций.*

Абсолютные удлинения стержней можно выразить через усилия, используя формулу Гука (1.2):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{N_1 a}{E F}; \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{N_2 a}{E \cdot 1{,}3F \cos 45^0}. \qquad (2.3)$$

Подставив выражения (2.3) в условие совместности деформаций (2.2), получим

$$\frac{N_1 a}{E F} = 2{,}2 \cdot \frac{N_2 \cdot a}{E \cdot 1{,}3F \cos 45^0}; \quad N_1 = 2{,}4 N_2. \qquad (2.4)$$

Решая систему уравнений (2.1) и (2.4), определяем усилия в стержнях N_1, N_2. Для этого подставим значение N_1 из (2.4) в уравнение (2.2):

$$-2{,}4\,N_2\left(c+a\right)+P\,a-N_2\sin 45^0 b=0;$$

$$-2{,}4\,N_2\left(1+1{,}2\right)+5\cdot 1{,}2-N_2\sin 45^0\,1{,}4=0.$$

Решив систему уравнений, получим

$$N_2=0{,}96\,\text{кН};$$

$$N_1=2{,}4\cdot 0{,}96=2{,}3\,\text{кН}.$$

Определив усилия в стержнях, переходим к подбору площадей их поперечных сечений.

Для заданного материала по формуле (1.13) вычислим допускаемое напряжение

$$[\sigma]=\frac{\sigma_T}{n_T}=\frac{340\cdot 10^6}{2{,}5}=136\cdot 10^6\,\text{Па}=136\,\text{МПа}.$$

Определяем напряжения в стержнях и выбираем большее:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{F_1}=\frac{2{,}3\cdot 10^3}{F}\ \text{Па};$$

$$\sigma_2=\frac{N_2}{F_2}=\frac{0{,}96\cdot 10^3}{1{,}3\cdot F}=\frac{0{,}74\cdot 10^3}{F}\ \text{Па}.$$

Площадь сечения F подбираем по условию прочности наиболее нагруженного стержня. Так как σ_1 больше σ_2, используем условие прочности первого стержня:

$$\sigma_1\le[\sigma];\qquad \frac{2{,}3\cdot 10^3}{F}\le 136\cdot 10^6\,\text{Па};$$

$$F\ge 0{,}17\cdot 10^{-4}\,\text{м}^2=0{,}17\,\text{см}^2.$$

Площади сечений стержней принимаем в соответствии с заданным соотношением:

$$F_1=F=0{,}17\,\text{см}^2;\ F_2=1{,}3\cdot F=1{,}3\cdot 0{,}17=0{,}221\ \text{см}^2.$$

Определение допускаемой силы P по условию задачи производится по предельной грузоподъемности конструкции.

Предельным состоянием конструкции называется такое состояние, при котором она начинает деформироваться без увеличения нагрузки.

В данном примере это произойдет в том случае, когда напряжения во всех стержнях достигнут предела текучести

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_T.$$

Усилия в стержнях будут определяться по формулам

$$N_1 = \sigma_T \cdot F_1; \qquad N_2 = \sigma_T \cdot F_2. \qquad (2.5)$$

Нагрузка, соответствующая предельному состоянию, называется *предельной.* Ее величину можно найти из уравнения предельного равновесия, которое получается из уравнения (2.1) после подстановки в него значений N_1, N_2 :

$$-\sigma_T \cdot F_1 \cdot (c+a) + P_{np} \cdot a - \sigma_T \cdot F_2 \cdot \sin 45^0 \cdot b = 0.$$

$$P_{\text{пр}} = \frac{1}{a}\left[\sigma_T\, F_1\,(c+a) + \sigma_T\, F_T \sin 45^0\, b\right] =$$

$$= \frac{1}{1{,}2}\left[340 \cdot 10^6 \cdot 0{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot (1+1{,}2) + 340 \cdot 10^6 \cdot 0{,}221 \cdot 10^{-4} \cdot \sin 45^0 \cdot 1{,}4\right] = 16{,}8 \cdot 10^3\,\text{Н}.$$

Допускаемая нагрузка с учетом заданного коэффициента запаса

$$P_\partial = \frac{P_{np}}{n_T} = \frac{16{,}8 \cdot 10^3}{2{,}5} = 6{,}72 \cdot 10^3 \text{ Н} = 6{,}72 \text{ кН}.$$

Величина допускаемой нагрузки при расчете по предельной грузоподъемности получается большей, чем при расчете по допускаемым напряжениям:

$$\frac{P_{np}}{P_з} = \frac{6{,}72}{5} = 1{,}34.$$

Разница составляет 34 %, что является результатом разных предположений об опасном состоянии конструкции: при расчете по допускаемым напряжениям опасным считается состояние, при котором только в одном стержне напряжение достигает предела текучести. Для статически неопределимых систем расчет по предельной грузоподъемности дает более экономичное решение при назначении размеров сечения, и им широко пользуются в строительной практике.