Часть 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, изучающий методы решения задач, связанных с выбором и расположением элементов какого-либо множества, в соответствии с определенными условиями (правилами).

Перестановка – установленный в конечном множестве порядок. Перестановка – соединение элементов, отличающихся друг от друга порядком расположения. Вычисляется по формуле: $P_n = n!$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ - произведение натуральных чисел от 1 до n.

Задача 1

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?

123, 132, 213, 231, 312, 321

$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Перестановка с повторяющимися элементами.

Даны элементы a, b, …, c

Если a повторяется a раз, b повторяется b раз, c - g раз, т.д. тогда число перестановок будет вычисляться по формуле: $P_n\ \textit{повт} = \dfrac{n!}{a!\,b!\,g!}$

***Задача 2*:** a a a b c

a - повторяется 3 раза

b - повторяется 1 раза

c - повторяется 1 раза

Решение: $P_5\ \textit{повт} = \dfrac{5!}{3!1!1!} = 20$

Размещение – соединение из m элементов взятых из данных n, и отличающихся друг от друга, как элементами, так и порядком их расположения.

A_n^m (число размещений. из n по m)

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

***Задача3*:** Сколько словарей надо издать, чтобы делать переводы с любого из пяти языков на любой другой (русский, английский, немецкий, французский, итальянский).

Решение:

n= 5 m= 2

$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20$

Размещение с повторением.

Если в размещениях есть повторяющиеся элементы, то число таких размещений вычисляется по формуле : A_n^m повт.=n^m

Задача4: Даны 4 цифры : 1, 2, 3, 4. Сколько можно составить двузначных чисел?

Решение:

n= 4 m= 2
12,13,14,21,31,41,23,24,32,42,34,43,11,22,33,44

A_4^2 *повт.*= 4^2= 16

Сочетание – соединения из m элементов, взятых из данных n, отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом.

C_n^m - число сочетаний из n по m.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Задача5: Сколько прямых можно провести через 5 точек, каждые 3 из которых не лежит на одной прямой?

Решение:

n= 5 m= 2

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Сочетания с повторениями.

Если имеются повторяющиеся элементы, то число таких сочетаний вычисляется по формуле: C_n^m повт.=$\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$

Задача6: В кондитерской имеется 4 сорта пирожных. Сколькими способами можно составить набор из 3-х пирожных

Обозначим условно пирожные a, b, c, d

Решение: aaa aab aac aad abc abd acd bbb bba bbc bbd bcb

ccc cca ccd ccb cdd dda ddb ddc

C_4^3 *повт.*$=\frac{(4+3-1)!}{3!(4-1)!}=20$

Замечание: *сочетание* от *размещения* отличается тем, что в сочетаниях порядок расположения элементов не важен, а в размещениях - важен.

Задание к разделу 1.1:

1.Студенты изучают 10 дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание на 1 день из трёх разных дисциплин ?

2.Сколько шестизначных телефонных номеров можно составить из цифр от 1 до 9, если цифры не повторяются? Цифры повторяются?

3.В магазине 12 видов цветов. Сколькими способами можно составить букет из 5-ти цветов ? Сколькими способами можно составить букет из 5-ти различных цветов ?

4.Сколько буквосочетаний можно составить из букв слова “МАТЕМАТИКА” ?

5.На станции 8 запасных путей. Сколькими способами можно поставить на них 5

составов ?

6.Группа из 15 человек выбирает делегацию на конференцию из пяти человек. Сколькими способами можно это сделать ?

7. Сколькими способами можно составить мелодию из пяти нот, используя семь нот. Ноты не повторяются? Ноты могут повторяться?

8.Сколько трехцветных флагов можно сшить, если имеется материя семи различных цветов?

9. В ящике имеется 12 деталей. Сколькими способами можно извлечь 5 из них?

10.У преподавателя 12 задач. Сколькими способами он может составить контрольную работу из 6 задач?

1. 2. Случайные события и их вероятности

Событием (случайным событием) называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта. События обозначаются буквами *A, B, C, ...*

Действие, в результате которого, событие может наступить, называют испытанием или опытом.

Вероятностью случайного события называется численная мера возможности появления события в результате данного опыта.

Вероятностью события **А** называется *отношение числа благоприятствующих этому событию исходов испытания ко всем возможным исходам испытания.* Обозначается *вероятность* события *P(A*)

Вычисляется: $$P(A) = \frac{m}{n}$$

где n – общее число возможных элементарных исходов испытания, а m – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению

Событие*,* которое обязательно произойдет в результате опыта, называется *достоверным*. Вероятность достоверного события равна единице: Р(А) = 1. Событие, которое никогда не может произойти в результате опыта, называется *невозможны* Вероятность невозможного события равна нулю: Р(А) = 0.

Событие *А, о* котором нельзя заранее сказать произойдет оно или нет в результате опыта, называется *случайным*: 0 < *Р(А)* < 1.

Суммой событий А+В называется событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событии А или *В* (безразлично, какого именно, или обоих, если это возможно).

События *А* и *В* называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно при одном и том же испытании. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=B(A)+P(B).$$

Два единственно возможных события называются *противоположными*, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Если одно из этих событий обозначить *А,* то другое (противоположное) обозначают $\bar{A}$

(читается «не А»). Событие означает, что *А* не произошло:

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Произведением двух событий А и В называется событие, состоящее в том, что оба события произошли одновременно. Если появление каждого из событий не зависит от того, произошло или нет другое, то события называются независимыми, и вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P\ (AB) = P() \cdot P(B).$$

Если вероятность появления события *В* изменяется в зависимости от того, произошло или нет событие *А,* то такие события называются зависимыми. Вероятность события *В* при условии, что событие *А* уже произошло, обозначается $P_B\ (A)$. Вероятность произведения зависимых событий определяется формулой

$$P(AB)=P(A) \cdot P_A(B)$$

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Сумма вероятностей событий, образующих полную группу равна единице

Задача 1.

Из урны, в которой находятся 6 черных шаров и 4 белых шара, вынимают одновременно 3 шара. Какова вероятность того, что среди отобранных два шара будут черными?

Решение:

Для вычисления события A (среди отобранных шаров два шара будут черными) воспользуемся формулой

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где n – общее число возможных элементарных исходов испытания

m – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A.

В нашем случае общее число возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь три шара из десяти имеющихся, то есть C_n^k . А общее число благоприятствующих исходов равно числу способов, которыми можно извлечь два черных шара из шести и один белый шар из четырех, то есть

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{\frac{6!}{2!\cdot 4!} \cdot \frac{4!}{1!\cdot 3!}}{\frac{10!}{3!\cdot 7!}} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

Задача 2.

Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению, равна 0,04. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,06. Предполагается, что оба события — независимы. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит обе рекламы?

Решение.

Обозначим А – событие, состоящее в том, что потребитель увидит рекламу продукта по телевидению. В - потребитель увидит рекламу продукта на рекламном стенде.

(АВ)- событие, состоящее в том, что потребитель увидит рекламу продукта по телевидению и на рекламном стенде.

Поскольку оба события независимы, то вероятность пересечения двух событий

P(AB) = *P(A)* · *P(B)* = 0,04 · 0,06 - 0,0024.

Задача 3.

Экспедиция издательства отправила корреспонденцию в три почтовых отделения. Вероятности своевременной доставки в каждую из почтовых отделений равны 0,9; 0,8; 0,7. Какова вероятность того, что только два из почтовых отделения получат почту вовремя?

Испытание: экспедиция отправила корреспонденцию.

Событие А: первое отделение получит корреспонденцию вовремя.

Событие В: второе отделение получит корреспонденцию вовремя.

Событие С: третье отделение получит корреспонденцию вовремя.

$AB\overline{C}$ – событие, состоящее в том, что первое и второе отделения получит корреспонденцию вовремя, а третье не получит корреспонденцию своевременно.

$A\overline{B}C$, $A\overline{C}B$ - рассуждения аналогичные. Таким образом:

P(A)=0,9 $P(\overline{A})$=0,1

P(B)=0,8 $P(\overline{B})$=0,2

P(C)=0,7 $P(\overline{C})$=0,3

$P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3+0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7+0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}398$

Задание 1 к разделу 1.2

1.Студент знает k вопросов из n вопросов программы. Экзаменатор задает три вопроса из имеющихся. Найти вероятность того, что студент знает ответы а) на все три вопроса, б)только на два вопроса

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	20	25	30	30	25	20	30	35	20	25
n	30	30	35	45	40	40	40	45	35	45

Задание 2 к разделу 2

Две фирмы взяли кредиты в банке. Вероятность того, что первая фирма вернет кредит в срок p_1, а вторая p_2. Какова вероятность того, что только одна фирма вернет кредит в срок? Обе фирма вернут кредит в срок? Обе фирмы не вернут кредит в срок?

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	0,9	0,7	0,8	0,7	0,9	0,7	0,85	0,65	0,8	0,7
p_2	0,6	0,4	0,6	0,9	0,8	0,6	0,7	0,9	0,95	0,55

1.3. Последовательность независимых испытаний

Пусть проводится серия из n испытаний, в каждом из которых событие *A* может наступить с одной и той же вероятностью p или не наступить с вероятностью *q* = 1- p, независимо от номера испытания и результата предыдущего опыта. Такие серии опытов называются последовательностью независимых испытаний или схемой Бернулли. В связи со схемой Бернулли рассматриваются такие задачи: 1) найти вероятность того, что в серии из n испытании событие *A* наступит ровно *к* раз: $P_n(k)$ 2) найти вероятность того, что в серии из n испытаний событие A наступит не менее чем *к* раз или не более, чем *к* раз : Указанные вероятности находят по формуле Бернулли:

$$Pn\,(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

если число n невелико

Если число n велико, а p не слишком мало, то для вычисления вероятности можно воспользоваться приближенными (асимптотическими) формулами Муавра-Лапласа (локальная теорема Муавра-Лапласа; интегральная теорема Муавра-Лапласа).

Локальная формула Лапласа

$$P_n(k) = \ = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \qquad \mathrm{x} \ = \frac{\mathrm{k_2 - np}}{\sqrt{\mathrm{npq}}}$$

$$\varphi(-x) = \quad \varphi(x)$$

Интегральная формула Лапласа

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt; \qquad \Phi(\text{-}x) = \text{-}\Phi(x);$$

$$\mathrm{x_1} = \frac{\mathrm{k_1 - np}}{\sqrt{\mathrm{npq}}}; \ \mathrm{x_2} = \frac{\mathrm{k_2 - np}}{\sqrt{\mathrm{npq}}}$$

Значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x \ )$ определяются по специальным таблицам.

Задача 1.

Вероятность того, что некий студент сдаст любой экзамен в сессию на «отлично» равна 0.6. Найти вероятность того, что из пяти экзаменов он сдаст: а) четыре экзамена на «отлично», б) не менее трех экзаменов на «отлично».

Решение:

$p = 0.6$, $n = 5$, $q = 0.4$

а) Испытание: студент сдает экзамен по определенному предмету $n = 5$

(т.к. экзаменов - пять, следовательно число испытаний равно 5)

а) событие А – студент сдал экзамен на «отлично»

$P(A) = \mathrm{p} = 0.6$ q = 1- 0,6 = 0,4

$P_5(4)$ - студент из пяти экзаменов четыре сдаст на «отлично»

Решаем по формуле Бернулли: $Pn\ (k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

$$P_5(4) = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4 = 5 \cdot 0.1296 \cdot 0.4 = 0.2592$$

б) студент сдаст не менее трех экзаменов на «отлично» это означает или 3, или 4, или 5

$P_5(k \geq 3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) =$

$$= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2 + \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^1 + \frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot 0.6^5 0.4^0 =$$
$$= 10 \cdot 0.216 \cdot 0.16 + 0.2592 + 0.216 \cdot 0.36$$
$$= 0.3456 + 0.2592 + 0.07776 = 0.68256$$

Задача 2.

Вероятность брака при изготовлении некоторого изделия равна 0.007. Оценить вероятность того, что из 35 000 изделий число бракованных будет от 190 до 300 штук.

Решение:

Испытание: изготавливается изделие

событие А – изделие оказалось бракованным

$P(A) = p = 0.007; \quad q = 0.993 \qquad n = 35000; \;\; k_1 = 190; \; k_2 = 300;$

По интегральной формуле Лапласа вычисляем:

$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$; Φ(-x) = -Φ(x);

$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \;\; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$

$$x_1 = \frac{190 - 35000 \cdot 0.007}{\sqrt{35000 \cdot 0.007 \cdot 0.993}} = \frac{190 - 245}{\sqrt{243.285}} = -\frac{55}{15.598} = -3.53$$

$$x_2 = \frac{300 - 245}{15.598} = 3.53$$

$$P_{35000}(190 \leq k \leq 300) = \Phi(3.53) - \Phi(-3.53) = \Phi(3.53) + \Phi(3.53)$$
$$= 2 \cdot \Phi(3.53) = 2 \cdot 0.499841 = 0.999682$$

Задание к разделу 1.3

Сформулировать испытание, определить число испытаний, сформулировать событие, определить его вероятность и вероятность противоположного события, вычислить по формуле Бернулли вероятность того, что в n испытаниях событие произойдет *к* раз.

1. 20% компаний прекращают свою деятельность по тем или иным причинам. Какова вероятность того, что среди шести наудачу выбранных организаций четыре прекратят свою деятельность ?

2.Исследования показали, что из каждых десяти призывников трое имеют искривление позвоночника. Комиссия обследует 6 юношей. Какова вероятность того, что 2 из них имеют искривления позвоночника?

3. Совет директоров некоторой фирмы состоит из 7 человек. Вероятность того, что любой из них проголосует за выдвинутого кандидата в президенты фирмы, составляет 0,8. Найти вероятность того, что 5 директоров, проголосуют за данного кандидата в президенты.

4.Из каждых 10 нефтеразведок только 2 бывают успешными. Нефтеразведовательная компания получила финансирование для проведения 5 нефтеразведок. Какова вероятность того, что три нефтеразведки будут удачными?

5.Вероятность продажи за день определенного изделия равна 0,7. Найти вероятность того, что из восьми изделий будет продано пять.

6.Вероятность того, что в данный день торговая база уложится в норму расходов на транспорт, равна 0,7. Какова вероятность того, что; лишь в три дня шестидневной рабочей недели база уложится в норму расходов на транспорт?

7. Стрелок ведет стрельбу по мишени, имея 4 патрона. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что стрелок попадет в мишень 3 раза.

8.Вероятность того, что расход электроэнергии за сутки не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что из ближайших 6 суток только 4 суток пройдут без перерасхода электроэнергии.

9.Игральная кость брошена 7 раз. Какова вероятность того, 6 очков выпадет 5 раз?

10. На работу в данную фирму молодой специалист может устроиться с вероятностью 0,6. Пятеро выпускников университета устраиваются на работу в эту фирму. Какова вероятность того, что на работу примут трех выпускников?

1.4. Случайные величины

Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от многих причин, которые заранее не могут быть учтены. Случайные величины обозначаются X, Y,Z…

Случайные величины делятся на *дискретные и непрерывные*

Дискретная случайная величина (ДСВ) может принимать конечное или бесконечное счетное число (изолированных) значений. Например, можно рассмотреть случайную величину X – число точек на грани игрального кубика, выпадающее при его подбрасывании. При этом возможные значения этой случайной величины: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Законом распределения дискретной случайной величины называется соотношение между ее возможными значениями и их вероятностями (т. е. вероятностями, с которыми случайная величина принимает эти возможные значения).

Закон распределения может быть задан таблицей

Математическим ожиданием M(X) дискретной случайной величины X сумма произведений значений случайной величины x_i на соответствующие вероятности.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i,$$

Дисперсией D (X) дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ называется величина, которая равна

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

Математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение называют числовыми характеристиками случайной величины

Задача 1.

По мишени производится 4 независимых выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле p = 0,8. Требуется: а) найти закон распределения дискретной случайной величины X - числа попаданий в мишень. Найти числовые характеристики этой случайной величины.

Решение:

Испытание: производиться выстрел по мишени

X – число попаданий в мишень.

а) Возможные значения случайной величины x: 0, 1, 2, 3, 4. Соответствующие вероятности вычисляем по формуле Бернулли:

$$p_0 = p(x=0) = C_4^0\, 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0016.$$

$$p_1 = p(x=1) = C_4^1\, 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256.$$

$$p_2 = p(x=2) = C_4^2\, 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}1536.$$

$$p_3 = p(x=3) = C_4^3\, 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096.$$

$$p_4 = p(x=4) = C_4^4\, 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}4096.$$

Закон распределения x представится таблицей:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Проверка: 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1.

$M(X)$= 0· 0,0016 +1·0,0256 +2· 0,1536 + 3· 0,4096 + 4· 0,4096 = 3,2

D(X) = 1^2· 0,0016 + 2^2 · 0,0256 +3^2· 0,4096 + 4^2 · 0,4096 - $(3,2)^2$ =0,1

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}1} = 0{,}31$

Задание к разделу 1.4.

Случайная величина распределена по закону: Найти: p, M(X), D(X)

1.

x	2	5	6
p	0,4	0,1	p

2.

x	3	7	9
p	p	0,1	0,7

3.

x	2	4	6
p	0,4	p	0,2

4.

x	4	5	8
p	0,4	0,3	p

5.

x	3	7	9
p	0,2	0,1	p

6.

x	4	5	7
p	p	0,1	0,5

7.

x	2	4	6
p	0,4	p	0,3

8.

x	4	5	6
p	0,4	0,1	p

9.

x	3	7	8
p	0,4	p	0,3

10.

x	2	3	6
p	0,4	0,5	p