ЧАСТЬ II
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Задача 1

1. Найти общее решение уравнения

$$\mathrm{tg}x \cdot \sin^2 y dx + \cos^2 x \cdot \mathrm{ctg} y dy = 0.$$

Решение

Одно из слагаемых перенесем в правую часть и разделим переменные, т.е. множители с x должны быть с dx, а множители с y с dy. Для этого делим обе части уравнения на произведение $\cos^2 x \cdot \sin^2 y$. Получим

$$\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}dx = -\frac{\mathrm{ctg}y}{\sin^2 y}dy.$$

Дифференциалы равны – равны и интегралы (вернее, отличаются постоянным слагаемым).

$$\int \frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{\mathrm{ctg}y}{\sin^2 y}dy,$$
$$\mathrm{tg}x d\mathrm{tg}x = \mathrm{ctg}x d\mathrm{ctg}x,$$
$$\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} = \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2} + \frac{c}{2},$$
$$\mathrm{tg}^2 x = \mathrm{ctg}^2 x + c,$$

где c – постоянная интегрирования. Удобно было ее взять в том виде, как это сделано в примере.

Задача 2

Найти общее решение уравнения

$$y'\mathrm{tg}x = y.$$

Решение

Запишем производную через дифференциалы, а далее проделаем преобразования, подобные преобразованиям предыдущего примера.

$$\frac{dy}{dx}\mathrm{tg}x = y,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\mathrm{tg} x},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\mathrm{tg} x},$$

$$\frac{dy}{y} = \mathrm{ctg} x dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \mathrm{ctg} x dx,$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln c,$$

$$y = c \sin x.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнений.

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$

$\surd$ $\qquad\qquad$ $\surd$

10. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение, которое можно привести к виду $y' = f(\frac{y}{x})$. Для решения такого уравнения применяют подстановку $\frac{y}{x} = u$ (в некоторых руководствах дробь обозначают через z или через t). С помощью указанной подстановки уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача 1

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Решение

Обозначим $\frac{y}{x} = u$, тогда $y = ux$, а $y' = u'x + u$.

Уравнение примет вид:

$$u'x + u = e^u + u \Rightarrow u'x = e^u \Rightarrow \frac{du}{dx}x = e^u \Rightarrow \frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow e^{-u}du = \frac{dx}{x};$$

$$\int e^{-u}du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -e^{-u} = \ln|x| - \ln c \Rightarrow e^{-u} = \ln\left|\frac{c}{x}\right| \Rightarrow u = -\ln\ln\left|\frac{c}{x}\right|.$$

Возвращаемся к исходной переменной, получим:

$$\frac{y}{x} = -\ln\ln\left|\frac{c}{x}\right| \Rightarrow y = -x\ln\ln\left|\frac{c}{x}\right|.$$

Задача 2

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(x - y)ydx - x^2dy = 0.$$

Решение

С помощью несложных преобразований найдем $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}.$$

Далее решаем уравнение по указанному правилу:

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = \frac{ux^2 - u^2x^2}{x^2} \Rightarrow u'x + u = u - u^2 \Rightarrow$$

$$u'x = -u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}x = -u^2 \Rightarrow -u^{-2}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int (-u^{-2})du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| \ln c \Rightarrow \frac{x}{y} = \ln cx \Rightarrow x = y \ln|cx|.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнений.

1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$

11. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

Для нахождения решения линейного уравнения можно применять два метода (которые конечно эквивалентны): метод Бернулли и метод Лагранжа вариации произвольной постоянной. Продемонстрируем оба метода при решении одного примера.

Задача 1

Решить задачу Коши (найти частное решение уравнения при заданном начальном условии).

$$y' - \mathrm{tg} x y = \cos x, \quad y(0) = 1.$$

Решение

Вначале применим *метод Бернулли.* Ищем решение в виде произведения двух функций $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Уравнение примет вид:

$$u'v + uv' - \mathrm{tg} x uv = \cos x, \quad u'v + u(v' - \mathrm{tg} x v) = \cos x.$$

Выражение в скобках приравниваем к нулю, получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно функции v, которую и найдем.

$$v' - \mathrm{tg} x v = 0,\ \frac{dv}{dx} = \mathrm{tg} x v,\ \frac{dv}{v} = \mathrm{tg} x dx,\ \int \frac{dv}{v} = \int \mathrm{tg} x dx,\ \ln|v| = -\ln|\cos x|$$

(в промежуточных вычислениях полагаем постоянную интегрирования равной нулю, и даже если бы мы ее написали, в конечном итоге она вошла бы в окончательную постоянную интегрирования). Последнее равенство примет вид $v = \frac{1}{\cos x}$. Подставим это значение в уравнение для u.

$$u' \frac{1}{\cos x} + u \cdot 0 = \cos x \Rightarrow u' = \cos^2 x \Rightarrow u = \int \cos^2 x dx =$$

$$= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x + c \right).$$

Общее решение примет вид:

$$y = uv = \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \right) \frac{1}{\cos x}.$$

Для нахождения частного решения используем начальное условие. Получим:

$$1 = \left(0 + \frac{1}{4}\sin 0 + c\right)\frac{1}{\cos 0} \Rightarrow c = 1.$$

Частное решение имеет вид:

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + 1\right)\frac{1}{\cos x}.$$

Метод Лагранжа.

Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$y' - \text{tg} x y = 0.$$

Решая его, получим $y = \frac{c}{\cos x}$.

Считая c функцией x, дифференцируя, находим:

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dc}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot c.$$

Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим:

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dc}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot c - \text{tg} x \cdot \frac{c}{\cos x} = \cos x,$$

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dc}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot c - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{c}{\cos x} = \cos x.$$

Откуда $\frac{dc}{dx} = \cos^2 x$.

Находим c :

$$c(x) = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c_1.$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c_1\right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию.

1. $y' = \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$

12. Задача Коши для уравнений высших порядков. Понижение порядка уравнения.

Задача 1

Решить задачу Коши

$$y''(x^2+1) = 2xy', y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

Решение

Положим $y' = p$, тогда $y'' = p'$. Уравнение примет вид:

$$p'(x^2+1) = 2xp.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные.

$$\frac{dp}{dx}(x^2+1) = 2xp \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{x^2+1}.$$

Переменные разделены, интегрируем:

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2xdx}{x^2+1} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x^2+1| + \ln c_1 \Rightarrow p = c_1(x^2+1).$$

Воспользуемся начальным условием и определим c_1. По условию $y'(0) = 3$, т.е. $p(0) = 3$. Имеем: $3 = c_1(0+1) \Rightarrow c_1 = 3$. Уравнение примет вид: $y' = 3(x^2+1)$. Интегрируем уравнение:

$$y = 3\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + c_2.$$

Снова обращаемся к начальному условию $1 = 3(0+0) + c_2 \Rightarrow c_2 = 1$.

Частное решение имеет вид:

$$y = x^3 + x + 1.$$

Задача 2

Решить задачу Коши

$$2(y')^2 = (y-1)y'', y(0) = 2, y'(0) = e^2.$$

Решение

Положим $y' = p$, тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Уравнение примет вид:

$$2p^2 = (y-1)p\frac{dp}{dy} \Rightarrow p\left(2p - (y-1)\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Первый множитель равен нулю: $p = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = c$. Легко видеть, что это решение уравнения (его называют простейшим или тривиальным решением, так как сразу можно увидеть, что $y = 0$ удовлетворяет уравнению). Найдем решение, удовлетворяющее начальным условиям. Приравняем к нулю выражение в скобках.

$$2p-(y-1)\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{2p} = \frac{dy}{y-1} \Rightarrow \int \frac{dp}{2p} = \int \frac{dy}{y-1} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|p| = \ln|y-1| + \ln c_1.$$

Для определения постоянной интегрирования воспользуемся начальным условием: $y(0) = p(0) = e^2$. Отсюда

$$\frac{1}{2}\ln e^2 = \ln(2-1) + \ln c_1 \Rightarrow 1 = 0 + \ln c_1 \Rightarrow c_1 = e.$$

Тогда

$$\sqrt{p} = e(y-1) \Rightarrow p = e^2(y-1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^2(y-1).$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = e^2 dx \Rightarrow \int (y-1)^{-2} dy = e^2 \int dx \Rightarrow -\frac{1}{y-1} = e^2 x + c_2.$$

Для нахождения c_2 воспользуемся начальным условием:

$$-\frac{1}{2-1} = e^2 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = -1.$$

Решение примет вид:

$$-\frac{1}{y-1} = e^2 x - 1.$$

Откуда после несложных преобразований получим:

$$y = \frac{2 - e^2 x}{1 - e^2 x}.$$

Задания для самостоятельного решения

Даны дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Найти частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

1. $(y+1)^2 y'' = (y')^3, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

13. Метод Лагранжа вариации постоянных

Задача

Найти общее решение уравнения.

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}.$$

Решение Вначале решаем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - y' = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 - k = 0,$$

его корни $k_1 = 0, k_2 = 1$ и получаем общее решение однородного уравнения

$$Y = C_1 + C_2 e^x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y = C_1(x) + C_2(x)\, e^x.$$

Для определения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляется система алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x) \cdot e^x = 0 \\ C_1'(x) \cdot 1' + C_2'(x) \cdot (e^x)' = \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x) \cdot e^x = 0 \\ C_1'(x) \cdot 0 + C_2'(x) \cdot e^x = \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

Неизвестными в этой системе являются $C_1'(x), C_2'(x)$. Решим систему по формулам Крамера (хотя можно решать и другими методами, например, методом подстановки.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x; \Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \frac{1}{1+e^x} & e^x \end{vmatrix} = -\frac{e^x}{1+e^x}; \Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+e^x} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+e^x}.$$

Находим неизвестные:

$$C_1'(x) = -\frac{1}{1+e^x}, C_2'(x) = \frac{1}{e^x(1+e^x)}.$$

$C_1(x)$ и $C_2(x)$ находим интегрированием.

$$C_1(x) = -\int \frac{dx}{e^x} = -\int \frac{e^x dx}{e^x(e^x+1)} = -\int \frac{d(e^x)}{e^x(e^x+1)} = -\int \frac{dt}{t(t+1)} = -\int \frac{(t+1)-t}{t(t+1)}dt =$$
$$= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t+1} = -\ln t + \ln(t+1) = -\ln e^x + \ln(e^x+1) = -x + \ln(e^x+1).$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{e^x(e^x+1)} = \left| e^x = t, x = \ln t, dx = \frac{dt}{t} \right| = \int \frac{dt}{t^2(t+1)}.$$
$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t+1}$$

$$1 = A(t+1) + Bt(t+1) + Ct^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 = B + C \\ 0 = A + B \\ 1 = A \end{cases} \Rightarrow A = 1; B = -1; C = 1.$$

$$\int \frac{dt}{t^2(t+1)} = \int t^{-2}dt - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{t} - \ln t + \ln(t+1) =$$
$$= -\frac{1}{e^x} - \ln e^x + \ln(e^x+1) = -e^{-x} - x + \ln(e^x+1).$$

Частное решение принимает вид:

$$y^* = -x + \ln(1+e^x) + \left[-e^{-x} - x + \ln(1+e^x)\right] e^x.$$

Теперь можно записать общее решение заданного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = Y + y^* = C_1 + C_2 e^x - x + \ln(1+e^x) + \left[-e^{-x} - x + \ln(1+e^x)\right] e^x.$$

Задания для самостоятельного решения

Даны линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка. Найти общее решение методом вариации произвольных постоянных.

1. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

14. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Задача 1

Решить задачу Коши:

$$y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x y\left(0\right) = -\frac{1}{6}, y'\left(0\right) = -\frac{1}{2}.$$

Решение Решим вначале соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $k_1 = 2, k_2 = 3$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Ищем частное решение методом неопределенных коэффициентов.

Представим правую часть уравнения в виде

$$13\sin 3x = e^{0x}\left(0 \cdot \cos 3x + 13\sin 3x,\right)$$
$$\alpha = 0, \beta = 3 \Rightarrow \alpha \pm \beta i.$$

Не являются корнями характеристического уравнения; многочлены, стоящие перед $\cos 3x$ и $\sin 3x$ имеют нулевую степень, т.е. являются константами. В силу всего отмеченного частное решение ищем в виде

$$\overline{y} = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Находим первую и вторую производные $\overline{y}$ и подставляем в уравнение.

$$\overline{y}' = -3a\sin 3x + 3Bcos3x, \overline{y}'' = -9A\cos 3x - 9b\sin 3x.$$
$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 5\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) +$$
$$+6\left(a\cos 3x + B\sin 3x\right) = 13\sin 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 3x$ и $\sin 3x$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -3\left(A + 5B\right) = 0 \\ 3\left(5A - B\right) = 13. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $A = \frac{5}{6}, B = -\frac{1}{6}$.

Частное решение принимает вид

$$\overline{y} = \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x.$$

Теперь запишем общее решение заданного уравнения.

$$y = Y + \overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x.$$

Для получения частного решения найдем производную от y.

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}\left(-15\sin 3x - 3\cos 3x\right).$$

Воспользовавшись начальными условиями, запишем систему уравнений для определения постоянных

$$\begin{cases} -\frac{1}{6} = C_1 + C_2 + \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} = 2C_1 + 3C_2 - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = -2.$$

Получаем частное решение

$$y = -2e^{2x} + e^{3x} + \frac{1}{6}\left(5\cos 3x\right) - \sin 3x.$$

Задача 2

Найти решение ЛНДУ

$$y'' - 4y' + 4y = x \cdot e^{2x}.$$

Решение Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y'' - 4y' + 4 = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 2.$$

Получаем общее решение соответствующего характеристического уравнения

$$Y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{2x}.$$

Для нахождения частного решения заметим, что правая часть исходного уравнения имеет вид

$$xe^{2x} = P\left(x\right) e^{\alpha x}.$$

$P\left(x\right)$ - многочлен первой степени, и $\alpha = 2$ является двукратным корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде

$$\overline{y} = e^{2x} \cdot (Ax + B) \cdot x^2 = e^{2x}\left(Ax^3 + Bx^2\right).$$

Далее, как и в первом примере находим постоянные A и B. Получаем частное. А затем и общее решение заданного уравнения. Оно имеет вид

$$y = e^{2x}\left(C_1 x + C_2 + \frac{1}{6}x^2\right).$$

Задания для самостоятельного решения

Даны линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (со специальной правой частью). Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

1. $y'' + 2y' + y = -2\sin x + x + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

15. Нахождение изображения

Примеры выполнения задания

1. Найти оригинал по изображению

1.$x\left(t\right)=\cos^{3}t=\cos t\cdot\cos^{2}t=\cos t\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos t+\cos t\cdot\cos 2t\right)=$
$=\frac{1}{2}\left(\cos t+\frac{\cos 3t+\cos t}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}\cos 3t+\frac{1}{4}\cos t=\frac{1}{4}\cos 3t+\frac{3}{2}\cos t.$

По таблице находим изображение полученных функций:

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^{2}+1};\cos 3t \risingdotseq \frac{p}{p^{2}+9}.$$

Окончательно имеем:

$x\left(t\right)=\cos^{3}t \risingdotseq \frac{1}{4}\frac{p}{p^{2}+9}+\frac{3}{4}\frac{p}{p^{2}+1}=\frac{p\left(p^{2}+7\right)}{(p^{2}+9)(p^{2}+1)}.$

2. Найти оригинал по изображению

$$x\left(t\right)=e^{t-2}+\left(t-1\right)^{2}=\frac{1}{e^{2}}\cdot e^{t}+t^{2}-2t+1.$$

По таблице находим:

$$e^{t}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}\frac{1}{p-1};t\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}\frac{1}{p^{2}};t^{2}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}\frac{2}{p^{3}};1\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}\frac{1}{p}.$$

Окончательно имеем:
$x\left(t\right)=e^{t-2}+\left(t-1\right)^{2}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}\frac{1}{e^{2}}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{2}{p^{3}}-\frac{2}{p^{2}}+\frac{1}{p}=\frac{1}{e^{2}(p-1)}+\frac{2-2p+p^{2}}{p^{3}}.$

3. Найти оригинал по изображению

$$x\left(t\right)=\int_{0}^{t}e^{\tau}\cdot\sin 2\tau d\tau.$$

По таблице находим: $\sin 2t\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}\frac{2}{p^{2}+4}$. Затем, применяя теорему смещения (затухания), находим: $e^{t}\cdot\sin 2t\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}\frac{2}{\left(p-1\right)^{2}+4}$. Окончательно, применяя теорему интегрирования оригинала, получаем:
$x\left(t\right)=\int_{0}^{t}e^{\tau}\cdot\sin 2\tau d\tau\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}\frac{2}{p\left[\left(p-1\right)^{2}+4\right]}=\frac{2}{p(p^{2}-2p+5)}.$

4. Найти оригинал по изображению

$$x\left(t\right)=t^{2}\cdot\sin 2t.$$

По таблице находим: $t\langle\sin 2t\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}\frac{4p}{\left(p^{2}+4\right)^{2}}$. Применим теорему дифференцирования изображения:
$-t\cdot t\sin 2t\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}\left[\frac{4p}{\left(p^{2}+4\right)^{2}}\right]'$ или $t^{2}\cdot\sin 2t\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}-4\left[\frac{p}{\left(p^{2}+1\right)^{2}}\right]'=-\frac{4\left(4-3p^{2}\right)}{\left(p^{2}+4\right)^{2}}.$

Замечание. Применяя дифференцирование изображения еще раз, можно найти изображение оригинала $t^{3}\cdot\sin 2t$ и т.д.

5. Найти оригинал по изображению

$$x\left(t\right)=\frac{\sin 3t-t^{2}}{t}.$$

Деление оригинала на t приводит к интегрированию изображения. Найдем изображение числителя, для чего воспользуемся таблицей:

$$\sin 3t-t^{2}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}\frac{3}{p^{2}+9}-\frac{2}{p^{3}}.$$

А теперь воспользуемся теоремой интегрирования изображения:

$$\frac{\sin 3t-t^{2}}{t}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}\int_{p}^{\infty}\left(\frac{3}{u^{2}+9}-\frac{2}{u^{3}}\right)du=\lim_{b\to\infty}\int_{p}^{b}\left(\frac{3}{u^{2}+9}-\frac{2}{u^{3}}\right)du=$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\mathrm{arctg}\frac{u}{3}+\frac{1}{u^2}\right]_p^b = \lim_{b\to\infty}\left(\mathrm{arctg}\frac{b}{3}-\mathrm{arctg}\frac{p}{3}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{p^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{p}{3}-\frac{1}{p^2}.$$

Итак, $\frac{\sin 3t - t^2}{t} \doteqdot \frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{p}{3}-\frac{1}{p^2}$.

6. Найти оригинал по изображению

$$x(t) = (t-3)\cdot e^{t-2}\cdot\sigma(t-2).$$

Как видим, оригинал задан с запаздыванием. Вначале преобразуем функцию.

$$(t-3)\cdot e^{t-2}\cdot\sigma(t-2) = [(t-2)-1]\cdot e^{t-2}\cdot\sigma(t-2) =$$

$$= (t-2)\cdot e^{t-2}\cdot\sigma(t-2) - e^{t-2}\cdot\sigma(t-2).$$

Запишем вспомогательную функцию без запаздывания и найдем ее изображение, используя таблицу

$$t\cdot e^t - e^t \doteqdot \frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{p-1}.$$

Используя теорему запаздывания, окончательно получим

$$x(t) = (t-3)\cdot e^{t-2}\cdot\sigma(t-2) \doteqdot \frac{e^{-2p}}{(p-1)^2}-\frac{e^{-2p}}{p-1} = \frac{e^{-2p}(p-2)}{(p-1)^2}.$$

7. Найти оригинал по изображению

$$x(t) = \int_0^t e^{\tau-t}\cdot\mathrm{ch}5\tau d\tau.$$

Данный оригинал называется сверткой, а изображение свертки равно произведению изображений функций, заданных под знаком интеграла. Но вначале преобразуем подинтегральную функцию.

$$\int_0^t e^{\tau-t}\cdot\mathrm{ch}5\tau d\tau = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\cdot\mathrm{ch}5\tau d\tau.$$

Имеем $e^{-t} \doteqdot \frac{1}{p+1}$; $\mathrm{ch}5t \doteqdot \frac{p}{p^2-25}$.

Окончательно имеем

$$x(t) = \int_0^t e^{\tau-t}\cdot\mathrm{ch}5\tau d\tau \doteqdot \frac{1}{p-1}\cdot\frac{p}{p^2-25} = \frac{p}{(p-1)(p^2-25)}.$$

Задания для самостоятельного решения

По заданному оригиналу найти изображение.

1. $x(t) = \sin\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$, $x(t) = \int_0^t e^{2(\tau - t)} \sin \tau d\tau$.

16. Нахождение оригинала по известному изображению

Примеры выполнения задания

1. Найти оригинал по изображению

$$X(p) = \frac{2p-1}{p^2-2p+5}.$$

Данная дробь простейшая. Дополним знаменатель до полного квадрата и приведем дробь к виду

$$\frac{2p-1}{p^2-2p+5} = \frac{2p-1}{p^2-2p+1+4} = \frac{2p-1}{(p-1)^2+4} = \frac{2(p-1)+1}{(p-1)^2+2^2} =$$

$$= \frac{2(p-1)}{(p-1)^2+2^2} + \frac{1}{(p-1)^2+2^2} = \frac{2(p-1)}{(p-1)^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(p-1)^2+2^2}.$$

Выражение приведено к такому виду, что можно воспользоваться таблицей. Окончательно получаем

$$X(p) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}} 2e^t \cdot \cos 2t + \frac{1}{2}e^t \cdot \sin 2t = \frac{1}{2}e^t(4\cos 2t + \sin 2t).$$

2. Найти оригинал по изображению

$$X(p) = \frac{e^{-4p}}{p^2+9}.$$

Вначале найдем оригинал вспомогательной функции, воспользовавшись таблицей

$$X_1(p) = \frac{1}{p^2+3^2} = \frac{1}{3}\frac{3}{p^2+3^2} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}} \frac{1}{3}\sin 3t.$$

Множитель e^{-4t}означает, что оригинал должен быть задан с запаздыванием. Итак,

$$X(p) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}} \frac{1}{3}\sin 3(t-4)\cdot\sigma(t-4).$$

3. Найти оригинал по изображению

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

Это задание можно решить двумя способами.

Первый способ. Разложим дробь на сумму простейших дробей (как это делали, интегрируя рациональные дроби).

$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+1}$

$$Ap^2 + A + Bp^2 + Cp = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=-1, C=0.$$

Следовательно, $X\left(p\right)=\frac{1}{p(p^2+1)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}1-\cos t$.

Второй способ. Используем теорему о свертке.

$\frac{1}{p(p^2+1)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+1}$

$\frac{1}{p}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}\sigma\left(t\right);\frac{1}{p^2+1}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}\sin t\Rightarrow\frac{1}{p(p^2+1)}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}\sigma\left(t\right)*\sin t=$

$=\int_0^t\sigma\left(\tau\right)\cdot\sin\left(t-\tau\right)d\tau=\int_0^t\sin\left(t-\tau\right)d\tau=\cos\left(t-\tau\right)\big|_0^t=\cos 0-\cos t$.

4. Найти оригинал по изображению

$$X\left(p\right)=\frac{1}{p\left(p+1\right)\left(p-4\right)}.$$

Разложим дробь на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{1}{p(p+1)(p-4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p-4},$$
$$1=A\left(p+1\right)\left(p-4\right)+Bp\left(p-4\right)+Cp\left(p+1\right).$$

Полагая последовательно $p=0,p=-1,p=4$, находим коэффициенты. $A=-\frac{1}{4},B=\frac{1}{5},C=\frac{1}{20}$.

Заданная функция принимает вид:

$X\left(p\right)=\frac{-\frac{1}{4}}{p}+\frac{\frac{1}{5}}{p+1}\frac{\frac{1}{20}}{p-4}$.

Откуда по таблице находим

$$X\left(p\right)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{20}e^{4t}.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти оригинал по изображению.

1. $X(p)=\frac{e^{-\frac{3}{2}p}}{(p-3)^2}$, $X(p)=\frac{p^2+1}{(p-2)(p+3)(p+1)}$.

17. Решение дифференциальных уравнений операционным методом

Задания для самостоятельного решения

Задания 6 решить операционным методом.

18. Задача электротехники

Задача

Конденсатор емкости c включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

Составление дифференциального уравнения.

В момент t заряд конденсатора q и сила тока $I = \frac{dq}{dt}$. К этому моменту t в цепи электродвижущая сила E, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора $\frac{q}{c}$, т.е.

$$E = U - \frac{q}{c}.$$

По закону ома сила тока $I = \frac{U}{R}$, или иначе,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - \frac{q}{c}}{R}.$$

Тогда дифференциальное уравнение процесса примет вид:

$$R\frac{dq}{dt} = U - \frac{q}{c}$$

или

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{Rc}q = \frac{U}{R}.$$

Требуется решить это уравнение при заданных значениях U, R, c, а также при начальном условии $q(0) = q_0$. Все указанные значения даны в таблице.

	U вольт	R ом	c фарад $n \cdot 10^{-2}$	$q(0) = n \cdot 10^{-3}$
1	201	801		
2	202	802		
3	203	803		
4	204	804		
5	205	805		
6	206	806		
7	207	807		
8	208	808		
9	209	809		
19	210	810		
11	211	811		
12	212	812		
13	213	813		
14	214	814		
15	215	815		
16	216	816		
17	217	817		
18	218	818		
19	219	819		
20	229	820		
21	221	821		
22	222	822		

	U вольт	R ом	c фарад $n \cdot 10^{-2}$	$q\,(0) = n \cdot 10^{-3}$
23	223	823		
24	224	824		
25	225	825		
26	226	826		
27	227	827		
28	228	828		
29	229	829		
30	230	830		