

Томский государственный архитектурно-строительный
университет

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТИ

Методические указания
к практическим занятиям

Составитель Н.С. Дорофеева

Томск 2010

Различные подходы к определению вероятности: методические указания / Сост. Н.С. Дорофеева. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.- строит. ун-та, 2010. – 53 с.

Рецензент доцент О.В. Иванова

Редактор Е.Ю. Глотова

Методические указания по дисциплине ЕН.Ф.1 «Математика» к практическим занятиям и расчетно-графической работе по теме «Различные подходы к определению вероятности» предназначены для студентов всех специальностей и всех форм обучения.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол № 7 от 25 мая 2010 г.

Утверждены и введены в действие проректором по учебной работе В.В. Дзюбо

с 1.06.2010
до 1.06.2015

Оригинал-макет подготовлен автором.

Подписано в печать
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2,79. Тираж 300. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей – математическая наука, которая в абстрактной форме изучает закономерности в массовых случайных явлениях. Хотя исход отдельного явления или эксперимента неизвестен, но суммарный результат большого числа однородных случайных событий можно, оказывается, предсказать.

Теория вероятностей позволяет количественно оценить объективные связи между опытом и наступающим в результате его проведения событием, т. е. оценить связь между диалектическими категориями необходимости и случайности.

С помощью метода абстрагирования теория вероятностей создает математические модели изучаемых явлений и успешно решает их. Так, расчеты с помощью теории вероятностей помогают грамотно организовать работу порта, хотя суда, совершающие дальние рейсы, по ряду причин приходят в порт не по расписанию.

Приведем еще пример. Оказалось, при формировании типографских касс, которые раньше использовались в типографском деле, нерационально было запасать все буквы в одинаковом количестве, так как некоторые из них встречались в тексте значительно реже, чем другие. В большем количестве запасали буквы, которые в тексте встречались чаще. Исследования, проведенные над литературными произведениями, дали следующие оценки относительных частот букв русского алфавита: «о» – 0,090; «е, ё» – 0,072; «а», «и» – 0,062; «т», «н» – 0,053; реже всего встречаются буквы «э» и «ф» – 0,02. Подобные исследования относительно телеграфных сообщений привели к выводу, что применяемые сейчас телеграфные коды (азбука Морзе) не являются достаточно экономичными.

По форме проявления причинных связей законы природы и общества делятся на два класса: детерминированные и статистические.

К детерминированным относятся такие законы, которые могут быть описаны точными математическими соотношениями. При таких законах будущее состояние системы может быть предсказано, то есть каждый раз при выполнении условий S наблюдается один и тот же результат. Так, законы классической механики позволяют вычислять положение камня, выпущенного из рук, в любой момент времени. Аналогично законы небесной механики дают возможность вычислять и однозначно предсказывать положение планет солнечной системы в любой момент времени. Это детерминированные законы, для изучения которых нет необходимости использовать теорию вероятностей.

Вместе с тем многие закономерности микро- и макромира не относятся к детерминированным, то есть они не поддаются точному математическому описанию. Будущее состояние системы при выполнении тех же условий S определяется неоднозначно и может быть различным. Так, высота волн на поверхности моря, колебания акустического давления в трубе, положение электрона в определенный момент времени не могут быть описаны точно, а лишь с некоторой вероятностью. Такого рода законы называются статистическими. Статистические закономерности широко распространены в природе и составляют один из предметов изучения многих наук (физики, квантовой механики, термодинамики, демографии и др.). Теория вероятностей является теоретической базой изучения статистических закономерностей. Она позволяет открывать и предсказывать новые факты теоретическим путем.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В теории вероятностей рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторять при неизменном комплексе условий произвольное число раз (по крайней мере, тео-

ретически). Любой наблюдаемый результат интерпретируется как случайный исход опыта – элементарное случайное событие.

Множество взаимоисключающих исходов такое, что результатом эксперимента всегда является один и только один исход, называется пространством элементарных событий и обозначается Ω .

Любое подмножество пространства Ω является событием. Совокупность всех наблюдаемых в данном опыте событий составляет поле событий для данного эксперимента. Множество Ω может быть дискретным, то есть иметь конечное или счетное количество элементарных исходов, или непрерывным, когда число элементарных исходов несчетное.

Событие называют достоверным, если оно обязательно происходит при осуществлении данного комплекса условий. Если перевернуть стакан с водой (опыт проходит не в космосе), то вода обязательно выльется. Это достоверное событие. Невозможным является событие, которое никогда не произойдет при заданном комплексе условий. Например, если рукой бросить камень в небо, то он не улетит в космос. Аналогично, невозможным событием является попадание в мишень 5 раз, если произведено только три выстрела. Само пространство элементарных событий Ω является достоверным событием, а невозможное событие ассоциируется с пустым множеством ($\emptyset$). Естественно считать случайным событием такой исход эксперимента, который при реализации данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти. Случайные события обозначают большими буквами латинского алфавита $A, B, C \dots$. Приведем примеры случайных событий: выпадение герба при подбрасывании монеты; попадание в цель при стрельбе; выпадение пятерки при бросании игральной кости и другие.

Два события A и B называют несовместными, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. События A и B называются совместными, если в результате эксперимента возможно их совместное осуществление. На-

пример, при параллельном соединении возможно протекание тока через все параллельные участки – это совместные события. К несовместным событиям можно отнести события: выпадение тройки и выпадение четного числа при однократном бросании кости. Попарно несовместными событиями являются элементарные исходы опыта.

Элементарные исходы, при наступлении которых происходит событие A , называются благоприятствующими этому событию. Так, элементарные события – выпадение 2; выпадение 4 и выпадение 6 при бросании игральной кости благоприятствуют событию A – выпадению четной цифры. События A и B называются эквивалентными, если каждое из них благоприятствует другому, то есть наступление одного сопровождается наступлением другого. Например, эквивалентными будут события A и B , где событие A – число оканчивается на ноль, событие B – число делится на 10.

Суммой событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из слагаемых событий. Например, в опыте, когда по мишени стреляют два стрелка, событие попадание в цель предполагает: попадание только первого стрелка, или попадание только второго стрелка, или попадание обоих, то есть является суммой этих событий.

Произведением событий называется событие, в результате которого наступают все умножаемые события. Например, если электрическая цепь содержит несколько последовательно соединенных элементов, то прохождение тока через этот участок цепи будет возможно, если ток пройдет через каждый из последовательно соединенных элементов, то есть событие прохождение тока через весь участок цепи – произведение событий – прохождение тока и через первый элемент, и через второй и т. д.

Событие $\bar{A}$ противоположно событию A , если оно несовместно с A , а их сумма является достоверным событием. Выпадение герба и выпадение решки в опыте подбрасывания монеты – противоположные события; попадание в цель и промах –

противоположные события в опыте, когда производится выстрел по мишени.

События считаются равновозможными, если ни одно из них не происходит чаще других; это возможно, если физические условия при повторении опыта остаются без изменения и соблюдаются условия «симметрии». Так в случае с игральной костью при однократном бросании равновозможно выпадение любой из шести граней, если кость обладает геометрической симметрией и все ее грани выполнены из однородного материала. Выпадение конкретной грани – это элементарный исход, которым заканчивается опыт. Таких возможных исходов в данном опыте шесть. Обозначим ω_1 – выпадение грани с цифрой 1; ω_2 – выпадение грани с цифрой 2 и т. д., тогда множество всех элементарных исходов, то есть пространство Ω , запишется $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4; \omega_5; \omega_6\}$. Все элементарные исходы – несовместные события, так как при однократном бросании невозможно выпадение нескольких граней, то есть выпадает какая-нибудь одна. Именно поэтому элементарные исходы являются единственно возможными событиями. Кроме элементарных событий, в опыте с игральной костью можно назвать и более сложные события:

выпадение четного числа = $\{\omega_2 + \omega_4 + \omega_6\}$;

выпадение нечетного числа = $\{\omega_1 + \omega_3 + \omega_5\}$;

выпадение числа, кратного трем = $\{\omega_3 + \omega_6\}$ и др.

Все события элементарные и сложные образуют поле событий данного опыта.

Рассмотрим другой эксперимент. На телефонную станцию в течение времени T поступают вызовы, их число, хотя неизвестно, но является конечным, то есть $\leq k$. В данном эксперименте возможны следующие элементарные исходы: ω_0 – не было вызовов, ω_1 – поступил один вызов, ω_2 – поступило два

вызова и т. д. ω_k – поступило k вызовов. Тогда пространство элементарных событий запишется: $\Omega = \{\omega_0; \omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots \omega_k\}$. Все элементарные исходы – события равновозможные, так как в эксперименте не говорится о каких-либо особенностях или изменениях в опыте в течение времени T . Элементарные исходы являются в данном опыте несовместными событиями, так как возможен только какой-то один исход при однократном проведении эксперимента в течение времени T . Кроме элементарных событий, в данном опыте можно указать сложные события, например: на станцию в течение времени T поступило не более трех вызовов $= \{\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3\}$; на станцию поступило четное число вызовов $= \{\omega_2 + \omega_4 + \dots + \omega_{2n}\}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, причем $2n \leq k$; на станцию поступило не менее 10 вызовов $= \{\omega_{10} + \omega_{11} + \dots + \omega_k\}$ в течение времени T и другие события.

2. РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТИ

Понятие вероятности события является основным в теории вероятностей. Известно, что различные события обладают различной степенью возможности осуществления и очень редко среди них встречаются равновозможные. Так, у хорошего шахматиста победа и ничья предпочтительней, нежели поражение; а у хорошего наводчика больше шансов на попадание в цель, чем у начинающего стрелка. Для оценки объективной возможности появления события в теории вероятностей введено следующее понятие.

Под вероятностью события понимается количественная оценка возможности наступления события при данных условиях.

Вероятность события принято обозначать буквой p или P .

Существует несколько подходов к определению вероятности. Каждый из них имеет свои недостатки и преимущества.

2.1. Классическое определение вероятности

Рассмотрим одну из математических моделей для явлений с конечным числом исходов, известную под названием «классическая вероятностная схема». Из определения пространства элементарных событий Ω следует, что его образуют попарно несовместные и единственно возможные события. Всякий эксперимент, для которого пространство элементарных событий – конечное множество равновозможных событий, называется классической схемой. Следовательно, если опыт проходит по классической схеме, то элементарные исходы опыта – несовместные, единственно возможные, равновозможные события, и их число конечно. Пусть множество исходов опыта состоит из n равновозможных элементарных событий. Если m из них благоприятствуют некоторому событию A , то возможность его появления разумно характеризовать отношением m к n , поэтому естественно следующее определение вероятности события A , которое называется классическим:

если опыт проходит по классической схеме, то вероятностью события A называют отношение числа m к n , где m – число исходов, благоприятствующих событию A ; n – число всех элементарных исходов опыта, то есть $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вернемся к рассмотрению опыта с бросанием игральной кости.

Пример 1. Опыт – однократное бросание игральной кости. Найти вероятность событий: а) A – выпало четное число; б) B – выпало число, кратное трем.

Опыт проходит по классической схеме, так как число возможных исходов конечно и равно 6; все исходы в силу симметрии опыта – равновозможные события; в результате опыта наблюдается только один исход и, кроме того, все исходы являются попарно несовместными событиями. В связи с указанным, вероятность возможных событий A и B можно подсчитать по классической формуле. Вспомним, что $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4; \omega_5; \omega_6\}$, то есть $n = 6$.

Так как событие A – выпадение четного числа может произойти в результате выпадения двойки, четверки или шестерки, то благоприятствуют событию A три исхода.

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, m = 3, \text{ следовательно, } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Событию B благоприятствуют два исхода, так как на 3 делятся только 3 и 6, то есть $B = \{\omega_3, \omega_6\}$, $m = 2$, поэтому

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Иногда для подсчета общего числа исходов и числа исходов, благоприятствующих конкретному событию, приходится использовать комбинаторные формулы (приложение).

Пример 2. Первенство по баскетболу оспаривают 18 лучших команд, которые путем жеребьевки распределяются на две группы по 9 команд в каждой. Пять лучших команд обычно занимают первые места. Какова вероятность попадания всех лидирующих команд в одну группу?

Введем обозначение: событие A – все 5 лидирующих команд попали в одну группу. Условия опыта соответствуют классической схеме. Исходы опыта – различные варианты комплектования группы. Их число конечно. В результате жеребьевки происходит только один из вариантов комплектования; между собой варианты комплектования – несовместные события, причем можно предположить, что они равновозможные, так как не

говорится о каких-либо преимуществах или особенностях комплектования – распределение происходит по жребию.

Общее число групп, которые могут быть составлены из 18 команд по 9 в каждой, $n = C_{18}^9$. Событию A благоприятствует столько элементарных исходов, сколько можно составить групп, в каждой из которых 5 лидирующих команд и четыре команды из числа остальных 13. При этом возможны две ситуации: 1) все лидирующие команды попали в первую группу, тогда $m_1 = C_5^5 \cdot C_{13}^4$ и 2) все лидирующие команды попали во вторую группу, тогда $m_2 = C_{13}^4 \cdot C_5^5$. Общее число исходов, благоприятствующих событию A : $m = m_1 + m_2 = 2 \cdot C_5^5 \cdot C_{13}^4$. По классической формуле $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2C_5^5 \cdot C_{13}^4}{C_{18}^9} = \frac{1}{34}$.

Из классического определения вероятности следуют ее основные свойства:

а) вероятность достоверного события равна единице (так как для достоверного события $m = n$, то $P(\Omega) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$);

б) вероятность невозможного события равна нулю (для невозможного события $m = 0$, поэтому $P(\emptyset) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$);

в) вероятность любого случайного события A неотрицательна и не превосходит единицу, то есть $0 \leq P(A) \leq 1$ (действительно, для случайного события $0 \leq m \leq n$, поэтому $0 \leq \frac{m}{n} \leq \frac{n}{n}$; $0 \leq P(A) \leq 1$);

г) вероятность события, противоположного к A , вычисляется по формуле $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, так как $A + \bar{A} = \Omega$ и известно, что A и $\bar{A}$ несовместные события, $P(\Omega) = 1$, то $P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$.

Классическое определение вероятности дает простой способ подсчета вероятности события, но имеет ограниченное применение, так как не всегда результаты испытаний являются равновероятными исходами; кроме того, часто возникают проблемы в определении m и n . Классическое определение вероятности явилось основой для дальнейшего абстрактного построения теории вероятностей.

2.2. Статистическое определение вероятности

Классическое определение вероятности, как уже отмечалось, предполагает, что все элементарные исходы равновозможны. О равновероятности исходов опыта делают вывод, исходя из одинаковых физических условий при повторении опыта и соблюдении симметрии (как в опытах с монетой или игральной костью). Но задачи, в которых можно исходить из условий симметрии, на практике встречаются редко. Во многих случаях трудно обосновать равновероятность всех элементарных исходов. В связи с этим появилась необходимость введения другого определения вероятности, так называемого статистического, когда значение вероятности события определяется приближенно после многократного повторения опыта.

Рассмотрим некоторый опыт, который повторяется в одних и тех же условиях n раз. Каждый раз при проведении опыта может произойти событие A , а может и не произойти. Пусть в данной серии испытаний событие A наблюдалось m раз. Число появлений события A в серии испытаний называется абсолютной частотой события A . В данном эксперименте абсолютная частота события A равна m , причем m зависит от n .

Относительной частотой события A в серии испытаний называется отношение абсолютной частоты этого события к общему числу проведенных испытаний, то есть $\omega(A) = \frac{m(n)}{n}$.

Как показывают наблюдения, если n мало, то относительная частота ω сильно колеблется и заметно отличается в различных сериях испытаний. Если же n велико, то колебания относительной частоты сглаживаются, ее изменения становятся незначительными, то есть она начинает принимать устойчивые значения. Это свидетельствует о наличии статистической закономерности в изучаемом явлении. Свойство устойчивости относительной частоты лежит в основе статистического определения вероятности.

Число, вокруг которого группируется (колеблется) относительная частота события при неограниченном увеличении числа испытаний, считается статистической вероятностью события,

$$\text{то есть } P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(n)}{n}.$$

Это определение позволяет принимать за вероятность события в приближенных расчетах относительную частоту события.

Пример 3. По данным шведской статистики относительная частота рождения девочек за 1935 год по месяцам характеризуется числами

месяц	I	II	III	IV	V	VI
$\omega(A)$	0,486	0,489	0,490	0,471	0,478	0,482

месяц	VII	VIII	IX	X	XI	XII
$\omega(A)$	0,462	0,484	0,485	0,491	0,482	0,473

То есть за вероятность рождения девочки по этим данным можно принять $P(A) \approx 0,482$, хотя вообще для разных стран и лет эта вероятность равна 0,485.

Пример 4. Кто и когда впервые проделал опыт с монетой, неизвестно, но он повторялся многократно. В XVIII столетии

естествоиспытатель Ж.Л.Л. Бюффон подбрасывал монету 4040 раз – герб выпал 2048 раз, то есть относительная частота выпадения герба в его серии опытов равняется 0,5069. В начале XIX столетия математик К. Пирсон подбрасывал монету 24000 раз – герб выпал 12012 раз, то есть относительная частота в его серии опытов равнялась 0,5005. Опыт значительно позже повторил американский экспериментатор Феллер. При 10000 подбрасываниях герб выпал 4979 раз, то есть относительная частота выпадения герба в его серии опытов равнялась 0,4979. Хотя выпадение герба или цифры – чисто случайное событие, но при многократном подбрасывании обнаруживается, что появление герба происходит примерно в половине случаев, то есть имеется объективная закономерность. Согласно введенному определению за статистическую вероятность выпадения герба принимается число 0,5, то есть $P(A) = 0,5$.

Свойство устойчивости относительной частоты является основным, но не единственным. Нижеуказанные свойства относительной частоты подтверждают свойства вероятности.

1) При $m = 0$ (то есть событие A – невозможное) $\omega(A) = 0$, следовательно, и $P(A) = P(\emptyset) = 0$.

2) Если $m = n$ (то есть событие достоверное), то $\omega(A) = 1$, следовательно, и $P(A) = P(\Omega) = 1$.

3) При $m \neq n$ и $m > 0$, относительная частота случайного события $0 < \omega(A) < 1$, то есть и вероятность случайного события изменяется от 0 до 1: $0 < P(A) < 1$.

4) Если A и B несовместные события, то $\omega(A + B) = \omega(A) + \omega(B)$, то есть относительная частота суммы двух несовместных событий равна сумме их относительных частот. Из этого свойства относительных частот в дальнейшем будет получено аналогичное свойство для вероятностей.

Статистическое определение вероятности применимо к более широкому классу явлений, чем классическое, но и оно

в свою очередь имеет недостатки. Главным из них является необходимость проведения большого числа опытов в одинаковых условиях. Кроме того, проведение опытов вносит элемент субъективизма, так как зависит от экспериментатора, в то время как вероятность события – объективная категория.

2.3. Геометрическое определение вероятности

Классическое и статистическое определение вероятности можно использовать лишь в дискретном пространстве элементарных событий. Если же пространство элементарных событий непрерывное, то оно содержит бесконечное множество элементарных событий, следовательно, и событию A будет соответствовать бесконечное подмножество множества элементарных событий. В этом случае вводится понятие геометрической вероятности.

Пусть пространством элементарных событий служит множество точек некоторой области G , а событию A соответствует часть этой области, состоящая из точек (элементарных исходов), благоприятствующих наступлению события A . Эту область обозначим через g . Тогда за вероятность события A принимается вероятность попадания в g точки, брошенной наугад в область G , то есть $P(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}$, где символ «mes» озна-

чает меру областей g и G , при этом предполагается, что вероятность попадания в какую-то часть области G пропорциональна мере этой области и не зависит от ее расположения и формы.

Следует иметь в виду, что в линейном пространстве (R) «mes G » и «mes g » – означают длины отрезков; в пространстве (R_2), то есть на плоскости, «mes G » и «mes g » – площади соответствующих областей; а в трехмерном пространстве (R_3) «mes G » и «mes g » – соответственно объемы площадей g и G .

Геометрическое определение вероятности, следовательно, используется в математической модели случайных экспериментов, имеющих бесконечное число равновозможных исходов.

Пример 5. На плоский моток проволоки общей длины L пролили краску, испачкав кусок проволоки длиной l . Какова вероятность испачкать руку, если проволоку берут в темноте?

Пусть событие A – рука испачкалась, то есть взят окрашенный кусок проволоки, тогда $P(A) = \frac{l}{L}$.

Пример 6. На острове общей площадью S имеется село площадью s . Известно, что в результате аварии на остров упал самолет. Какова вероятность, что он упал на село?

Пусть событие A – самолет упал на село, тогда $P(A) = \frac{s}{S}$.

Пример 7. В комнате летает комар. Объем комнаты V . Чтобы убить комара, выпускают газ из соответствующего баллончика. Газ образует ядовитое облако объемом v . Какова вероятность отравить комара?

Пусть событие A – комар отравлен, оно возможно, если комар окажется в ядовитом облаке, то есть $P(A) = \frac{v}{V}$.

Основные свойства вероятности, отмеченные для классического и статистического определений, имеют место и при геометрическом ее определении:

1) Вероятность достоверного события равна единице, то есть $P(\Omega) = 1$.

Действительно, размеры g и G и в случае достоверного события одинаковые, так как эти области совпадают.

2) Вероятность невозможного события равна 0, то есть $P(\emptyset) = 0$.

Действительно, раз событие невозможное, то нет исходов, благоприятствующих событию, то есть нет точек, входящих в g .

3) Вероятность любого случайного события $0 \leq P(A) \leq 1$, так как g либо не имеет точек, либо совпадает с G , либо является его частью.

4) Вероятность события $\bar{A}$ вычисляется по формуле $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, так как $\bar{A}$ – часть области G , не входящая в g , то $P(\bar{A}) = \frac{\text{mes}(G - g)}{\text{mes } G} = \frac{\text{mes } G}{\text{mes } G} - \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G} = 1 - P(A)$.

2.4. Аксиоматическое определение вероятности

Основу всех современных курсов теории вероятностей составляет аксиоматическая теория вероятностей. Первую аксиоматику теории вероятностей изложил С.Н. Бернштейн в 1917 г. Он пришел к выводу, что нужно ввести правила, теоремы, которые бы позволяли вычислять вероятности сложных событий с помощью заданных вероятностей простых событий.

Современная теория вероятностей – математическая наука, аксиоматику которой закончил и сформулировал А.Н. Колмогоров в 1936 г. Из первоначально заданной системы аксиом вытекают другие ее положения и теоремы. Исходным материалом при аксиоматическом построении теории вероятностей служат пространство элементарных событий Ω и поле событий, обозначаемое F . При этом поле событий F является алгеброй событий данного эксперимента, то есть оно обладает следующими свойствами:

1) $\Omega \in F$, $\emptyset \subset F$;

2) если $A \in F$ и $B \in F$, то $(A + B) \in F$, $(A \cdot B) \in F$, $(A|B) \in F$; $\bar{A} \in F$, $\bar{B} \in F$;

3) если $A_1, A_2, \dots, A_n$ принадлежат F , то их сумма и произведение также принадлежат F .

Понятие вероятности события вводится здесь так же, как и раньше для количественного описания степени объективной возможности наступления этого события в данном эксперименте, но абстрактно. Важно, чтобы оно удовлетворяло некоторым требованиям.

Пусть F – поле событий для данного эксперимента. Вероятностью $P(A)$ называется числовая функция, определенная для всех $A \in F$ и удовлетворяющая трем условиям (аксиомам вероятности):

1. $P(A) \geq 0$. Вероятность любого события положительна.
2. $P(\Omega) = 1$. Вероятность достоверного события равна единице.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, если $A \cap B = \emptyset$.

Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Аксиому 3 по индукции можно сформулировать и записать для случая конечного числа несовместных событий $A_i \in F$,

а именно:
$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Тройку $\{\Omega, F, P\}$, где F – алгебра подмножества множества Ω , а P – числовая функция, удовлетворяющая указанным аксиомам, называют вероятностным пространством случайного эксперимента. Следовательно, современная теория вероятностей базируется на четырех аксиомах и нескольких понятиях. Аксиомы теории вероятностей берут свое начало из очевидных свойств относительной частоты события.

На основе указанных аксиом можно доказать следующие свойства вероятности.

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Вероятность события, противоположного к A , равна разности между единицей и вероятностью события A .

Доказательство. По определению противоположного события $A + \bar{A} = \Omega$, то есть $P(A + \bar{A}) = P(\Omega)$, так как A и $\bar{A}$ несовместные события, то по аксиоме 3 $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, а по аксиоме 2 $P(\Omega) = 1$. Следовательно, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, тогда $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2. $P(\emptyset) = 0$. Вероятность невозможного события равна нулю.

Доказательство. Как известно, невозможное и достоверное события, то есть $\emptyset$ и Ω являются противоположными событиями, поэтому на основании первого свойства вероятности: $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega)$, но $P(\Omega) = 1$, по второй аксиоме, поэтому $P(\emptyset) = 1 - 1 = 0$.

3. Если $A \subset B$ (A входит в B , то есть благоприятствует B), то $P(A) \leq P(B)$.

Доказательство. $B = A + \bar{A} \cdot B$, где A и $(\bar{A} \cdot B)$ несовместные события. По аксиоме 3 имеем $P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cdot B)$; согласно аксиоме 1 $P(\bar{A} \cdot B) \geq 0$, следовательно, $P(B) \geq P(A)$.

4. Если A и B эквивалентные события, то есть $A = B$, то $P(A) = P(B)$.

Доказательство. Так как события A и B эквивалентные, то $A \subset B$ и $B \subset A$, тогда по свойству 3 имеем: $P(A) \leq P(B)$ и $P(B) \leq P(A)$, из этого следует, что $P(A) = P(B)$.

5. $0 \leq P(A) \leq 1$. Вероятность любого события – положительная величина, равная или меньше единицы.

Доказательство. $\emptyset \leq A \leq \Omega$ по свойствам 3 и 4 $P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$ или $0 \leq P(A) \leq 1$.

6. Для любых событий A и B $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

Доказательство. Можно записать $A + B = A + B \cdot \bar{A}$ и $B = B \cdot \bar{A} + B \cdot A$, так как справа в каждом соотношении несовместные события, то по аксиоме 3 имеем $P(A + B) = P(A) + P(B \cdot \bar{A})$ и $P(B) = P(B \cdot \bar{A}) + P(B \cdot A)$ из последнего выражения $P(B \cdot \bar{A}) = P(B) - P(B \cdot A)$, подставим его в первое, тогда $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(B \cdot A)$.

7. Для любых событий A и B $P(A + B) \leq P(A) + P(B)$.

Вероятность суммы событий меньше или равна сумме вероятностей этих событий.

Доказательство. Согласно свойству 6 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(B \cdot A)$, по аксиоме 1 $P(B \cdot A) \geq 0$, поэтому $P(A + B) \leq P(A) + P(B)$. Это свойство вероятности по индукции распространяется на любое число слагаемых событий.

Пример 8. Бросают две монеты. Чему равна вероятность появления хотя бы одного герба?

Обозначим события: A – появление герба на первой монете, B – появление герба на второй монете. Соответственно, выпадение решки на первой монете будет событием $\bar{A}$ и $\bar{B}$ – выпадение решки на второй монете. Всего возможны 4 исхода опыта:

AB – на обеих монетах гербы,

$A\bar{B}$ – герб только на первой монете,

$\bar{A}B$ – герб только на второй монете,

$\bar{B}\bar{A}$ – герб не выпал, то есть $\Omega = \{AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{B}\bar{A}\}$.

Так как опыт проходит по классической схеме (конечное число исходов, все исходы – равновозможные события в силу симметрии опыта; исходы единственно возможные несовместные события), то вероятность каждого исхода можно определить по классической формуле $P = \frac{m}{n}$.

$$P(AB) = P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B) = P(\bar{B}\bar{A}) = \frac{1}{4}.$$

Событие появление хотя бы одного герба является противоположным событию герб не выпал, поэтому P (появление герба хотя бы один раз) $= 1 - P(\bar{B}\bar{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Замечание. В данной задаче элементарные исходы оказались равновозможными. Это очень редкая ситуация при решении задач по вероятности.

Например, задача: производится стрельба по мишени из двух разных позиций (или двумя разного уровня стрелками). Пространство элементарных событий при соответствующем обозначении: A – попадание первого, B – попадание второго, запишется совершенно аналогично: $\Omega = \{AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{B}\bar{A}\}$, но вероятность каждого элементарного исхода будет разная и может быть вычислена после рассмотрения теорем о вероятности суммы и произведения событий.

3. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

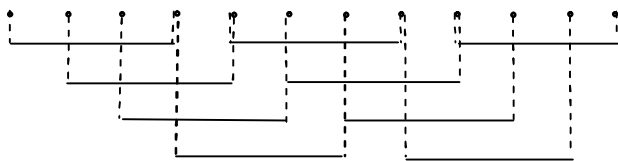
Перед самостоятельным решением задач по теории вероятностей рекомендуется ознакомиться с решением некоторых типовых задач. Решение конкретной задачи необходимо начинать с анализа ее условий. Необходимо:

1. Выяснить дискретное или непрерывное пространство элементарных событий в данном эксперименте.

2. Проанализировать, являются ли равновероятными исходы опыта.
3. Понять, вероятность какого события нужно вычислить.
4. Выбрать нужное определение вероятности и формулу.
5. Произвести расчеты, используя при необходимости комбинаторные формулы.

Задача 1. На стоянке автомобилей можно поместить 12 машин в один ряд. Однажды оказались свободны 4 места подряд. Какова вероятность такого события?

Решение. Пусть событие A – 4 места из 12 пустые подряд. Число возможных исходов конечное, то есть пространство элементарных событий дискретное. Все исходы равновероятные, так как в условиях задачи не сказано об особенностях выбора мест на автостоянке. Условия задачи соответствуют классической схеме, поэтому используем формулу $P(A) = \frac{m}{n}$. Общее число исходов (n), когда из 12 мест пустые 4 расположены произвольно, можно подсчитать как $n = C_{12}^4$. Число благоприятных исходов m придется подсчитать перебором, а именно: изобразим схематично 12 мест на стоянке и рассмотрим, сколько возможно ситуаций, когда подряд 4 места пустые:



Всего 9 ситуаций, то есть $m = 9$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{C_{12}^4} = \frac{9 \cdot 8! \cdot 4!}{12!} = \frac{9}{495} = \frac{1}{55}.$$

Задача 2. За круглым столом случайным образом рассаживаются 8 человек. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом.

Решение. Элементарные исходы опыта – всевозможные варианты расположения лиц за столом. Исходы – равновозможные события, так как лица располагаются случайным образом, и нет в условиях задачи никаких оговорок о каких-либо особенностях в их размещении за столом. Общее число исходов конечное и может быть подсчитано: $n = P_8 = 8!$ Опыт проходит по классической схеме. Необходимо найти вероятность события

A – два определенных человека сидят рядом: $P(A) = \frac{m}{n}$. Най-

дем число исходов, благоприятствующих событию A . На 8 местах за круглым столом один человек из двух, которые должны сидеть рядом, может располагаться 8 способами. Его сосед может сидеть либо слева, либо справа от места, выбранного первым. То есть у него 2 варианта выбора. Все остальные лица, а их $(8 - 2)$, могут выбирать себе любые оставшиеся $(8 - 2)$ места, то есть могут расположиться за столом $(8 - 2)!$ способами. Общее число исходов, благоприятствующих событию A , найдем по принципу произведения $m = 8 \cdot 2 \cdot 6!$ Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 6!}{8!} = \frac{2}{7} \approx 0,29.$$

Задача 3. Четыре зенитных пулемета ведут огонь по трем самолетам. Каждый пулеметчик выбирает объект обстрела наугад. Какова вероятность того, что все четыре пулемета ведут огонь по одному и тому же самолету?

Решение. Элементарные исходы – варианты выбора пулеметчиками трех самолетов. Исходы – равновозможные события, так как самолет выбирается наугад и нет никаких дополнительных инструкций. Общее количество исходов конечно и может быть подсчитано по правилу произведения, так как всего

четыре пулеметчика и каждый может сделать три выбора (первый, второй или третий самолет), то $n = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$. Опыт проходит по классической схеме, поэтому $P(A) = \frac{m}{n}$, где событие A – все четыре пулемета стреляют по одному самолету. Этот самолет может быть первым, вторым или третьим, то есть благоприятствующих событию A исходов $m = 3$. Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{3^4} = \frac{1}{27}$.

Указание. Общее количество исходов n можно подсчитать иначе, а именно: $n = \bar{A}_3^4 = 3^4$ (размещение с повторениями, так как четыре пулемета выбирают объект из трех самолетов, то возможны повторы).

Задача 4. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь, б) нестандартная деталь.

Решение. а) Извлеченная стандартная деталь, очевидно, не потеряна, поэтому потеряна любая другая из остальных 30 деталей $(21 - 1 + 10)$, то есть $n = 30$. Количество стандартных деталей среди них $m = 21 - 1 = 20$. Так как опыт проходит по классической схеме (проанализируйте самостоятельно), то $P(\text{потеряна стандартная деталь}) = \frac{m}{n} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

б) С учетом рассуждений, проведенных в пункте а, имеем $n = 30$, среди них нестандартных деталей $m = 10$, поэтому $P(\text{потеряна нестандартная деталь}) = \frac{m}{n} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Задача 5. Номер телефона состоит из 5 цифр. Какова вероятность, что все цифры наугад набранного номера разные? Как велика вероятность того, что в нем все цифры нечетные?

Решение. Исходы опыта – варианты набора 5 цифр из 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (10 цифр). Множество всех исходов конечное и они равновозможны, так как выбор цифр случаен, без каких-либо предписаний. Опыт проходит по классической схеме. Общее число исходов $n = \overline{A}_{10}^5 = 10^5$ (из 10 цифр выбираются 5, причем возможен повтор цифр в номере телефона – то есть размещения с повтором).

Обозначим события: A – все цифры в номере разные; B – все цифры номера нечетные. Определим число исходов, благоприятствующих событию $A - m_1$ и событию $B - m_2$, $m_1 = \overline{A}_{10}^5$ (размещения из 10 цифр по пять без повтора), $m_1 = \frac{10!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$.

$$\text{Тогда } P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{10^5} = \frac{3024}{10^4} = 0,3024.$$

$m_2 = \overline{A}_5^5$ (размещения из пяти нечетных цифр по пять с повтором, так как цифры могут быть одинаковыми), $m_2 = 5^5$; следовательно,

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{5^5}{10^5} = \frac{3024}{10^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \approx 0,03125.$$

Задача 6. Студент Алексеев постоянно посещает тренировки по стрельбе и каждый раз из сотни выстрелов попадает в мишень 80–90 раз; его результаты занесены в таблицу. Оценить вероятность попадания.

Произведено выстрелов	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Число попаданий	8	17	26	33	41	49	56	65	72	81

Решение. В данном опыте число исходов конечное, но исходы (попадание и промах) не являются равновероятными, поэтому классическая формула не применима. Но есть возможность оценить относительную частоту попаданий в каждой серии выстрелов:

$$\omega_1 = \frac{8}{10} = 0,8; \quad \omega_2 = \frac{17}{20} = 0,85; \quad \omega_3 = \frac{26}{30} \approx 0,86;$$

$$\omega_4 = \frac{33}{40} \approx 0,82; \quad \omega_5 = \frac{41}{50} \approx 0,82; \quad \omega_6 = \frac{49}{60} \approx 0,81;$$

$$\omega_7 = \frac{56}{70} = 0,80; \quad \omega_8 = \frac{65}{80} = 0,81; \quad \omega_9 = \frac{72}{90} = 0,80;$$

$$\omega_{10} = \frac{81}{100} = 0,81.$$

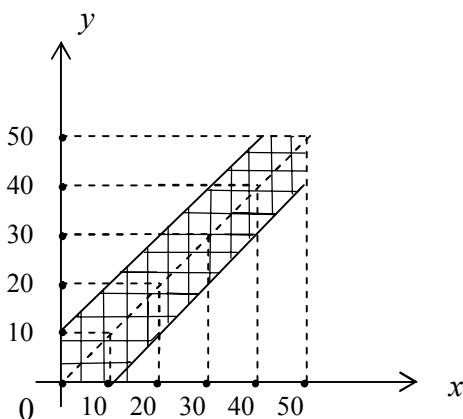
Заметно, что с увеличением числа произведенных выстрелов относительная частота стабилизируется и за вероятность попадания можно принять число 0,805, то есть $P(A) = 0,805$.

Задача 7. Абонент ждет телефонного вызова с двух часов до трех. Какова вероятность, что вызов произойдет с двух часов 30 минут до двух часов 40 минут?

Решение. Исходы опыта – вызов абонента в определенный момент времени; исходы опыта – равновероятные события, так как по условиям задачи момент времени вызова случаен. Множество всех исходов опыта бесконечное и заполняет временной интервал от двух до трех часов, то есть $t \in [0; 60]$ в минутах. Обозначим через A событие, что вызов произойдет от 2 часов 30 минут до 2 часов 40 минут, то есть этому событию благоприятствует временной интервал $t \in [30; 40]$ в минутах. Воспользуемся геометрическим определением вероятности в линейном пространстве, то есть $P(A) = \frac{l}{L} = \frac{40 - 30}{60 - 0} = \frac{1}{6} \approx 0,17$.

Задача 8. Два друга условились встретиться в Томске у памятника А.С. Пушкину между 13 часами и 13 часами 50 минутами. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, а потом уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанных 50 минут случаен и они независимые?

Решение. Обозначим момент прихода одного друга (A) через x , а момент прихода другого друга (B) через y . Для осуществления их встречи необходимо, чтобы $|x - y| \leq 10$. По условиям задачи $0 \leq x \leq 50$ и $0 \leq y \leq 50$. Изобразим геометрически исход опыта в виде точек квадрата (см. рисунок), который интерпретируется как пространство элементарных событий $\Omega = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 50, 0 \leq y \leq 50\}$. В качестве единицы масштаба выберем 10 минут. Событию «встреча» благоприятствуют исходы, заполняющие заштрихованную часть, то есть удовлетворяющие условию $|x - y| \leq 10$, следовательно, $-10 \leq x - y \leq 10$, $-10 - x \leq -y \leq 10 - x$, то есть $x - 10 \leq y \leq x + 10$. Точки, попадающие в полосу между прямыми: $y = x + 10$ и $y = x - 10$, соответствуют встрече.



Используем геометрическое определение вероятности на плоскости, то есть в (R_2):

$$P(\text{встречи}) = \frac{s}{S} = \frac{s \text{ полосы}}{S \text{ квадрата}} = \frac{S_{\text{кв.}} - 2S\Delta}{S_{\text{кв.}}} =$$

$$= \frac{50^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 40^2}{50^2} = \frac{50^2 - 40^2}{50^2} = \frac{900}{2500} = \frac{9}{25} \approx 0,36.$$

Задача 9. В течение ряда лет в Петербурге производились наблюдения за изменением направления ветра в осенний период. Данные повторяемости ветра различного направления сведены в следующую таблицу.

Направление	N	NWE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSN	SW	NSW	W	WN	NW	NW
Повторяемость (%)	4	3	5	4	4	3	12	6	6	5	8	8	10	9	9	4

Какова вероятность, что в любой последующий год ветер будет иметь направление с западной составляющей (то есть с W)?

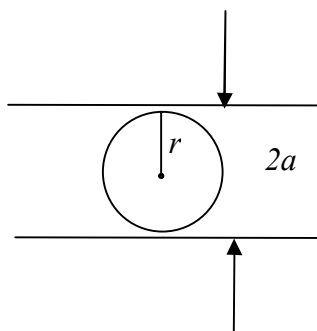
Решение. Исходы случайного явления – ветер определенного направления; они неравновозможные, но их число счетно. Используем статистическое определение вероятности. Найдем относительную частоту события – ветер с западной составляющей: $\omega = \frac{51}{100}$. За вероятность этого события можно приближенно взять 0,51.

Задача 10. Как приближенно установить число рыб в озере?

Решение. Будем считать, что в озере X рыб. После заброса сети выловили n рыб. Каждую из n рыб метят и отпускают. Через несколько дней в том же месте, в те же часы и при такой же примерно погоде забрасывают ту же сеть. Пусть в этот раз в сети находится m рыб и среди них k меченых. Пусть A – пойманная рыба мечена. Тогда относительная частота этого события $\omega(A) = \frac{k}{m}$. С другой стороны, если в озере всего X рыб и выпущено n меченых, то по классической формуле $P(A) = \frac{n}{X}$. Так как $P(A) \approx \omega(A)$, то $\frac{k}{m} \approx \frac{n}{X}$, откуда $X \approx \frac{m \cdot n}{k}$.

Задача 11. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. Наугад на плоскость бросается монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной прямой.

Решение. Рассмотрим ситуацию геометрически, так как число исходов опыта бесконечно.

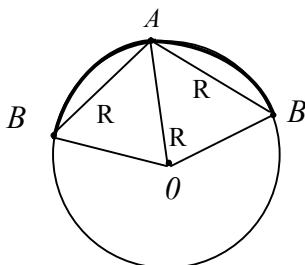


Обозначим событие A – монета не пересекает прямую, то есть имеется зазор между прямыми и монетой. Величина зазора – отрезок длины $l = 2a - 2r$. Расстояние между соседними прямыми $L = 2a$.

Поэтому
$$P(A) = \frac{l}{L} = \frac{2(a-r)}{2a} = \frac{a-r}{a}.$$

Задача 12. На окружности радиуса R зафиксирована точка A . Какова вероятность того, что случайно выбранная точка на окружности отстоит от точки A меньше чем на R ?

Решение. Так как точка на окружности может занимать бесчисленное множество положений, то будем использовать геометрическое определение вероятности. Изобразим ситуацию геометрически.



Обозначим событие C – точка отстоит от A на расстоянии $< R$. Тогда этому событию будут соответствовать (благоприятствовать) положения точки на дуге BAB_1 окружности. Определим ее длину. Для этого соединим точку B с точкой O и точку B_1 с точкой O ; получим два равносторонних треугольника $\triangle BOA$ и $\triangle B_1OA$. Следовательно, центральный угол $\angle BOB_1 = \angle BOA + \angle B_1OA = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. Длина дуги BAB_1 , соответствующая этому центральному углу, будет

$$l = \frac{\pi \cdot R \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2}{3} \pi R. \text{ Все исходы опыта – множество точек}$$

на всей окружности, длина которой $L = 2\pi R$. Найдем

$$P(C) = \frac{l}{L} = \frac{2\pi R}{3 \cdot 2\pi R} = \frac{1}{3}.$$

Задача 13. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже вошли пять человек. Предположим, что каждый из них в равной возможности может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

Решение. Исходы опыта – варианты выхода людей из лифта. По условию задачи число исходов конечное, и они являются равновозможными событиями. Поэтому имеем классическую схему и $P(A) = \frac{m}{n}$, где событие A – все выходят на разных этажах.

$n = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$, так как каждый из пяти человек может выйти на любом из 7 этажей (использовали принцип произведения). Аналогично $m = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, так как все выходят на разных этажах, то первый человек может выйти на любом из 7 этажей, второй имеет возможность выбирать из шести этажей, третий из пяти этажей, четвертый из четырех этажей, а пятый человек может выйти на одном из трех оставшихся этажей.

Найдем нужную вероятность: $P(A) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} \approx 0,15$.

Замечание. Количество всех исходов и благоприятствующих событию A , можно подсчитать и без принципа произведения, а именно: $n = \overline{A}_7^5 = 7^5$ (размещение с повторами). Пять человек выбирают из 7 этажей, причем выбор может совпасть (то есть повториться). $m = A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!}$ (размещения без повторов, так как все выходят на разных этажах).

Задача 14. Буквы в, е, н, о, о, р, с, т, т, ь, я написаны на отдельных карточках. Какова вероятность, что, извлекая эти карточки наудачу без возврата, не умеющий читать ребенок получит в порядке их выхода слово «вероятность»?

Решение. Исходы опыта – любое расположение карточек в порядке их вытаскивания. Число исходов конечное, и все они равновозможные для ребенка, не умеющего читать. Имеем классическую схему. Обозначим событие A – получилось слово

«вероятность», тогда $P(A) = \frac{m}{n}$, где n число всех возможных

исходов; $n = P_{11} = 11!$. m – число исходов, которые дают слово «вероятность»; $m = P_{2(o)} \cdot P_{2(t)} = 2! \cdot 2! = 4$ (один исход обязательно появится, так как есть все буквы в наличии, но если переставить две буквы «о», то опять будет слово «вероятность»; то же самое произойдет, если переставить две одинаковые буквы «т», поэтому общее число благоприятных исходов четыре). Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{11!} \approx \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} \approx \frac{1}{1800 \cdot 5544} \approx \frac{1}{10^7} \approx 0,1 \cdot 10^{-6}.$$

Задача 15. К четырехместному перекрестку с каждой стороны подъехало по одному автомобилю. Каждый автомобиль может с равной вероятностью совершить один из четырех маневров на перекрестке: развернуться и поехать обратно, поехать прямо, налево или направо. Через некоторое время все автомобили покинули перекресток. Найти вероятности следующих событий: A – все автомобили поедут по одной улице, B – по определенной улице поедут ровно три автомобиля.

Решение. Исходами опыта являются различные варианты выбора дорог. Количество исходов конечное и, исходя из условий задачи, опыт проходит по классической схеме. Общее число возможных исходов $n = \overline{A}_4^4$ (выбираются 4 дороги из четы-

рех, причем выбор может совпасть, то есть размещение с повтором). Следовательно, $n = 4^4$. Пусть событию A благоприятствует m_1 исходов, а событию B — m_2 ; $m_1 = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4$ (одна машина выбрала дорогу из четырех, то есть $C_4^1 = \frac{4!}{3!1!} = 4$, ос-

тальные машины не производят выбора, а едут вслед за первой, кроме того, выбирать дорогу может любая из четырех машин, поэтому согласно принципу произведения $m_1 = 16$).

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{4^2}{4^4} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$$

$m_2 = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4$ (одна машина выбирает любую из 4 дорог, то есть $C_4^1 = 4$, две машины следуют за первой, не выбирая дорогу, а четвертая машина может ехать по любой из оставшихся трех дорог, то есть $C_3^1 = \frac{3!}{2!1!} = 3$, кроме того, первой может быть любая из четырех машин. Согласно принципу произведения, $m_2 = 48$. Тогда $P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{48}{4^4} = \frac{3}{4^2} = \frac{3}{16}$.

4. БАНК ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Наугад называется дата некоторого невисокосного года. Какова вероятность, что это воскресенье, если известно, что в этом году 53 воскресенья? Ответ. 0,145.

2. На 20 одинаковых жетонах написаны 20 двузначных чисел от 11 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 5? Ответ. $\frac{1}{5}$.

3. В одном английском колледже на первом курсе обучается 100 студентов. Известно, что 40 из них изучают французский язык, 35 человек изучают немецкий и 50 человек изучают русский язык; причем 10 человек изучают немецкий и французский язык, 20 человек изучают французский и русский язык, 8 человек осваивают немецкий и русский язык. Все три языка изучают 5 студентов. Какова вероятность, что студент, встреченный в колледже наугад, изучает: а) русский язык, б) только русский, в) только два языка.

Ответ. а) 0,5; б) 0,27; в) 0,23.

4. Грузовая машина, обслуживающая торговую базу в течение квартала, то есть 90 дней, перевозила 40 дней по 15 тонн, 15 дней по 17 тонн, 20 дней по 16 тонн, 5 дней по 18 тонн и 10 дней по 5 тонн груза. Какова относительная частота перевозки этой машиной более 15 тонн груза в день?

Ответ. $\frac{4}{9}$.

5. Замерзание реки Волги у города Куйбышева наблюдалось в следующие сроки:

Год	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907
Дата замерзания	14.12	1.12	27.12	25.11	9.12	15.12	1.01	20.11
Год	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915
Дата замерзания	17.11	14.11	30.11	28.11	16.12	4.02	29.12	11.11
Год	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
Дата замерзания	1.12	23.12	13.12	29.11	20.11	31.10	23.11	14.12
Год	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	
Дата замерзания	28.12	12.12	13.12	27.12	16.12	25.12	8.12	

Какова вероятность, что замерзание реки произойдет не позже 10 декабря?

Ответ. $\frac{15}{31}$.

6. Сохраняя условия предыдущей задачи, подсчитать вероятность замерзания Волги в январе.

Ответ. $\frac{1}{31}$.

7. Из полного набора пластинок домино наудачу выбирается одна пластинка. Какова вероятность появления пластинки, сумма очков которой равна шести?

Ответ. 0,143.

8. Два односторонних радиопередатчика могут работать на одной из четырех фиксированных частот. Найти вероятность того, что при одновременном и независимом выходе в эфир, они будут работать на разных частотах. Предполагается, что выход в эфир каждого из передатчиков на любой из четырех частот равновероятен.

Ответ. 0,75.

9. Десантный отряд после приземления на территории противника посылает кратковременный сигнал по радио. Найти вероятность того, что десант будет запеленгован противником, если разведка производится с помощью пеленгатора с равномерно вращающейся антенной, раствор диаграммы направленности которой $\alpha = 18^\circ$. (Сигнал таков, что длительность его пренебрежимо мала по сравнению с периодом вращения антенны).

Ответ. 0,05.

10. Какова вероятность, не целясь, попасть бесконечно малой пулей в прутья квадратной решетки, если толщина прутьев равна « a », а расстояние между их осями равно l ($l \leq a$)?

Ответ. $\frac{a}{l} \left(2 - \frac{a}{l} \right)$.

11. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты – красный, затем снова одну минуту – зеленый и полминуты красный и т. д. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекресток без остановки?

Ответ. $\frac{2}{3}$.

12. Код радиолокационной системы опознавания самолетов состоит из тире и точек, общее число которых в коде равно четырем. Найти вероятность угадывания кода противником.

Ответ. $\frac{1}{16}$.

13. На карточках, одинаковых по виду, написаны целые числа от 1 до 12 включительно. Наудачу извлекаются сразу две карточки. Какова вероятность, что сумма чисел, написанных на извлеченных карточках, равна 8?

Ответ. $\frac{1}{22}$.

14. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

Ответ. 0,5.

15. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна восьми, а модуль их разности равен четырем.

Ответ. $\frac{1}{18}$.

16. Точка взята наудачу внутри круга радиуса R . Найти вероятность того, что эта точка окажется от центра на расстоянии, меньшем r ($r < R$).

Ответ. $\left(\frac{r}{R}\right)^2$.

17. Профессор вызвал через старосту на консультацию трех студентов из шести отстающих. Староста забыл фамилии вызванных студентов и послал наудачу трех отстающих студентов. Какова вероятность, что это именно те, которых ждет профессор?

Ответ. 0,05.

18. Для подготовки к экзамену студенту задали 40 вопросов по теории, из которых он выучил 25. Какова вероятность того, что он ответит на 2 теоретических вопроса из своего билета? (Билет из двух вопросов по теории).

Ответ. $\frac{5}{13}$.

19. На одинаковых карточках написаны буквы р, з, е, и, р, с, о, т. Ребенок, не умеющий читать, вытаскивает карточки и выкладывает их в ряд. а) Какова вероятность, что он выложит слово «резистор»? б) Какова вероятность, что при вытаскивании трех карточек он получит слово «сто»?

Ответ. а) $\frac{1}{7! \cdot 4}$, б) $\frac{1}{336}$.

20. Известно, что из 20 лотерейных билетов 4 выигрышные. С какой вероятностью два купленных билета окажутся выигрышными?

Ответ. $\frac{3}{95}$.

21. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня, что они разные и нечетные. Какова вероятность, что номер был набран правильно?

Ответ. 0,05.

22. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 образуют трехзначное число, используя неповторяющиеся цифры. Какова вероятность того, что получится нечетное число?

Ответ. 0,6.

23. В урне 8 белых и 5 красных шаров. Наудачу извлекаются два шара. Какова вероятность, что они разных цветов?

Ответ. $\frac{20}{39}$.

24. Четырехтомное собрание сочинений А.П. Чехова случайным образом расставлено на книжной полке. Какова вероятность того, что книги стоят в должном порядке слева направо или справа налево?

Ответ. $\frac{1}{12}$.

25. Устройство состоит из 5 элементов, среди которых 2 изношены. При включении устройства случайным образом включаются три элемента. Найти вероятность того, что среди включенных элементов окажется только один изношенный.

Ответ. 0,6.

26. Из коробки с резисторами случайным образом выбраны 3. Определить вероятность того, что 2 из них окажутся бракованными, если из 15 резисторов в коробке 3 бракованных.

Ответ. 0,8.

27. На испытание поставлено 1000 однотипных электронных ламп. За 3000 часов работы отказало 80 ламп. Чему равна относительная частота отказа электронной лампы и относительная частота безотказной работы электронной лампы в течение 3000 часов?

Ответ. 0,08 и 0,92.

28. В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь открывается автоматически, если в определенной последовательности набрать 3 цифры из имеющихся десяти. Некто вошел в подъезд и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 20 секунд. Какова вероятность события A – вошедшему удастся открыть дверь за один час?

Ответ. 0,25.

29. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятность события A – четыре первые цифры телефонного номера одинаковые.

Ответ. 0,001.

30. Десять приезжих мужчин, среди которых Петров и Иванов, размещаются в гостинице в два трехместных и один четырехместный номер. Сколько существует способов их размещения? Какова вероятность события A – Петров и Иванов попадут в четырехместный номер?

Ответ. 4200; $\frac{2}{15}$.

31. Шесть человек вошли в лифт на первом этаже семиэтажного дома. Считая, что любой пассажир может с равной вероятностью выйти на втором, третьем, ..., седьмом этажах, найти вероятности событий: A – ни один пассажир не выйдет на втором, третьем и четвертом этажах; B – на каждом этаже выйдет по одному человеку; C – все пассажиры выйдут на одном этаже.

Ответ. $P(A) = \frac{1}{216}$, $P(B) = \frac{5}{324}$, $P(C) = \frac{1}{6^5}$.

32. В конверте имеется 50 фотокарточек, одна из которых разыскивается. Из конверта извлекают 10 фотографий. Какова вероятность, что среди них есть разыскиваемая?

Ответ. $\frac{1}{5}$.

33. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого сигнала равновозможно в любой промежуток времени длительностью T . Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t ($t < T$). Найти вероятность того, что сигнализатор сработает за

время T , если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

Ответ. $\frac{t}{T} \left(2 - \frac{t}{T} \right)$.

34. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равномерно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго – два часа.

Ответ. 0.121.

5. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

№ 1

1. В книге 50 страниц. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь порядковый номер, кратный 7? Ответ. 0,14.

2. В квадрат вписан круг. Найти вероятность того, что брошенная наугад в квадрат точка попадет в круг. Предполагается, что попадание точки в часть квадрата не зависит от ее расположения внутри квадрата и равномерно в любую часть квадрата. Принять сторону квадрата за «а».

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

3. Предположим, что магазин принимает партию из 10 телевизоров для продажи в том случае, если при проверке двух из них, выбранных наудачу, они оба окажутся исправными. Какова вероятность того, что магазин примет партию, если она содержит четыре неисправных телевизора?

Ответ. $\frac{1}{3}$.

№ 2

1. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что произведение выпавших очков равно 6?

Ответ. 0,111.

2. В круг вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что брошенная наугад в круг точка окажется внутри вписанного правильного треугольника. Радиус круга принять за R . Предполагается, что попадание точки в часть круга не зависит от ее расположения и равновозможно в любую часть круга. ($S\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

и $a = R \cdot \sqrt{3}$ для правильного вписанного треугольника).

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

3. В магазине работают 10 продавцов, из них шесть женщин. В смену заняты 3 продавца. Найти вероятность того, что в наудачу укомплектованную смену войдут все три продавца мужчины.

Ответ. $\frac{1}{30}$.

№ 3

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что частное от деления большего выпавшего числа на меньшее равно двум?

Ответ. 0,167.

2. В ходе учения на парк площадью $(100 \times 100) \text{ м}^2$ была сброшена учебная бомба. Какова вероятность того, что не было прямого попадания ни в одну из трех целей, площади которых 30, 20 и 25 м^2 ?

Ответ. $\frac{397}{400}$.

3. Среди 30 студентов одной группы разыгрываются по жребию 10 билетов на КВН. С какой вероятностью 5 билетов достанется студентам, живущим в общежитии, если 20 человек из группы живут в общежитии?

$$\text{Ответ. } \frac{C_{20}^5 \cdot C_{10}^5}{C_{30}^{10}}.$$

№ 4

1. Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру и набрал ее наугад. Какова вероятность того, что набран верный номер?

Ответ. 0,1.

2. Сигнал оповещения от радиолокационного поста может появиться с одинаковой вероятностью в любой момент времени от 0 до 24 часов. Найти вероятность того, что он появится в интервале от 17 до 22 часов.

Ответ. 0,28.

3. Группа туристов, состоящая из 12 юношей и 8 девушек, выбирает по жребию хозяйственную команду в составе 4 человек. Какова вероятность того, что в числе избранных окажется двое юношей и две девушки?

Ответ. 0,381.

№ 5

1. Номера автомашин содержат четыре цифры. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит одинаковых цифр (принять во внимание, что номера 0000 нет)?

$$\text{Ответ. } \frac{560}{1111}.$$

2. Предположим, что интервал движения трамваев по 5-му маршруту 30 минут. Определить вероятность того, что пассажиру придется ожидать трамвая не меньше 5 минут, но и не более 15 минут.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

3. Шеститомное собрание сочинений Н.С. Лескова случайным образом расставлено на книжной полке. Какова вероятность того, что книги стоят в должном порядке слева направо или справа налево?

Ответ. $\frac{1}{36}$.

№ 6

1. Задумано двузначное число, цифры которого различны. Найти вероятность того, что случайно названное двузначное число окажется равным задуманному числу?

Ответ. $\frac{1}{90}$.

2. На шахматную доску случайным образом бросается монета. Какова вероятность, что ее центр окажется на черном поле?

Ответ. 0,5.

3. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 4 человека. Предположим, что в равной возможности каждый из них может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все они выйдут на разных этажах.

Ответ. $\frac{5}{18}$.

№ 7

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна пяти, а произведение равно четырем.

Ответ. $\frac{1}{18}$.

2. Минное заграждение состоит из якорных мин, расположенных в одну линию на расстоянии 50 м одна от другой. Ширина корабля 20 метров. Определить вероятность благополучного прохождения корабля, если он идет перпендикулярно заграждению.

Ответ. 0,6.

3. На отдельных карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все карточки перемешаны, после чего берут четыре из них и раскладывают в ряд друг за другом в порядке появления. Найти вероятность того, что получится четное число.

Ответ. $\frac{4}{9}$.

№ 8

1. В книге 205 страниц. Какова вероятность того, что номер наудачу открытой страницы оканчивается нулем или цифрой пять?

Ответ. 0,2.

2. Производится одиночный выстрел по вращающейся мишени радиусом R . Найти вероятность попадания в сектор с центральным углом α .

Ответ. $\frac{\alpha}{2\pi}$.

3. Случайным образом в ряд выкладываются карточки, на каждой из которых написана одна из следующих букв: м, к, а, т, а, м, и, а, е, т. С какой вероятностью получится слово «математика»?

Ответ. $\frac{1}{7! \cdot 30}$.

№ 9

1. В шкатулке два отделения (левое и правое), в которые наудачу положили две сережки. Какова вероятность, что в каждом отделении окажется одна сережка?

Ответ. 0,5.

2. Вследствие ветра парашютистов занесло в парк площадью $(100 \times 200) \text{ м}^2$. В парке имеется фонтан радиусом 4 метра. Какова вероятность, что парашютист угодил в фонтан?

Ответ. $\frac{\pi}{1250}$.

3. Наудачу взятый телефонный номер состоит из шести цифр. Найти вероятность того, что пять цифр номера являются нечетными.

Ответ. $\frac{1}{64}$.

№ 10

1. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины состоит из одинаковых цифр. (Принять во внимание, что номера автомашин содержат 4 цифры и нет номера 0000).

Ответ. $\frac{1}{1111}$.

2. Мишень состоит из концентрических окружностей, радиусы которых соответственно 10, 20 и 30 см. Какова вероятность попасть в кольцо между окружностями радиусов 10 и 20 см?

Ответ. $\frac{1}{3}$.

3. Игорь и Олеся договорились встречать Новый год в компании друзей из 10 человек. Они оба очень хотели сидеть за круглым праздничным столом рядом. Какова вероятность исполнения их желания, если среди их друзей принято места распределять путем жребия?

Ответ. $\frac{2}{9}$.

№ 11

1. На десяти одинаковых карточках написаны различные числа от 0 до девяти. Определить вероятность того, что наудачу образованное с помощью данных карточек двузначное число делится на 18.

Ответ. $\frac{1}{18}$.

2. Мишень радиуса R имеет закрашенную внутреннюю часть радиуса $\frac{R}{3}$. Определить вероятность попадания в закрашенную часть мишени.

Ответ. 0,111.

3. Какова вероятность, заполняя карточку спортлото «6 из 49», угадать 5 номеров?

Ответ. $0,19 \cdot 10^{-4}$.

№ 12

1. В лотерее 1000 билетов, среди которых на 50 выпадают денежные выигрыши, и на 200 билетов приходятся вещевые

выигрыши. Какова вероятность выигрыша для владельца одного билета?

Ответ. 0,25.

2. В круге радиусом R помещен меньший круг радиусом r . Найти вероятность того, что наудачу брошенная в больший круг точка попадет за границу меньшего круга.

Ответ. $1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$.

3. В группе английского языка 12 студентов, среди которых 8 хорошистов. По списку для хозяйственных работ выбирают наугад 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных пять хорошистов.

Ответ. $\frac{14}{55}$.

№ 13

1. Все буквы русского алфавита написаны на 33 одинаковых карточках. Наудачу извлекается одна из них. Какова вероятность, что на карточке написаны твердый или мягкий знак?

Ответ. 0,061.

2. В круг вписан квадрат со стороной равной a . Какова вероятность, что точка, наудачу брошенная в круг, окажется внутри квадрата?

Ответ. 0,635.

3. В ящике имеется 9 деталей, среди которых 5 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

Ответ. $\frac{5}{42}$.

№ 14

1. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что абсолютная величина разности выпавших очков равна 3?

Ответ. $\frac{1}{6}$.

2. Магазин работает 8 часов. Считая, что наугад выбранный покупатель приходит в него в момент времени x , а уходит в момент времени y , найти вероятность того, что он пробудет в магазине меньше одного часа.

Ответ. 0,6.

3. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «книга».

Ответ. $\frac{1}{120}$.

№ 15

1. Все буквы русского алфавита написаны на 33 одинаковых карточках. Какова вероятность того, что на извлеченной наугад карточке будет написана согласная буква?

Ответ. 0,606.

2. Телефонная линия, соединяющая два пункта A и B , стоящие на расстоянии 2 км друг от друга, порвалась вследствие бури в неизвестном месте. Чему равна вероятность того, что обрыв произошел не далее чем 450 м от пункта A ? (Предполагается, что вероятность обрыва одинаковая для каждого метра телефонной линии).

Ответ. 0,225.

3. В НИИ работает 120 человек, из них 70 знают английский язык, 60 – немецкий, а 50 знают оба языка. Какова вероят-

ность того, что выбранный наудачу сотрудник знает только один язык?

Ответ. 0,25.

№ 16

1. В пачке содержатся 20 перфокарт, помеченных номерами 101, 102, ..., 120. Расположены они произвольно. Наудачу извлекается одна карта. Какова вероятность, что извлечена перфокарта с номерами 110 или 120?

Ответ. 0,1.

2. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 6 см, наудачу брошен круг радиусом 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечет ни одной из прямых. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок не зависит от его расположения.

Ответ. $\frac{2}{3}$.

3. На складе имеются 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу взятых кинескопов окажутся три кинескопа Львовского завода.

Ответ. $\frac{400}{1001}$.

№ 17

1. Участники жеребьевки тянут жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого взятого жетона не содержит пятерки.

Ответ. 0,81.

2. Внутри прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 4, 6, 10 см, наудачу выбирается точка M . Како-

ва вероятность, что она окажется внутри куба, помещенного внутри параллелепипеда, если ребро куба равно 3 см?

Ответ. 0,113.

3. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на каждом из которых написана одна из букв а, а, с, а, н, н, получится слово «ананас»?

Ответ. $\frac{1}{60}$.

№ 18

1. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 40 до 70 является кратным 6?

Ответ. 0,161.

2. Два лица A и B условились встретиться на вокзале между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих лиц, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любое время?

Ответ. $\frac{5}{9}$.

3. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

Ответ. $\frac{5}{14}$.

№ 19

1. В ящике 10 пронумерованных шаров (номера от 1 до 10). Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 8?

Ответ. 0,8.

2. Внутри эллипса с полуосями $a = 100$ см и $b = 10$ см расположен прямоугольник со сторонами 10 и 3 см. Определить вероятность того, что точка, брошенная наудачу в эллипс, окажется внутри прямоугольника. (Площадь эллипса равна πab).

Ответ. 0,01.

3. Из колоды в 36 карт наудачу берется три карты. Найти вероятность того, что это: валет, дама, король одной масти.

Ответ. $\frac{1}{1785} \approx 0,00056$.

№ 20

1. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 1 до 30 (включительно) является делителем числа 30?

Ответ. $\frac{4}{15}$.

2. Внутри эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25}$ расположен круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 16$. Найти вероятность попадания наугад брошенной внутрь эллипса точки в кольцо между окружностью и эллипсом.

Ответ. $\frac{7}{15}$.

3. В лаборатории работают 6 мужчин и 3 женщины. Наудачу в понедельник вызвали 6 человек в отдел кадров для заполнения документов, остальные будут отвлечены от работы во вторник. Найти вероятность того, что все 3 женщины будут вызваны в понедельник.

Ответ. $\frac{5}{21}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2006. – 575 с.
2. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. А.А. Свешникова. – СПб.: Лань, 2008. – 448 с.
3. Емельянов, Г.В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике / Г.В. Емельянов, В.П. Скитович. – СПб.: Лань, 2007. – 336 с.
4. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2009. – 400 с.
5. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2009. – 480 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные формулы комбинаторики

1. «Эн факториал»: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$.

2. Число размещений из n элементов по k :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \dots (n-k+1).$$

3. Число размещений из n элементов по k с повтором элементов:

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

4. Число сочетаний из n элементов по k : $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Если элементы повторяются, то $\overline{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-k)!}$.

5. Число перестановок из k элементов: $P_k = k!$

6. Число перестановок из n элементов, в которых повторяются элементы $a, b, c, \dots$ соответственно $n_1, n_2, n_3, \dots$ раза:

$$P_n(n_1, n_2, n_3, \dots) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \dots}.$$

7. Принцип (или правило) произведения используют, когда совершается k действий, каждое из которых может быть выполнено n_i способами ($i = 1, 2, \dots, k$). Общее число способов выполнения данных действий $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$.

8. Правило сложения. Если одно действие можно выполнить m способами, а другое n способами, и они взаимно исключают друг друга, то выполнить одно любое из этих действий можно $(n + m)$ способами.