

**Решить задачу многокритериальной оптимизации
методом ограничений**

1. Найти *допустимое множество решений задачи* (в виде многоугольника в области $x_1, x_2 \geq 0$).
2. Для каждого критерия $f_i(x)$ найти наилучшее и наихудшее решение и значение целевой функции в соответствующей точке.
3. Рассмотрим случай, когда *критерии неравноценны*, т. е. $\rho_1 = 0.4$, $\rho_2 = 0.6$, и будем искать *компромиссное решение*, обеспечивающее минимальные одинаковые относительные потери.

Функции относительных потерь равны

$$W_1(x) = \rho_1 W_1(x) = \rho_1 \frac{f_1^0 - f_1(x)}{f_1^0 - f_{1\min}};$$

$$W_2(x) = \rho_2 W_2(x) = \rho_2 \frac{f_2(x) - f_2^0}{f_{2\max} - f_2^0}.$$

4. Сформулируем *дополнительные ограничения*.

$$f_i(x) \geq f_i^* = f_i^0 - \frac{k_0}{\rho_i} (f_i^0 - f_{i\min}), \forall i \in I_1;$$

$$f_i(x) \leq f_i^* = f_i^0 + \frac{k_0}{\rho_i} (f_{i\max} - f_i^0), \forall i \in I_2.$$

k_0 - коэффициент минимальных относительных потерь.

5. Запишем эквивалентную задачу линейного программирования:

минимизировать $x_3 = k_0$ при всех ограничениях с учётом дополнительных п. 4.

6. Решим полученную задачу (для ЗЛП применим симплекс-метод) и найдём решение, которому соответствует точка x^0 , в которой минимальные относительные потери на всех критериях равны значению параметра k_0 .

x^0 - *компромиссное решение* задачи.

7. В полученной точке x^0 вычислим значения целевых функций по всем критериям. Отметим точку x^0 на допустимой области.

Варианты индивидуального задания

Вар. 1. Максимизировать $f_1(x) = 3x_1 - x_2$
 минимизировать $f_2(x) = 3x_1 + x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 5; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 7; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 17; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 23; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 7; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 2. Максимизировать $f_1(x) = 3x_1 - 1,5x_2$
 минимизировать $f_2(x) = 3x_1 - 4x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : 2x_1 + 2x_2 &\geq 5; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 6; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 20; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 17; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 9; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 3. Максимизировать $f_1(x) = 5x_1 - x_2$
 минимизировать $f_2(x) = x_1 + 5x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 6; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 7; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 19; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 13; \\ \delta_5 : 3x_1 - 5x_2 &\leq 6; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 4. Максимизировать $f_1(x) = 3x_1 - 2x_2$
 минимизировать $f_2(x) = -3x_1 + 5x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 6; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 7; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 21; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 13; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 5; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 5. Максимизировать $f_1(x) = 3x_1 - 4x_2$
 минимизировать $f_2(x) = x_1 + 2x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 3; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 7; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 22; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 3; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 7; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 6. Максимизировать $f_1(x) = x_1 + 5x_2$,
 минимизировать $f_2(x) = 3x_1 + x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 5; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 8; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 7; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 23; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 7; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 7. Максимизировать $f_1(x) = x_1 + 5x_2$,
 минимизировать $f_2(x) = 3x_1 + x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 7; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 7; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 24; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 12; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 9; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 8. Максимизировать $f_1(x) = x_1 + 5x_2$,
 минимизировать $f_2(x) = 3x_1 - 5x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 5; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 14; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 23; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 23; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 7; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 9. Максимизировать $f_1(x) = x_1 + 5x_2$,
минимизировать $f_2(x) = x_1 + 2x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 15; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 7; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 15; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 16; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 17; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 10. Максимизировать $f_1(x) = 3x_1 + 5x_2$,
минимизировать $f_2(x) = 5x_1 - x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 6; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 7; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 23; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 19; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 7; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 11. Максимизировать $f_1(x) = -x_1 + 5x_2$,
минимизировать $f_2(x) = 5x_1 - x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 3; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 7; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 19; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 20; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 6; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 12. Максимизировать $f_1(x) = x_1 + 2x_2$,
минимизировать $f_2(x) = 3x_1 - 4x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 5; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 7; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 14; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\geq -2; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 7; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 13. Максимизировать $f_1(x) = -3x_1 + 5x_2$,
минимизировать $f_2(x) = 3x_1 - x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 5; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq -1; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 24; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 18; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 7; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 14. Максимизировать $f_1(x) = -3x_1 + 5x_2$
минимизировать $f_2(x) = 3x_1 - x_2$,

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq -5; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 7; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 16; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 20; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 7; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 15. Максимизировать $f_1(x) = x_1 + 5x_2$
минимизировать $f_2(x) = 3x_1 - 4x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 5; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq -2; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 27; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 12; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 7; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вар. 16. Максимизировать $f_1(x) = x_1 + 5x_2$,
минимизировать $f_2(x) = 3x_1 - 4x_2$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \delta_1 : x_1 + 2x_2 &\geq 5; \\ \delta_2 : 3x_1 + x_2 &\geq 10; \\ \delta_3 : -3x_1 + 5x_2 &\leq 25; \\ \delta_4 : 5x_1 - x_2 &\leq 3; \\ \delta_5 : 3x_1 - 4x_2 &\leq 5; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$