Задача 1

По известным значениям z_1 и z_2 найти значения w_a, w_b, w_c

1. $z_1 = 1 - i\sqrt{3},\ z_2 = \sqrt{3} + i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[3]{\bar{z}_2}.$

2. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 3 - i;\quad w_a = \bar{z}_1\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{z_1}{z_2^2},\ w_c = \sqrt[4]{z_1^3}.$

3. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 2 - i\sqrt{3};\quad w_a = \bar{z}_1 z_2,\ w_b = \dfrac{z_1^2}{\bar{z}_2},\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_1)^2}.$

4. $z_1 = 2 - 2i,\ z_2 = 1 + 3i;\quad w_a = \bar{z}_1 z_2,\ w_b = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_1)^4}.$

5. $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = 2 + 2i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{(\bar{z}_1)^2}{z_2},\ w_c = \sqrt[5]{(\bar{z}_2)^4}.$

6. $z_1 = 7 + i,\ z_2 = 3 - 3i;\quad w_a = \bar{z}_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_1}{z_2},\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_2)^2}.$

7. $z_1 = 5 - 5i,\ z_2 = 2 - i;\quad w_a = \bar{z}_1 z_2^2,\ w_b = \left(\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{\bar{z}_1}.$

8. $z_1 = 4 + 4i,\ z_2 = 4 - 3i;\quad w_a = z_1 z_2,\ w_b = \frac{\bar{z}_1}{z_2},\ w_c = \sqrt[5]{(\bar{z}_1)^2}.$

9. $z_1 = 2 - 2i\sqrt{3},\ z_2 = \sqrt{3} + 2i;\quad w_a = z_1 z_2^2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_1)^2}.$

10. $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i,\ z_2 = 1 + i\sqrt{3};\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_2}{z_1},\ w_c = \sqrt[5]{z_1^3}.$

11. $z_1 = -4 - 4i,\ z_2 = 3 + 2i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt[5]{(\bar{z}_1)^3}.$

12. $z_1 = -3 + 3i,\ z_2 = 2 + i;\quad w_a = z_2^3,\ w_b = \dfrac{z_1^2}{\bar{z}_2},\ w_c = \sqrt[3]{\bar{z}_1}.$

13. $z_1 = 4 - 3i,\ z_2 = 1 + 7i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt{z_1 z_2}.$

14. $z_1 = 5 - 12i,\ z_2 = 2 + 2i;\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_1}{z_2^2},\ w_c = \sqrt[4]{(\bar{z}_2)^3}.$

15. $z_1 = \dfrac{7 + 24i}{5},\ z_2 = -5 + 5i;\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{z_2}{z_1},\ w_c = \sqrt[3]{\bar{z}_2}.$

16. $z_1 = -3 - 4i,\ z_2 = -4 + 4i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[3]{\dfrac{-\bar{z}_2}{2}}.$

17. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 2\sqrt{3} + 2i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt[3]{z_1 z_2}.$

18. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i,\ z_2 = 3 - 3i\sqrt{3};\quad w_a = \overline{z_1 z_2},\ w_b = \dfrac{z_1^2}{z_2},\ w_c = \sqrt[4]{z_2^2}.$

19. $z_1 = 3\sqrt{3} + 3i,\ z_2 = 1 + i\sqrt{3};\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \dfrac{3z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_1)^2}.$

20. $z_1 = -4 - 4i,\ z_2 = 2 + 3i;\quad w_a = \bar{z}_1 z_2^2,\ w_b = \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2,\ w_c = \sqrt[5]{(\bar{z}_1)^3}.$

21. $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},\ z_2 = \sqrt{8} - i\sqrt{8};\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_2}{z_1},\ w_c = \sqrt[3]{(\bar{z}_2)^2}.$

22. $z_1 = 4 + 3i,\ z_2 = 3 + 4i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{z_1 z_2}.$

23. $z_1 = 7 + 24i,\ z_2 = 24 - 7i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right),\ w_c = \sqrt[5]{\dfrac{z_1}{z_2}}.$

24. $z_1 = 2 + i,\ z_2 = 1 - 2i;\quad w_a = z_1(\bar{z}_2)^2,\ w_b = \left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{\dfrac{z_2}{z_1}}.$

25. $z_1 = 3 + i,\ z_2 = 1 - 3i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \dfrac{\bar{z}_2}{z_1},\ w_c = \sqrt{z_1\bar{z}_2}.$

26. $z_1 = 7 + i,\ z_2 = 1 + 7i;\quad w_a = z_1\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{z_2}{\bar{z}_1}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}}.$

27. $z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = 4 - 2i;\quad w_a = z_1^2 z_2^2,\ w_b = \dfrac{z_1}{z_2},\ w_c = \sqrt[3]{\dfrac{z_2}{\bar{z}_1}}.$

28. $z_1 = 3 - 4i,\ z_2 = -4 + 3i;\quad w_a = (\bar{z}_1 z_2)^2,\ w_b = \dfrac{z_2}{\bar{z}_1},\ w_c = \sqrt{z_1 z_2}.$

29. $z_1 = 4 + 4i,\ z_2 = 2 - 2i;\quad w_a = z_1 z_2^2,\ w_b = \dfrac{z_1^2}{\bar{z}_2},\ w_c = \sqrt[3]{\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}}.$

30. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 2\sqrt{3} + 2i;\quad w_a = z_1^2\bar{z}_2,\ w_b = \left(\dfrac{z_2}{\bar{z}_1}\right)^2,\ w_c = \sqrt[4]{\bar{z}_2}.$

Задача 2

Заштриховать на рисунке область плоскости z, определяемую заданными неравенствами. Границы области, ей принадлежащие, вычертить сплошными линиями, а не принадлежащие — пунктирными.

1. $\begin{cases} |z-1| > 1; \\ |z+1| \geqslant 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} |z-2| > 2; \\ |z-4| \leqslant 4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} |z-1| > 2; \\ \operatorname{Re} z < 3; \\ -\pi/4 \leqslant \arg z \leqslant \pi/4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} |z-2| \leqslant 1; \\ \operatorname{Re} z > 1,5; \\ \operatorname{Im} z \geqslant -0,5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} |z| \geqslant 1; \\ |z+\sqrt{2}| + |z-\sqrt{2}| < 2\sqrt{3}; \\ \operatorname{Im} z > 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} |z-1| \leqslant 1 + \operatorname{Re} z; \\ \operatorname{Re} z < 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} |z+2| - |z-2| \geqslant 2\sqrt{3}; \\ \operatorname{Re} z < 3; \\ \operatorname{Im} z \geqslant 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} |z-2| \leqslant 2; \\ |z-1| > 1; \\ |z-3| \geqslant 1; \\ \operatorname{Im} z \geqslant 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} |z+2| - |z-2| \leqslant 2\sqrt{3}; \\ 0 < \arg z < \pi/6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} |z-i| \geqslant 1 + \operatorname{Im} z > 0; \\ -2 \leqslant \operatorname{Re} z < 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} |z-1-i| < \sqrt{2}; \\ \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \geqslant 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} |z+\sqrt{2}| - |z-\sqrt{2}| < 2; \\ |z-1| \leqslant 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} |z-i| \leqslant 1 + \operatorname{Im} z; \\ \arg z \leqslant \pi/4; \\ \operatorname{Im} z \leqslant 2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} |z^2-1| \leqslant 1; \\ \operatorname{Re} z > 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} |z-1-i| \geqslant 1; \\ |z-1+i| \geqslant 1; \\ |z-1| < 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} |z-1| > 1 + \operatorname{Re} z; \\ |z+1| + |z-1| \leqslant 2\sqrt{2}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} |z^2-1| \geqslant 1; \\ |z-\sqrt{2}| < 2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} |z-i| < 1 + \operatorname{Im} z; \\ |z+i\sqrt{2}| - |z-i\sqrt{2}| \leqslant 2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} |z\bar{z}|^2 > \operatorname{Re}(z^2); \\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/4; \\ |z-1| \leqslant 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} |z-1| \leqslant 1 + \operatorname{Re} z; \\ |z+1| + |z-1| > 2\sqrt{2}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} |z+i\sqrt{5}| - |z-i\sqrt{5}| \leqslant 4; \\ \operatorname{arctg} 2 < \arg z < \pi - \operatorname{arctg} 2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} |z\bar{z}|^2 < Im(z^2); \\ \pi/4 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2. \end{cases}$

26. $\{\, |z| - 2 \leqslant \operatorname{Re} z < 2 - |z|.$

27. $\begin{cases} |z+i\sqrt{3}| - |z-i\sqrt{3}| \geqslant 2\sqrt{2}; \\ |z+i\sqrt{3}| + |z-i\sqrt{3}| < 4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 0 \leqslant |z+\sqrt{2}|-|z-\sqrt{2}| \leqslant 2; \\ |z+\sqrt{3}|+|z-\sqrt{3}| < 4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} |z-i| < \operatorname{Im} z+1; \\ |z+2|+|z-2| \geqslant 2\sqrt{5}; \\ \operatorname{Im} z \leqslant 2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} |z+\sqrt{2}|-|z-\sqrt{2}| \leqslant 2; \\ |z-1| < 1+\operatorname{Re} z; \\ \operatorname{Im} z \geqslant 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} |z-1-i| \leqslant 1; \\ \operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z > 2; \\ \arg z > \pi/4. \end{cases}$

29. $\begin{cases} |z\bar{z}|^2 \geqslant 2\operatorname{Im}(z^2); \\ |z-1-i| < 1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} |z+i\sqrt{3}|+|z-i\sqrt{3}| \geqslant 4; \\ |z| < 2; \\ \operatorname{Im} z \geqslant 0. \end{cases}$

Задача 3

Вычислить указанные значения функций.

1. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+i\right),\ \ln(2-3i).$
2. $\operatorname{ch}\left(2-\frac{\pi i}{2}\right),\ e^{2+\frac{\pi i}{3}}.$
3. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+2i\right),\ \ln(3-4i).$
4. $\operatorname{th}\left(1-\frac{\pi i}{2}\right),\ e^{-1-\frac{2\pi i}{3}}.$
5. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+i\right),\ \ln(-3+i).$
6. $\operatorname{sh}\left(1+\frac{\pi i}{4}\right),\ e^{0,5+\pi i}.$
7. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-i\right),\ \ln(-2-2i).$
8. $\operatorname{ch}\left(1+\frac{\pi i}{4}\right),\ e^{-0,5-\frac{\pi i}{2}}.$
9. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right),\ \ln(-5+12i).$
10. $\operatorname{cth}\left(-1+\frac{\pi i}{3}\right),\ e^{-1+\frac{\pi i}{3}}.$
11. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+3i\right),\ \ln(-4-3i).$
12. $\operatorname{sh}\left(2-\frac{\pi i}{2}\right),\ e^{1-\frac{\pi i}{4}}.$
13. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+2i\right),\ \ln(-3-3i).$
14. $\operatorname{sh}\left(2+\frac{\pi i}{4}\right),\ e^{-0,5+\frac{3\pi i}{4}}.$
15. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+3i\right),\ \operatorname{Ln}(2-4i).$
16. $\operatorname{cth}\left(1-\frac{\pi i}{4}\right),\ e^{0,1+\frac{\pi i}{2}}.$
17. $\sin\left(\frac{\pi}{6}-i\right),\ \ln(-3+i).$
18. $\operatorname{ch}\left(2-\frac{\pi i}{6}\right),\ e^{2(1+i)}.$
19. $\operatorname{th}\left(1+\frac{\pi i}{3}\right),\ \operatorname{Ln}\left(\frac{1+i}{1-i}\right).$
20. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2i\right),\ e^{\frac{\pi(1-i)}{2}}.$
21. $\operatorname{ch}(2-\pi i),\ \operatorname{Ln}\left(\frac{2-i}{2+i}\right).$
22. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+2i\right),\ e^{-(1+2i)\frac{\pi}{2}}.$
23. $\operatorname{sh}\left(\frac{1+\pi i}{2}\right),\ \ln\left(\frac{1+2i}{-1+2i}\right).$
24. $\cos\left(\frac{\pi+2i}{2}\right),\ e^{-1-\frac{3\pi i}{4}}.$
25. $\operatorname{cth}(2-\pi i),\ \operatorname{Ln}(5-12i).$
26. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\right),\ e^{2+\frac{\pi i}{3}}.$
27. $\operatorname{sh}\left(2+\frac{\pi i}{4}\right),\ \operatorname{Ln}(24-7i).$
28. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2i\right),\ e^{-2+\frac{\pi i}{6}}.$
29. $\operatorname{ch}\left(1-\frac{\pi i}{3}\right),\ \ln(3+4i).$
30. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-i\right),\ e^{1,5+\frac{\pi i}{2}}.$

Задача 4

Проверить, будет ли аналитической заданная функция.

1. $\frac{1}{1+z}.$
2. $\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right).$
3. $\ln(1+z).$
4. $\frac{1}{1+\bar{z}}.$
5. $\operatorname{ch}(\bar{z}-2).$
6. $\ln(1+\bar{z}).$
7. $\operatorname{sh}(z+1).$
8. $e^{1+z}.$
9. $e^{(\bar{z})^2}.$
10. $\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right).$
11. $e^{\bar{z}-1}.$
12. $\frac{1}{1-z}.$
13. $\ln(\bar{z}-1).$
14. $e^{z^2}.$
15. $z+1.$
16. $1+\frac{1}{\bar{z}}.$
17. $\frac{1}{\bar{z}-1}.$
18. $(1+\bar{z})^3.$
19. $\sin\left(2\bar{z}+\frac{\pi}{4}\right).$
20. $\ln\frac{\bar{z}}{z}.$
21. $z^2+(\bar{z})^2.$
22. $z+\frac{1}{z}.$
23. $\bar{z}+\frac{1}{z}.$
24. $z\bar{z}.$
25. $\frac{\bar{z}}{z}.$
26. $\sin 2z.$
27. $\operatorname{ch}\frac{z}{2}.$
28. $\ln(z-1).$
29. $1-\frac{1}{z}.$
30. $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}.$

Задача 5

Установить, может ли данная функция служить вещественной или мнимой частью некоторой аналитической функции и, если может, восстановить эту аналитическую функцию. Убедиться в том, что найденная функция аналитична и удовлетворяет заданному условию. Ниже через $u(x,y)$ обозначена вещественная часть искомой аналитической функции, а через $v(x,y)$ — мнимая часть.

1. $u(x,y) = \sin y \operatorname{ch} x$.

2. $v(x,y) = \cos y \operatorname{ch} x$.

3. $v(x,y) = e^x \operatorname{ch} y$.

4. $u(x,y) = e^{-x} \sin y$.

5. $v(x,y) = e^y \sin x$.

6. $u(x,y) = e^{-y} \cos x$.

7. $u(x,y) = e^y \operatorname{sh} x$.

8. $v(x,y) = \operatorname{sh} y \sin x$.

9. $v(x,y) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.

10. $u(x,y) = -\operatorname{sh} x \sin y$.

11. $u(x,y) = e^{-2x} \sin 2y$.

12. $v(x,y) = \operatorname{sh} 2x \cos 2y$.

13. $v(x,y) = \operatorname{ch} 2x \cos 2y$.

14. $v(x,y) = \operatorname{sh} 3x \sin 3y$.

15. $u(x,y) = e^{2y} \sin 2x$.

16. $v(x,y) = e^{-2y} \cos 2x$.

17. $u(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

18. $v(x,y) = -\ln(x^2+y^2)$.

19. $v(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

20. $u(x,y) = \dfrac{y}{(x^2+y^2)}$.

21. $v(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)}$.

22. $v(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

23. $u(x,y) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

24. $u(x,y) = 3x^2y - y^3$.

25. $u(x,y) = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

26. $v(x,y) = e^{2x} \cos 2y$.

27. $v(x,y) = -e^{x/2} \sin \dfrac{y}{2}$.

28. $u(x,y) = \operatorname{sh} \dfrac{x}{2} \sin \dfrac{y}{2}$.

29. $u(x,y) = e^{x-y}$.

30. $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Задача 6

Определить круг сходимости заданного степенного ряда. Выяснить, сходится ли ряд в заданной точке z_1, z_2, z_3 (если сходится, то как: абсолютно или условно). Сделать рисунок.

Вар.	**Ряд**	z_1	z_2	z_3
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-i)^{2n-1}}{2^n(n+\ln n)}$	$2i$	$3i$	$\sqrt{2}+i$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1-i)^{2n}}{3^n(n^2+n\ln n)}$	0	$\sqrt{3}-1+i$	$2+i$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-1-i)^{n}}{2^n(n+1)\ln(n+1)}$	0	$3+i$	$1+3i$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-2i)^{2n-1}}{(n+1)^2\ln(n+1)}$	0	$3i$	$1+2i$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1-2i)^{n}}{2^n(n+1)\ln^2(n+1)}$	0	$1+2i$	-1
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2/3)^n(z-1+i)^{n}}{n+\sin(n\pi/2)}$	0	$\dfrac{5}{2}-i$	$1+\dfrac{i}{2}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3/4)^n(z+2i)^{2n}}{\sqrt{n+\ln n}}$	0	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}-2i$	$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-2\right)i$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-i)^{n}}{(2i)^n(n+1+arctgz)}$	0	$3i$	$2+i$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1+2i)^{2n}}{(4i)^n(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	0	$1-2i$	-1
10	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-2+i)^{2n+1}}{3^n\big((n+1)^2+\ln^2(n+1)\big)}$	0	$2+\sqrt{2}$	$2+i(\sqrt{3}-1)$
11	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+1-2i)^{n}}{(2i)^n\sqrt{(n+1)^3+2n\ln n}}$	0	$1+2i$	$-1+4i$
12	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \dfrac{(z-2i)^{n}}{n+1+\sin n\alpha}$	1	$\dfrac{2}{3}+2i$	$\dfrac{8}{3}i$

Вар.	**Ряд**	z_1	z_2	z_3
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2i)^n(z+1)^{2n}}{\sqrt{n+1+\arcsin(1/n)}}$	0	$-1+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{3}{2}$
14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n(z+3i)^n}{3^n(n^2+1)}$	0	$3-3i$	i
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-1+i)^{2n}}{4^n n\sqrt{n+1}}$	0	$3-i$	$1+i$
16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2+2i)^n}{3^n\sqrt{n^3+1}}$	0	$2+i$	$-1-3i$
17	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z+1+i)^{2n}}{9^n\sqrt{n+1}}$	0	$2-i$	$-1+2i$
18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-i\sqrt{2})^{2n}}{2^n\sqrt[3]{n^2+n\ln n}}$	0	$\sqrt{2}(1+i)$	1
19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+i\sqrt{3})^{2n-1}}{3^n(n+1)\ln^{3/2}(n+1)}$	0	$\sqrt{3}(1-i)$	-1
20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-1+i)^{2n-1}}{2^n(n+1)\ln(n+1)}$	0	$1+i$	$1-2i$
21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n(z+1+i/2)^n}{2^n(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	0	$-1+\dfrac{3}{2}i$	$1-i/2$
22	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-2+3i)^{2n}}{4^n(n+1+\ln^2(n+1))}$	$2-i$	$4-3i$	$1-2i$
23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+1-2i)^{2n-1}}{5^n(n+1)\ln^3(n+1)}$	0	$1+i$	1
24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-2+2i)^n}{3^n(1+1/n)^n}$	0	$-1-2i$	$5-i$
25	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n n^2(z+3-i)^n}{3^n\ln(n+1)}$	0	$-3-2i$	$-1+i$
26	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+1)(z-2)^{2n}}{2^n(1+\sin^2 n\alpha)}$	0	$2+\sqrt{2}$	$2+i$
27	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+\ln n)(z-1+i)^{2n}}{2^n}$	0	1	$1+\sqrt{2}-i$
28	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)\ln(n+1)(z-1)^{2n-1}}{3^n}$	$1+\sqrt{3}$	$1+i\sqrt{3}$	0
29	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z+2i)^n 2^{2n}}{3^n(n+\sqrt{n})}$	0	$\dfrac{3}{4}-2i$	$-\dfrac{5}{4}i$
30	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n(z-i\sqrt{2})^{2n}}{2^n\sqrt{n^2+1}}$	0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+i\sqrt{2}$

Задача 7

Найти все разложения заданной функции $f(z)$ по степеням $z-a$ и указать области этих разложений.

Замечания. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \displaystyle\int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}$.

1. $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)}$ по степ. $(z-1)$.

2. $f(z) = \dfrac{z}{z^2-5z+4}$ по степ. $(z-2)$.

3. $f(z) = \dfrac{z+2}{(z^2+2z+5)^2}$ по степ. $(z+1)$.

4. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z-\pi/4}$ по степ. $(z-\pi/4)$.

5. $f(z) = \dfrac{z-1}{\sqrt[3]{z^3-3z^2+3z}}$ по степ. $(z-1)$.

6. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-1)}$ по степ. $(z+1)$.

7. $f(z) = \dfrac{z+4}{(z^3+6z^2+12z)^2}$ по степ. $(z+2)$.

8. $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(16-12z+6z^2-z^3)^2}}$ по степ. $(z-2)$.

9. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-4)^2}$ по степ. $(z-2)$.

10. $f(z) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+z}{1-z}$ по степ. (z).

11. $f(z) = \operatorname{arctg} z$ по степ. (z).

12. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)^3}$ по степ. $(z+1)$.

13. $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z+\pi/4)^2}$ по степ. $(z+\pi/4)$.

14. $f(z) = (z-1)^2\sin^2\dfrac{1}{z-1}$ по степ. $(z-1)$.

15. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-3\pi/4)^3}$ по степ. $(z-3\pi/4)$.

16. $f(z) = \left(\dfrac{\sin z}{z}\right)^3$ по степ. (z).

17. $f(z) = \dfrac{z}{\sqrt[3]{z^3+3z^2+3z}}$ по степ. $(z+1)$.

18. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-1)^3}$ по степ. $(z+1)$.

19. $f(z) = \dfrac{\sqrt[3]{7+3z-3z^2+z^3}}{z-1}$ по степ. $(z-1)$.

20. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-4)}$ по степ. $(z+2)$.

21. $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{(z-\pi/8)^2}$ по степ. $(z-\pi/8)$.

22. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z^2+4)}$ по степ. (z).

23. $f(z) = \dfrac{\cos^2 z}{(z+\pi/8)^2}$ по степ. $(z+\pi/8)$.

24. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z^2-4)}$ по степ. (z).

25. $f(z) = \dfrac{1}{1+z+z^2}$ по степ. (z).

26. $f(z) = \dfrac{1}{z+1}\cos^2\dfrac{1}{z+1}$ по степ. $(z+1)$.

27. $f(z) = \left(\dfrac{\cos z}{z}\right)^3$ по степ. (z).

28. $f(z) = \dfrac{1}{1-z+z^2}$ по степ. (z).

29. $f(z) = \dfrac{z+2}{(z^3+3z^2+3z)^2}$ по степ. $(z+1)$.

30. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-2z)^3}$ по степ. $(z-1)$.

Задача 8

Найти все особые точки заданной функции $f(z)$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

1. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}$.

2. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2+\pi^2)^2}$.

3. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z^2-\pi^2)^2}$.

4. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+\pi^2)^3}$.

5. $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^2-\pi^2)^3}$.

6. $f(z) = \dfrac{z^2+4}{(z^2+3z+2)^2}$.

7. $f(z) = \dfrac{(z+1)^2}{(z^2-3z+2)^2}$.

8. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2-\pi^2)^2}$.

9. $f(z) = z^3e^{-1/z^2}$.

10. $f(z) = z^3\cos\dfrac{1}{z^2}$.

11. $f(z) = z^5\sin\dfrac{1}{z^2}$.

12. $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{1-z}$.

13. $f(z) = \dfrac{1}{1-z}\sin\dfrac{1}{z}$.

14. $f(z) = \dfrac{1}{1+z}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

15. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}e^{1/z}$.

16. $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}e^{1/z}$.

17. $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}\sin\dfrac{1}{z}$.

18. $f(z) = \dfrac{z}{1-z^2}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$.

19. $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}\cos\dfrac{1}{z}$.

20. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

21. $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)^2}\cos\dfrac{1}{z}$.

22. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}\sin\dfrac{1}{z}$.

23. $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z^2)}\cos\dfrac{1}{z}$.

24. $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$.

25. $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

26. $f(z) = \dfrac{z}{1-z}\sin\dfrac{1}{z}$.

27. $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z)}\cos\dfrac{1}{z}$.

28. $f(z) = \dfrac{1}{1+z}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$.

29. $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

30. $f(z) = \dfrac{z}{1+z}e^{-1/z}$.

Задача 9

Вычислить интеграл.

1. $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z^2+1)^2}$, $C\colon |z+i|=1$.

2. $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z^2-1)^3}$, $C\colon |z-1|=1$.

3. $\oint\limits_C \dfrac{(z^2+1)}{z^3+1}\,dz$, $C\colon |z|=2$.

4. $\oint\limits_C z^2 e^{-1/z}dz$, $C\colon |z|=1$.

5. $\oint\limits_C z^2 \operatorname{sh}\dfrac{1}{z}\,dz$, $C\colon |z|=2$.

6. $\oint\limits_C z\,\cos\dfrac{1}{z}\,dz$, $C\colon |z|=2$.

7. $\oint\limits_C \dfrac{(z^3+1)\,dz}{(z^2+1)^2}$, $C\colon |z|=2$.

8. $\oint\limits_C \dfrac{e^z dz}{(z^2-1)^2}$, $C\colon |z+1|=1$.

9. $\oint\limits_C \dfrac{e^{iz}dz}{z^2+1}$, $C\colon |z|=2$.

10. $\oint\limits_C \dfrac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z^2+\pi^2)^2}$, $C\colon |z-\pi i|=\pi$.

11. $\oint\limits_C \dfrac{\sin z\,dz}{(z^2-\pi^2/4)^2}$, $C\colon |z-\pi/2|=1$.

12. $\oint\limits_C \dfrac{\ln z\,dz}{(z^2+1)^2}$, $C\colon |z-i|=0{,}5$.

13. $\oint\limits_C \dfrac{\ln(z+1)\,dz}{(z^2-1)^2}$, $C\colon |z-1|=1$.

14. $\oint\limits_C \dfrac{e^{-z}dz}{z(z-1)^3}$, $C\colon |z-1|=2$.

15. $\oint\limits_C \dfrac{\cos z\,dz}{z^2(z-\pi)^2}$, $C\colon |z-\pi|=4$.

16. $\oint\limits_C \dfrac{(z+2)^2 e^z \sin \pi z\,dz}{z-2}$, $C\colon |z-2|=1$.

17. $\oint\limits_C \dfrac{z^3\,dz}{(z+1)^3(z-2)}$, $C\colon |z-2|=2$.

18. $\oint\limits_C \dfrac{(z^2+1)\,dz}{z^2(z+2)^2}$, $C\colon |z|=1$.

19. $\oint\limits_C \dfrac{z^3\,dz}{(z-1)^3(z+2)}$, $C\colon |z-1|=2$.

20. $\oint\limits_C \dfrac{e^{iz} z\,dz}{z^2+1}$, $C\colon |z-i|=1$.

21. $\oint\limits_C \dfrac{e^{-iz}(1-z^2)\,dz}{1+z^2}$, $C\colon |z+i|=1$.

22. $\oint\limits_C \dfrac{\operatorname{sh} z\,dz}{(z^2+\pi^2)^2}$, $C\colon |z-\pi i|=\pi$.

23. $\oint\limits_C \dfrac{\sin^2 z\;dz}{(z^2-\pi^2/4)^2}$, $C\colon |z+\pi/2|=1$.

24. $\oint\limits_C \dfrac{\operatorname{tg} z\,dz}{(z-\pi/4)^3}$, $C\colon |z-\pi/4|=0{,}5$.

25. $\oint\limits_C \dfrac{\operatorname{ch}\pi z\,dz}{(z^2+1)^3}$, $C\colon |z-i|=1$.

26. $\oint\limits_C \dfrac{\ln(1+z)\,dz}{(z^2-1)^3}$, $C\colon |z-1|=1$.

27. $\oint\limits_C \dfrac{e^z \ln(z+1)\,dz}{(z-1)^2}$, $C\colon |z-1|=1$.

28. $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z^4-16)^2}$, $C\colon |z-2i|=2$.

29. $\oint\limits_C \dfrac{\operatorname{th}(\pi z/4)}{(z^2+1)^2}\,dz$, $C\colon |z-i|=0{,}5$.

30. $\oint\limits_C \dfrac{e^{iz}\cos z\,dz}{(z-\pi)^3}$, $C\colon |z-\pi|=\pi$.