

ТФКП. Домашнее задание 6.

1. Найти области сходимости рядов

$$\text{а) } S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n; \quad \text{б) } S(z) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} z^n.$$

2. Найти область сходимости \mathcal{M} ряда и вычислить его сумму

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-i)^n}.$$

3. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 2z^2 + z - 2}$$

в ряд Лорана

а) в окрестности точки $z_0 = 0$; б) в кольце $1 < |z| < 2$;

в) в окрестности $z_0 = \infty$.

Указание. Знаменатель дроби имеет следующие корни: $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 2$.

4. Построить разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 :

$$f(z) = \frac{1}{z(z+i)} \quad \text{а) } z_0 = 0; \quad \text{б) } z_0 = -i; \quad \text{в) } z_0 = \infty.$$

5. Построить разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 :

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 4)^2} \quad \text{а) } z_0 = 2; \quad \text{б) } z_0 = \infty.$$

6. Построить разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 :

$$f(z) = z \sin \frac{1}{z^3} \quad \text{а) } z_0 = 0; \quad \text{б) } z_0 = \infty.$$

7. Построить разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 :

$$f(z) = ze^{1/(2z-1)}, \quad z_0 = 1/2.$$

8. Для каждой из заданных функций указать на полной комплексной плоскости все её особые точки и определить их характер:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а) } z^4 \cos z; & \text{б) } \frac{\sin z - z \cos z}{z^5}; & \text{в) } \frac{\sin z - z \cos(z/\sqrt{3})}{z^5}; \\
 \text{г) } \frac{1}{z^3(z^4 + 16)^2}; & \text{д) } \frac{(z^3 - 1)^2}{(z^2 + 1)^2}; & \text{е) } \sin \frac{1}{(1 + iz)^7}; \\
 \text{ж) } z^3(e^{1/z^2} - 1); & \text{з) } \frac{1 - e^{-z/2}}{1 - e^z}; & \text{и) } \frac{1}{1 - e^{z^2}}; \\
 \text{к) } \frac{z \cos z - \sin z}{\operatorname{sh}^3 z}; & \text{л) } \operatorname{ctg} \frac{1}{z}; & \text{м) } \sin \left(\sin \frac{1}{z} \right); \quad \text{н) } \sin \left(z^2 \sin \frac{1}{z} \right).
 \end{array}$$