Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Уральский государственный университет путей сообщний
Кафедра «Высшая и прикладная математика»

В. В. Башуров
О. А. Башурова
Л. Ф. Спевак

Теория вероятностей

Екатеринбург
Издательство УрГУПС
2012

Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Уральский государственный университет путей сообщений
Кафедра «Высшая и прикладная математика»

В. В. Башуров
О. А. Башурова
Л. Ф. Спевак

Теория вероятностей

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
230201 – «Информационные системы и технологии»,
090103 – «Организация и технологии защиты информации»,
направлений подготовки бакалавров
230400 – «Информационные системы и технологии»,
090900 – «Информационная безопасность»

Екатеринбург
Издательство УрГУПС
2012

УДК 519.2
Б33

Башуров, В. В.
Б33 Теория вероятностей : учеб.-метод. пособие / В. В. Башуров, О. А. Башурова, Л. Ф. Спевак. – Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2012. – 78, [2] с.

Учебно-методическое пособие рекомендуется для выполнения типового расчета по теории вероятностей. Пособие содержит необходимые теоретические сведения по основным разделам теории вероятностей: случайные события и классическая вероятность, двумерные случайные величины. В пособии приведены специальные таблицы.

Предназначено для студентов специальностей 230201 – «Информационные системы и технологии», 090103 – «Организация и технологии защиты информации», направлений подготовки бакалавров 230400 – «Информационные системы и технологии», 090900 – «Информационная безопасность».

УДК 519.2

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета.

Авторы: В. В. Башуров, доцент кафедры «Высшая и прикладная математика», канд. физ.-мат. наук, УрГУПС

О. А. Башурова, ассистент кафедры «Высшая и прикладная математика», УрГУПС

Л. Ф. Спевак, доцент кафедры «Высшая и прикладная математика», канд. физ.-мат. наук, УрГУПС

Рецензент: В. Е. Замыслов, доцент кафедры «Высшая и прикладная математика», канд. физ.-мат. наук, УрГУПС

© Уральский государственный университет путей сообщения (УрГУПС), 2012

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

> Теория вероятностей есть, в сущности, не что иное, как здравый смысл, сведенный к исчислению: она заставляет оценить с точностью то, что справедливые умы чувствуют как бы инстинктом, часто не умея отдать себе в этом отчета.
>
> *Пьер-Симон Лаплас,*
> *французский математик, физик и астроном*
> *(XVIII–XIX в.)*

Теория вероятностей – это математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений, которые рассматриваются в абстрактной форме и в виде упрощенной схемы – математической модели. Предметом теории вероятностей являются математические модели случайных явлений. Под случайным явлением понимают явление, предсказать исход которого невозможно. Цель теории вероятностей – прогноз и контроль случайных явлений, ограничение области действия случайности.

Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, появились в XVII веке и описывали азартные игры (игральные кости) с целью дать рекомендации игрокам: «Книга об игре в кости» (Дж. Кардано), «О расчетах в азартной игре» (Х. Гюйгенс), «О выходе очков при игре в кости» (Г. Галилей) и др. Становление теории вероятностей как математической науки связано с именем Я. Бернулли, который впервые теоретически обосновал накопленные ранее факты в книге «Искусство предположений» в начале XVIII века.

Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана А. Муавру, П. Лапласу, К. Гауссу, С. Пуассону и др. В конце XIX – начале XX века теория вероятностей становится самостоятельной строгой математической наукой в основном благодаря русским математикам П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А.М. Ляпунову.

В XX веке особенно стоит отметить вклад академика А. Н. Колмогорова, установившего аксиоматику теории вероятностей.

Сейчас методы теории вероятностей широко применяются в различных областях: в математической статистике, теории надежности, теории массового обслуживания, теории связи, теории автоматического управления и т. д. Теория вероятностей служит для построения математических моделей при планировании и организации производства, анализе технологических процессов и т. п.

В пособии представлены теоретические сведения по основным разделам теории вероятностей: случайные события, одномерные и двумерные случайные величины; типовой расчет, включающий в себя задания по этим разделам, необходимые для студентов технических вузов.

1. Основные понятия теории вероятностей

Рассмотрим некоторый опыт со случайными исходами. *Событием* называется факт, который в опыте может произойти или не произойти. События обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, например, A, B, H_1.

Если событие обязательно появляется в результате данного опыта, то оно называется *достоверным,* и будем обозначать его Ω (его также называют *множеством допустимых исходов*).

Если событие заведомо не может произойти в результате опыта, то оно называется *невозможным,* и будем обозначать его как $\varnothing$ (также называют *пустым множеством*).

К событиям чаще всего применяются следующие алгебраические операции.

Произведением (*пересечением*) событий A и B (обозначается $A \cdot B$ или $A \cap B$) называется событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда одновременно происходят события A и B.

События A и B называются *несовместными*, если не могут появиться одновременно в одном опыте, т. е. $A \cdot B = \varnothing$.

Суммой (*объединением*) событий A и B (обозначается $A + B$ или $A \cup B$) называется событие C, которое происходит тогда, когда происходит либо событие A, либо B, либо оба вместе.

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* (*дополнением*) к событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

Событие A *влечет* событие B (обозначается $A \subset B$), если при наступлении события A обязательно наступает событие B.

Пример. Производится опыт – бросание игральной кости. Рассматриваются события A – {выпадет четное число очков} и B – {выпадет не более четырех очков}. Найти исходы событий $C = A \cdot B$, $D = A + B$, $\overline{A}$.

Решение. Возможные исходы опыта – выпадение одного, двух, …, шести очков. Тогда событие A составляют следующие исходы: выпадет два, четыре или шесть очков, событию B удовлетворяют исходы: выпадет одно, два, три, четыре очка. Следовательно, событие C – {выпадет два или четыре очка}, D – {выпадет любое число очков, кроме пяти}, $\overline{A}$ – {выпадет нечетное число очков}.

Для описания степени возможности появления события A в опыте вводится числовая функция $P(A)$, называемая *вероятностью*, которая удовлетворяет трем аксиомам:

1) $P(A) \geq 0$ – *аксиома неотрицательности*;

2) $P(\Omega) = 1$ – *аксиома нормированности*;

3) $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если A и B несовместные – *аксиома сложения.*

Вероятность обладает следующими свойствами:
– вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$;
– вероятность любого события лежит в пределах от 0 до 1: $0 \le P(A) \le 1$;
– вероятность противоположного события находят по формуле
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
– «бóльшему» событию соответствует бóльшая вероятность, т. е. если $A \subset B$, значит, $P(A) \le P(B)$;
– для любых событий A и B справедливо соотношение
$P(A+B) = P(A) + P(B) - P\left(A \cdot B\right)$ (*теорема о сложении вероятностей*).

2. Классическая и геометрическая вероятности

В опыте с равновозможными случайными исходами вероятность события A вычисляется как отношение числа исходов M, благоприятствующих событию A, к общему числу N всех возможных исходов (*классическое определение вероятности*)

$$P(A) = M / N.$$

На практике справедливость формулы классической теоретической вероятности $P(A)$ подтверждается вычислением *статистической вероятности*, которую можно найти по формуле

$$P^*(A) = \lim_{N^* \to \infty} M^* / N^*,$$

где в N^* повторяющихся одинаковых испытаниях событие A наступило M^* раз. Заметим, что теоретическая и статистическая вероятности удовлетворяют всем аксиомам и свойствам вероятности.

Пример. Из колоды 36 карт вытаскивается одна карта. Найти вероятности следующих событий: A – {карта окажется пиковым тузом}, B – {карта окажется королем}, C – {карта окажется червовой масти}.

Решение. В данном опыте общее число исходов равно количеству карт в колоде – $N = 36$. Для события A благоприятствующее число исходов $M = 1$ (в колоде один пиковый туз), следовательно, $P(A) = 1/36$. Для события B благоприятствующее число исходов $M = 4$ (в колоде четыре короля), следовательно, $P(A) = 4/36 = 1/9$. Для события C благоприятствующее число исходов $M = 9$ (в колоде четыре масти по девять карт в каждой), следовательно, $P(C) = 9/36 = 1/4$.

При подсчете числа исходов часто пользуются понятиями и формулами комбинаторики.

Перестановкой из n элементов называется любой упорядоченный набор этих элементов. Число перестановок обозначается P_n и вычисляется по формуле $P_n = n!$.

Размещением из n элементов по m называется любой упорядоченный набор m элементов, выбранных из совокупности n элементов. Число размещений обозначается A_n^m и вычисляется по формуле $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Сочетанием из n элементов по m называется любой неупорядоченный набор m элементов, выбранных из совокупности n элементов. Число сочетаний обозначается C_n^m и вычисляется по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Пример. В урне находятся 8 шаров, среди которых 5 черных и 3 белых. Наудачу вынимают 4 шара. Найти вероятности событий A – $\{$все вынутые шары окажутся черными$\}$, B – $\{$среди вынутых шаров окажутся 2 черных и 2 белых шара$\}$.

Решение. В данном опыте общее число исходов равно количеству всевозможных комбинаций четырех шаров, выбранных из восьми шаров, т. е. числу сочетаний из восьми по четыре – $N = C_8^4 = \dfrac{8!}{4!(8-4)!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70$. Для события A благоприятствующее число исходов равно количеству всевозможных комбинаций четырех черных шаров, выбранных из пяти черных шаров, иначе числу сочетаний из пяти по четыре – $M = C_5^4 = \dfrac{5!}{4!(5-4)!} = \dfrac{5}{1} = 5$, и $P(A) = 5/70 = 1/14$. Для события B благоприятствующее число исходов равно количеству всевозможных комбинаций двух черных шаров, выбранных из общего числа пяти черных шаров, умноженному на количество всевозможных комбинаций двух белых шаров, выбранных из общего числа трех белых шаров. В результате благоприятствующее число исходов

$M = C_5^2 \cdot C_3^2 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!}\cdot\dfrac{3!}{2!(3-2)!} = \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\dfrac{3}{1} = 30$, и $P(B) = 30/70 = 3/7$.

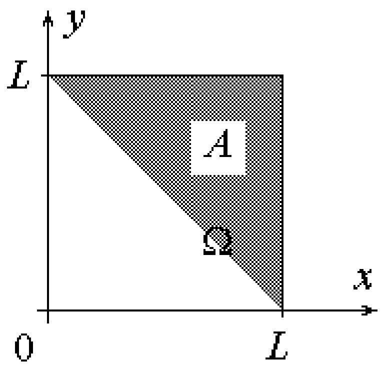
Если число равновозможных исходов несчетно и представляет собой некоторое непрерывное множество, то применяется принцип *геометрической вероятности.* В данном случае опыт заключается в бросании точки в пределах множества допустимых исходов – области Ω. Тогда вероятность наступления события A определяется как вероятность попадания точки в подобласть A, соответствующая множеству исходов события A, и находится по формуле

$$P(A) = \mu(A) / \mu(\Omega),$$

где μ – длина, площадь, объем и т. д. в зависимости от размерности областей.

Пример. Какова вероятность того, что сумма длин двух наудачу взятых отрезков, длины каждого из которых равновероятно распределены на интервале $(0, L)$, будут больше L?

Решение. Обозначим через x длину первого отрезка, через y – длину второго. Длины выбираются наудачу из интервала $(0, L)$, следовательно, применяется геометрическая вероятность. Множество $\Omega: \{(x, y): 0 < x, y < L\}$ – квадрат на рисунке, множество $\mathrm{A}: \{(x, y): x + y > L\}$ – закрашенный треугольник.



Тогда вероятность события A – {сумма длин двух наудачу взятых отрезков, длины каждого из которых равновероятно распределены на интервале $(0, L)$, будут больше L} вычисляется по формуле $P(A) = \dfrac{\mu(\mathrm{A})}{\mu(\Omega)} = \dfrac{S_{\triangle}}{S_{\square}} = \dfrac{\frac{1}{2}L^2}{L^2} = \dfrac{1}{2}$.

3. Условная вероятность

Для нахождения вероятности одновременного наступления событий A и B используется формула умножения вероятностей

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B),$$

где $P(B \mid A)$ – *условная вероятность* события B при условии, что событие A произошло (аналогично определяется $P(A \mid B)$).

Пример. На связке пять ключей. К замку подходит только один из них. Ключи по очереди подбираются для открытия замка. Найти вероятность того, что ключ подойдет со второй попытки (событие A).

Решение. Рассмотрим события $\overline{A}_1$ – {первый ключ не подошел}, A_2 – {второй ключ подошел}. Тогда $P(A) = P(\overline{A}_1 \cdot A_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2 \mid \overline{A}_1)$, где $P(\overline{A}_1) = 4/5$ (четыре неподходящих ключа из пяти), $P(A_2 \mid \overline{A}_1) = 1/4$ (один подходящий ключ из оставшихся четырех). Получаем $P(A) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}$.

Если наступление одного события не влияет на вероятность появления другого, то события называют *независимыми*. Необходимым и достаточным условием независимости событий A и B является следующее соотношение: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример. Три стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу, целясь в одну мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна $0,8$, для второго – $0,7$, для третьего – $0,6$. Найти вероятности событий: A – {после стрельбы в мишени обнаружено две пробоины}, B – {после стрельбы в мишени обнаружено хотя бы одно попадание}.

Решение. Рассмотрим события A_1 – {первый стрелок попал в мишень}, $P(A_1) = 0,8$; A_2 – {второй стрелок попал в мишень}, $P(A_2) = 0,7$; A_3 – {третий стрелок попал в мишень}, $P(A_3) = 0,6$. Также рассмотрим противоположные события $\overline{A}_1$ – {первый стрелок не попал в мишень}, $P(\overline{A}_1) = 1 - 0,8 = 0,2$; $\overline{A}_2$ – {второй стрелок не попал в мишень}, $P(\overline{A}_2) = 1 - 0,7 = 0,3$; $\overline{A}_3$ – {третий стрелок не попал в мишень}, $P(\overline{A}_3) = 1 - 0,6 = 0,4$. Тогда событие A является суммой трех несовместных событий: {первый и второй попали, третий не попал} – $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$, {первый и третий попали, второй не попал} – $A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$, {второй и третий попали, первый не попал} – $\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Тогда вероятность события A:

$$P(A) = P(\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3) =$$
$$= P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0,452.$$

События $A_1, A_2, A_3, \overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ являются попарно независимыми, так как попадание или промах одного из стрелков не влияет на меткость выстрела любого другого.

Для нахождения вероятности события B удобно рассмотреть противоположное событие $\overline{B}$ – {после стрельбы в мишени не обнаружено ни одного попадания}, т. е. {первый, второй и третий стрелки не попали} – $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$. Тогда $P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0,024$. Следовательно, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,024 = 0,976$.

Пусть событие A может наступить только при появлении одного из событий H_1, $H_2,\ldots$, H_n, которые образуют *полную группу* – события H_1, $H_2,\ldots$, H_n попарно несовместны друг с другом и $\sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1$. Тогда вероятность наступления события A вычисляется по *формуле полной вероятности*

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i),$$

причем H_1, $H_2,\ldots$, H_n называют *гипотезами.*

Пример. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в отношении $1:3:6$. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью $0,9$; средний – $0,3$; мелкий – $0,1$. Какова вероятность того, что попавший в броню осколок пробьет ее (событие A)?

Решение. Рассмотрим следующие гипотезы: H_1 – {крупный осколок попал в броню}, H_2 – {средний осколок попал в броню}, H_3 – {мелкий осколок попал в броню}. Вероятности гипотез рассчитываем, используя заданное соотношение образования осколков $1:3:6$: $P(H_1)=\dfrac{1}{1+3+6}=0,1$, $P(H_2)=\dfrac{3}{1+3+6}=0,3$, $P(H_3)=\dfrac{6}{1+3+6}=0,6$. Заметим, что $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=0,1+0,3+0,6=1$. В задаче заданы условные вероятности пробивания брони каждым осколком: $P(A\,|\,H_1)=0,9$, $P(A\,|\,H_2)=0,3$, $P(A\,|\,H_3)=0,1$. Тогда $P(A)=P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)+$ $+P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)+P(H_3)\cdot P(A\,|\,H_3)=0,1\cdot 0,9+0,3\cdot 0,3+0,6\cdot 0,1=0,24$

Если при тех же условиях событие A свершилось, то пересчет вероятностей гипотез производится по *формуле Байеса*

$$P(H_k\,|\,A)=\frac{P(H_k)\cdot P(A\,|\,H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)},\ k=1,2,\ldots,n.$$

Пример. Из 25 студентов группы 5 студентов знают все 30 вопросов программы, 10 студентов выучили по 25 вопросов, 7 студентов – по 20 вопросов, трое – по 10 вопросов. Случайно выбранный студент ответил на заданный вопрос (событие A свершилось). Какова вероятность того, что он из тех студентов, которые подготовили 10 вопросов?

Решение. Рассмотрим следующие гипотезы: H_1 – {вызван студент, который выучил 30 вопросов}, $P(H_1)=\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$; H_2 – {вызван студент, который выучил 25 вопросов}, $P(H_2)=\dfrac{10}{25}=\dfrac{2}{5}$; H_3 – {вызван студент, который выучил 20 вопросов}, $P(H_3)=\dfrac{7}{25}$; H_4 – {вызван студент, который выучил 10 вопросов}, $P(H_4)=\dfrac{3}{25}$. Заметим, что $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)+P(H_4)=$ $=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{7}{25}+\dfrac{3}{25}=1$. Рассмотрим событие A – {вызванный студент ответит на заданный вопрос}. Тогда условные вероятности будут $P(A\,|\,H_1)=\dfrac{30}{30}=1$, $P(A\,|\,H_2)=\dfrac{25}{30}=\dfrac{5}{6}$, $P(A\,|\,H_3)=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$, $P(A\,|\,H_4)=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$. Найдем вероятность события A по формуле полной вероятности: $P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)=\dfrac{1}{5}\cdot 1+\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{25}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{25}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{19}{25}$. Вероятность того, что студент, ответивший на вопрос, оказался из тех, кто выучил всего десять вопросов, находится по формуле Байеса

$$P(H_4\,|\,A)=\frac{P(H_4)\cdot P(A\,|\,H_4)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{25}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{19}{25}}=\frac{1}{19}.$$

4. Схема Бернулли

Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A может появиться с одной и той же вероятностью p (*вероятность «успеха»*). При этом $q=1-p$ называют *вероятностью «неудачи»,* и такая последовательность опытов называется *схемой Бернулли.* Тогда вероятность того, что в n опытах событие A появится m раз, вычисляется по *формуле Бернулли*

$$P_n(m)=C_n^m\,p^m q^{n-m}.$$

Пример. Бланк программированного опроса состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос даны три ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность того, что методом угадывания студенту удастся выбрать, по крайней мере, три правильных ответа (событие A)?

Решение. В данной задаче число независимых испытаний – это число вопросов $n=4$. Вероятность «успеха» – это вероятность угадать правильный ответ в каждом вопросе – $p=\frac{1}{3}$, следовательно, вероятность «неудачи» – $q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Рассмотрим события: A_1 – {студент угадал три правильных ответа}, A_2 – {студент угадал четыре правильных ответа}. Для события A_1 число «успехов» $m=3$, для события A_2 число «успехов» $m=4$. Тогда

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2) \quad P_4(3) + P_4(4) \quad C_4^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1+C_4^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=$$

$$=\frac{4!}{3!(4-3)!}\frac{2}{3^4}+\frac{4!}{4!(4-4)!}\frac{1}{3^4} \quad \frac{4\cdot 2}{81}+\frac{1}{81}=\frac{1}{9}.$$ (По определению $0!=1$).

При большом числе n опытов применяются приближенные формулы.

Теорема Пуассона. Пусть в схеме Бернулли n велико, а p близко к нулю, тогда

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda=np.$$

Пример. В пчелиной семье 4000 пчел. Вероятность заболевания в течение дня равна $0,001$ для каждой пчелы. Найти вероятность того, что в течение дня заболеет более чем одна пчела (событие A).

Решение. Число независимых испытаний – это количество пчел $n=4000$. Вероятность «успеха» – это вероятность заболевания пчелы в течение дня $p=0,001$, тогда $\lambda=4000\cdot 0,001=4$. В данной задаче необходимо рассмотреть обратное событие $\overline{A}$ – {в течение дня заболеет либо одна пчела, либо ни одна пчела не заболеет}. Тогда вычисляем по формуле Пуассона $P\left(\overline{A}\right)=P_{4000}\left(0\right)+P_{4000}\left(1\right) = \frac{4^0}{0!}e^{-4}+\frac{4^1}{1!}e^{-4}=0,09$. В результате получим $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right) \quad 1-0,09 \quad 0,91$.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Пусть в схеме Бернулли n велико, а p и q не близки к нулю, тогда

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(x\right),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Значения функции $\varphi(x)$ приведены в специальной таблице (см. Приложение 1). Заметим, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Пусть в схеме Бернулли n велико, а p и q не близки к 0. Тогда вероятность того, что число успехов m будет заключено в пределах от m_1 до m_2 можно найти по приближенной формуле

$$P\left\{m_1 \le m \le m_2\right\} \approx \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ – функция Лапласа, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции Лапласа приведены в специальной таблице (см. Приложение 2). Заметим, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и при $x > 4$ имеем $\Phi(x) \approx 0,5$.

Пример. Монета подбрасывается 100 раз. Найти вероятность событий: A – {«орел» выпадет 50 раз}, B – {«орел» выпадет более 60 раз}.

Решение. В данной задаче число независимых испытаний $n = 100$. Вероятность выпадения «орла» в каждом броске $p = \frac{1}{2}$, вероятность выпадения «решки» $q = \frac{1}{2}$. Тогда $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 0$. По таблице $\varphi\left(0\right) = 0,3989$. Следовательно, $P(A) = P_{100}(50) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \varphi\left(0\right) = 0,08$.

Для события B имеем $m_1 = 60$ и $m_2 = 100$. Тогда $x_1 = \frac{60 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 2$, $x_2 = \frac{100 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 10$. По таблице $\Phi(2) = 0,4772$ и $\Phi(10) = 0,5$. Следовательно, $P(B) = P(60 \le m \le 100) = \Phi\left(10\right) - \Phi\left(2\right) =$ $= 0,5 - 0,4772 = 0,0228$.

5. Случайная величина

Случайной величиной называется числовая функция, которая каждому исходу опыта ставит в соответствие некоторое число. Случайные величины обозначаются как греческими буквами ξ, η, так и заглавными латинскими X, Y, при этом значения случайной величины будем обозначать строчными латинскими буквами x, y. Случайная величина X характеризуется *функцией распределения* $F(x)$, которая в каждой точке x определяется как вероятность события $\{X < x\}$, т. е. $F(x) = P\{X < x\}$. Функция распределения удовлетворяет следующим свойствам:

– значения функции распределения лежат в пределах от 0 до 1: $0 \le F(x) \le 1$;

– $F(x)$ – неубывающая функция;

– поведение функции распределения на бесконечности:

$F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

– вероятность попадания случайной величины X в интервал $[x_1, x_2)$ находится по формуле $P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.

Будем рассматривать два типа случайных величин: дискретные и непрерывные случайные величины.

6. Дискретная случайная величина

Случайная величина называется *дискретной*, если ее значения представляют собой конечный (или счетный) набор чисел. Дискретная случайная величина X описывается *законом распределения* в виде следующей таблицы

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

В первой строке в возрастающем порядке расположены все возможные значения случайной величины, а во второй – вероятности того, что случайная величина примет то или иное значение: $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, и график функции распределения имеет ступенчатый кусочно-постоянный вид.

Случайная величина характеризуется неслучайными числовыми параметрами: математическим ожиданием и дисперсией. *Математическое ожидание* *дискретной случайной величины* X характеризует среднее значение случайной величины и определяется по формуле

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Математическое ожидание удовлетворяет следующим свойствам:
– если $C=\mathrm{const}$, то $M(C)=C$;
– если a и $b=\mathrm{const}$, то $M(a\cdot X+b) = a\cdot M(X)+b$;
– для случайных величин X и Y справедливо соотношение
$M(X+Y) = M(X)+M(Y)$.

Дисперсия дискретной случайной величины X характеризует меру разброса случайной величины относительно математического ожидания и определяется по формуле

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i .$$

Дисперсия удовлетворяет следующим свойствам:
– если $C=\mathrm{const}$, то $D(C)=0$;
– если a и $b=\mathrm{const}$, то $D(a\cdot X+b)=a^2\cdot D(X)$;
– $D(X)\geq 0$;
– удобная формула вычисления дисперсии –

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X).$$

Иногда для описания разброса случайной величины используется *среднеквадратическое отклонение*, определяемое как

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)}.$$

Пример. Студент выучил 12 из 20 вопросов к зачету. В билете – 3 вопроса. Составить закон распределения числа вопросов из билета, которые знает студент. Записать функцию распределения и построить ее график. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Решение. Обозначим через X число вопросов в билете, которые знает студент. Тогда, случайная величина X принимает значения 0, 1, 2, 3. Находим вероятности: $P(X=0) = \dfrac{C_8^3}{C_{20}^3} = \dfrac{\dfrac{8!}{3!(8-3)!}}{\dfrac{20!}{3!(20-3)!}} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{20\cdot 19\cdot 18} = 0,049,$

$$P(X=1) = \frac{C_{12}^1\cdot C_8^2}{C_{20}^3} = \frac{\dfrac{12!}{1!(12-1)!}\cdot\dfrac{8!}{2!(8-2)!}}{\dfrac{20!}{3!(20-3)!}} = \frac{12\cdot 8\cdot 7\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18} = 0,295,$$

$$P(X=2) = \frac{C_{12}^2\cdot C_8^1}{C_{20}^3} = \frac{\dfrac{12!}{2!(12-2)!}\cdot\dfrac{8!}{1!(8-1)!}}{\dfrac{20!}{3!(20-3)!}} = \frac{12\cdot 11\cdot 8\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18} = 0,463,$$

$$P(X=3) = \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{\dfrac{12!}{3!(12-3)!}}{\dfrac{20!}{3!(20-3)!}} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{20\cdot 19\cdot 18} = 0,193.$$

Получаем закон распределения случайной величины X:

X	0	1	2	3
P	0,049	0,295	0,463	0,193

Проверим: $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i = 0,049 + 0,295 + 0,463 + 0,193 = 1.$

Найдем числовые характеристики.

Математическое ожидание:

$M(X) = 0\cdot 0,049 + 1\cdot 0,295 + 2\cdot 0,463 + 3\cdot 0,193 = 1,8.$

Дисперсия:

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 0^2\cdot 0,049 + 1^2\cdot 0,295 + 2^2\cdot 0,463 + 3^2\cdot 0,193 -$
$-1,8^2 = 0,644.$

Среднеквадратическое отклонение:

$\sigma_X = \sqrt{0,644} = 0,802.$

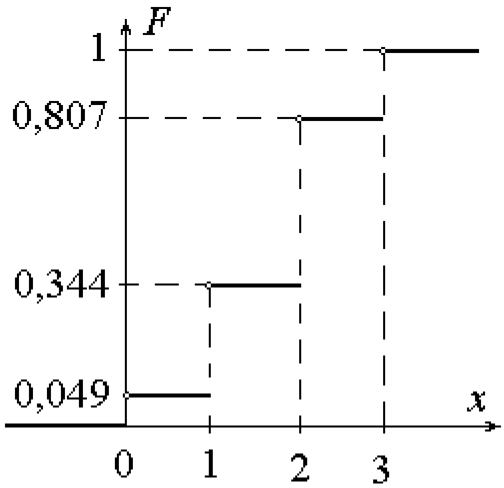
Составим функцию распределения $F(x)$:

при $x \le 0$ имеем $F(x) = P\{X < 0\} = 0$;

при $x \le 1$ имеем $F(x) = P\{X < 1\} = P\{X = 0\} = 0,049$;

при $x \le 2$ имеем $F(x) = P\{X < 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$ $= 0,049 + 0,295 = 0,344$;
при $x \le 3$ имеем $F(x) = P\{X < 3\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\}$ $= 0,049 + 0,295 + 0,463 = 0,807$;
при $x > 3$ имеем $F(x) = P\{X \ge 3\} = 0,049 + 0,295 + 0,463 + 0,193 = 1$. В результате функция распределения и ее график имеют вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0,049, & 0 < x \le 1; \\ 0,344, & 1 < x \le 2; \\ 0,807, & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$



На практике часто встречаются следующие известные законы распределения дискретной случайной величины.

Биноминальное распределение имеет случайная величина X – число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли, где вероятность находится по формуле Бернулли: $P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0,1,...,n$. Для биноминального закона известны числовые характеристики $M(X) = n \cdot p$ и $D(X) = n \cdot p \cdot q$.

Распределение Пуассона имеет случайная величина Y – число успехов в схеме Бернулли при бесконечном числе испытаний n, где вероятность находится по формуле Пуассона $P\{Y = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0,1,...$ и $\lambda > 0$ – параметр распределения Пуассона. Для закона Пуассона известны числовые характеристики $M(Y) = \lambda$ и $D(Y) = \lambda$.

Геометрическое распределение имеет случайная величина Z – число испытаний в схеме Бернулли до наступления первого «успеха». Вероятности находятся по формуле: $P\{Z=k\}= p\cdot q^{k-1}$, $k=1,2,\ldots$, а числовые характеристики вычисляются как $M(Z)=1/p$ и $D(Z)=q/p^2$.

7. Непрерывная случайная величина

Случайная величина называется *непрерывной,* если ее функция распределения непрерывна и кусочно-дифференцируема. Непрерывная случайная величина также характеризуется *плотностью распределения вероятностей* (*плотностью распределения, плотностью вероятностей* или просто *плотностью*) $f(x)$, связанной с функцией распределения по формуле $f(x)=F'(x)$, или $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(y)dy$. Плотность распределения удовлетворяет следующим свойствам:

– неотрицательность: $f(x)\geq 0$;

– вероятность попадания случайной величины X в интервал $[x_1,x_2]$ можно найти по формуле $P\{x_1\leq X\leq x_2\}=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$;

– нормированность: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$;

– вероятность попадания в точку равна нулю: $P\{X=x_0\}=0$.

Математическое ожидание и *дисперсия непрерывной случайной величины* X имеют тот же смысл и те же свойства, что и дискретная случайная величина, а определяются формулами

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-M^2(X).$$

Среднеквадратическое отклонение непрерывной случайной величины X определяется аналогично случаю дискретной случайной величины

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)}.$$

Пример. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x>\pi. \end{cases}$ Найти функцию распределения, вероятность попадания в интервал $\left(-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$, математическое ожидание. Построить графики функции и плотности распределения.

Решение. Найдем функцию распределения как $F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x} f\left(y\right)dy$:

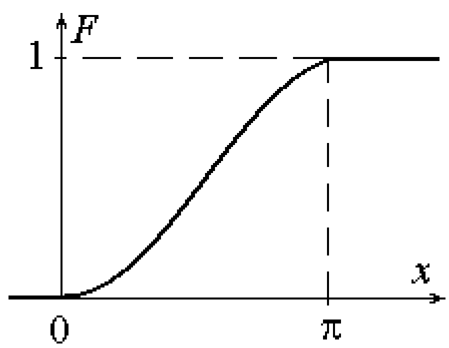
при $x\le 0$ имеем $F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dy=0$;

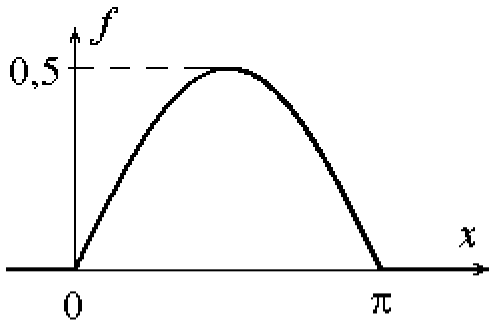
при $0<x\le\pi$ имеем $F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dy+\int\limits_{0}^{x}\dfrac{1}{2}\sin ydy = -\dfrac{1}{2}\cos y\,\Big|_0^x = \dfrac{1}{2}\left(1-\cos x\right)$;

при $x>\pi$ имеем $F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dy+\int\limits_{0}^{\pi}\dfrac{1}{2}\sin ydy+\int\limits_{\pi}^{x} 0dy = -\dfrac{1}{2}\cos y\,\Big|_0^{\pi}=1$.

Функция распределения равна $F\left(x\right)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}\left(1-\cos x\right), & 0<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 1, & x>\pi. \end{cases}$

Графики функции распределения $F\left(x\right)$ и плотности распределения $f\left(x\right)$ имеют вид





Находим математическое ожидание:

$$M\left(X\right)=\int_0^{\pi} x\frac{1}{2}\sin xdx=\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\frac{1}{2}\sin xdx & v \quad -\frac{1}{2}\cos x \end{bmatrix}=$$

$$=-x\frac{1}{2}\cos x\,|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos xdx=-\left(\pi\frac{1}{2}\cos\pi-0\cdot\frac{1}{2}\cos 0\right)+\frac{1}{2}\sin x\,|_0^{\pi}=$$

$$-\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)+\left(\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{2}\sin 0\right)\quad\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Находим вероятность попадания в интервал $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$:

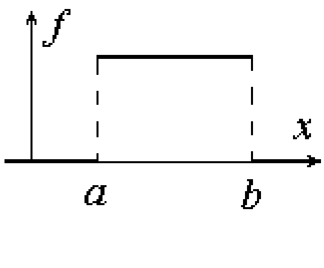
$$P\left\{-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}\right\}=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)-0=\frac{1}{2}\left(1-0\right)=\frac{1}{2}.$$

На практике часто встречаются следующие известные законы распределения непрерывной случайной величины.

Равномерное распределение определяется плотностью распределения

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b;\\ 0, \textit{иначе}\end{cases}$$

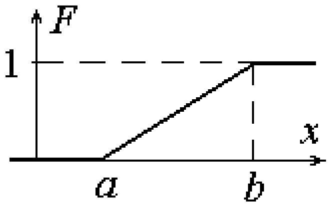
с параметрами $a\neq b$ и графиком функции плотности распределения



Функция распределения определяется соотношением

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b; \\ 1, x>b \end{cases}$$

И график функции распределения имеет вид



Числовые характеристики: $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$ и $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$; вероятность попадания в интервал находится по формуле $P\{x_1\le X\le x_2\}=\dfrac{x_2-x_1}{b-a}$, если $a\le x_1\le x_2\le b$.

Пример. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 5 минут. Пассажир спускается в метро и выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше минуты? Найти математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины X – времени ожидания поезда.

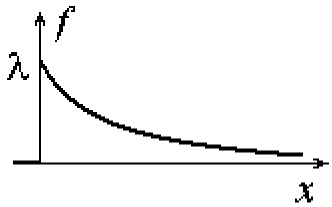
Решение. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $[0;5]$, следовательно, плотность распределения запишется в виде $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{5}, & 0\le x\le 5; \\ 0, & x<0, x>5. \end{cases}$ Математическое ожидание $M(X)=\dfrac{0+5}{2}=2,5$;

среднеквадратическое отклонение $\sigma_X=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\dfrac{(5-0)^2}{12}}\approx 1,47$, вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше минуты, $P\{0\le X\le 1\}=\dfrac{1-0}{5-0}=0,2$.

Показательное распределение определяется плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},\ x\ge 0;\\ 0,\ x<0\end{cases}$$

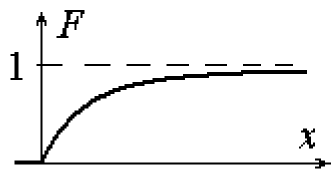
с параметром $\lambda>0$ и графиком функции плотности распределения



Функция распределения определяется соотношением

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<0;\\ 1-e^{-\lambda x},\ x\ge 0\end{cases}$$

И график функции распределения имеет вид



Числовые характеристики: $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ и $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$; вероятность попадания в интервал находится по формуле $P\{x_1\le X\le x_2\}=e^{-\lambda x_1}-e^{-\lambda x_2}$, если $x_2\ge x_1\ge 0$.

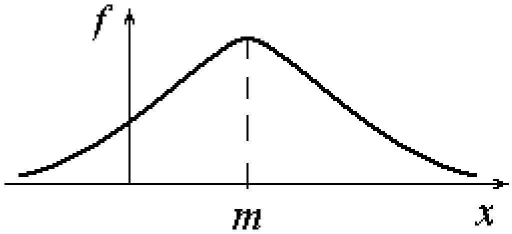
Пример. Время безотказной работы прибора имеет показательное распределение с параметром $\lambda=1/80$ (1/час). Найти вероятность того, что прибор не выйдет из строя в течение 100 часов (событие A).

Решение. Рассмотрим случайную величину T – время безотказной работы, распределенную по показательному закону с параметром $\lambda=1/80$ (1/час). Чтобы прибор не вышел из строя в течение 100 часов, необходимо, чтобы $T>100$ час. В данной задаче удобнее найти вероятность противоположного события $\overline{A}$ – {прибор выйдет из строя в течение 100 часов}, т. е. $T\le 100$ час. $P(\overline{A})=P\{0\le T\le 100\}=e^{0}-e^{-1,25}=0,71$. Тогда $P(A)=1-P(\overline{A})=0,29$.

Нормальное распределение определяется плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

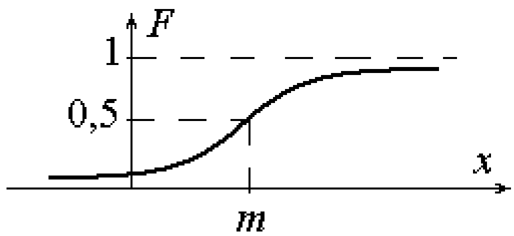
с параметрами m и $\sigma>0$ и графиком функции плотности распределения



Функция распределения определяется соотношением

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}dy.$$

И график функции распределения имеет вид



Числовые характеристики: $M(X)=m$ и $D(X)=\sigma^2$; вероятность попадания в интервал $[x_1;x_2]$ находится по формуле $P\{x_1\le X\le x_2\}=\Phi\left(\frac{x_2-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-m}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy$, значения которой приведены в специальной таблице (см. Приложение 2). Заметим, что $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ и при $x>4$ имеем $\Phi(x)\approx 0{,}5$. Вероятность отклонения от математического ожидания на величину не более δ определяется по формуле $P\{|X-m|<\delta\}=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Вероятность отклонения от математического ожидания на величину не более 3σ определяется по *правилу трех сигм:* $P\{m-3\sigma < X < m+3\sigma\} = 0,997$.

Пример. Для исследования продуктивности определенной породы домашней птицы измеряют диаметр яиц. Наибольший поперечный диаметр яиц представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону со средним значением 5 см и среднеквадратическим отклонением $0,3$ см. Найти вероятность того, что диаметр взятого наугад яйца будет заключен в границах от $4,7$ см до $6,2$ см (событие A). Найти вероятность того, что отклонение диаметра взятого наугад яйца от среднего значения не превзойдет $0,15$ см (событие B). Найти интервал, в который диаметр яйца попадет с вероятностью $0,997$.

Решение. Рассмотрим случайную величину X – наибольший поперечный диаметр яиц, распределенную по нормальному закону с $m=5$ и $\sigma=0,3$.

Тогда $P(A) = P\{4,7 \le X \le 6,2\} = \Phi\left(\dfrac{6,2-5}{0,3}\right) - \Phi\left(\dfrac{4,7-5}{0,3}\right) =$

$= \Phi(4) - \Phi(-1) = \Phi(4) + \Phi(1) = 0,5 + 0,3413 = 0,8413$.

$P(B) = P\{|X-5| < 0,15\} = 2\Phi\left(\dfrac{0,15}{0,3}\right) = 2\Phi(0,5) = 2\cdot 0,1915 = 0,383$.

Используя правило трех сигм, получаем интервал $5-3\cdot 0,3 < X < 5+3\cdot 0,3$ или $X \in (4,1;5,9)$.

8. Моменты случайных величин и другие числовые характеристики

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени этой величины

$$\alpha_k = M\left(X^k\right).$$

Для дискретной случайной величины начальный момент выражается суммой

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i\,,$$

а для непрерывной случайной величины – интегралом

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\,dx.$$

В частности, математическое ожидание есть начальный момент первого порядка: $\alpha_1 = M(X)$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$

$$\mu_k = M(X - M(X))^k.$$

Для дискретной случайной величины центральный момент выражается суммой

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i,$$

а для непрерывной случайной величины – интегралом

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k \cdot f(x)dx.$$

В частности, дисперсия есть центральный момент второго порядка: $\mu_2 = D(X)$. Центральные моменты могут быть выражены через начальные моменты по формулам

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$
$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3,$$
$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4.$$

Моменты более высокого порядка применяются редко. Моменты третьего и четвертого порядков применяются для нахождения таких числовых характеристик, как коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Коэффициент асимметрии случайной величины X характеризует скошенность распределения и определяется по формуле

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3}.$$

Коэффициент эксцесса случайной величины X характеризует островершинность распределения и определяется по формуле

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3.$$

Для нормального закона распределения $A_s = 0$ и $E_x = 0$; остальные распределения непрерывной случайной величины сравниваются с нормальным. Если $A_s > 0$, то правая часть кривой распределения более полога, $A_s < 0$ – слева более полога, $A_s = 0$ – распределение симметрично. Если $E_x > 0$, то распределение более островершинное, чем нормальное, если $E_x < 0$ – распределение плосковершинное. Для дискретной случайной величины эти коэффициенты не используются.

Модой дискретной случайной величины X называется ее значение, принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями. Мода обозначается через $M_0(X)$; для непрерывной случайной величины мода – это точка локального максимума плотности $f(x)$.

Медианой непрерывной случайной величины X называется значение $M_e(X)$, получаемое из соотношения

$$P\{X < M_e(X)\} = P\{X > M_e(X)\} = \frac{1}{2}.$$

Иначе, медиану удобнее найти из уравнения

$$F(M_e(X)) = \frac{1}{2}.$$

В частности, для равномерного закона $M_e(X) = \frac{a+b}{2}$, для показательного – $M_e(X) = \frac{\ln(2)}{\lambda}$, для нормального – $M_e(X) = m$. Для дискретных случайных величин медиана обычно не определяется.

Квантилью x_p *уровня* p $(0 < p < 1)$ случайной величины X называется решение уравнения

$$F(x_p) = p.$$

9. Функция от случайной величины

Рассмотрим дискретную случайную величину X, заданную законом распределения

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Функцией от дискретной случайной величины X является новая дискретная случайная величина $Y = \varphi(X)$ с законом распределения

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\cdots$	$\varphi(x_n)$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

если все $\varphi(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ различны. Если какие-то два (или больше) значения $\varphi(x_i)$ и $\varphi(x_j)$ $(i \neq j)$ оказались равны, то эти столбцы объединяются, и соответствующая вероятность будет $p_i + p_j$.

Пример. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
p	0,3	0,2	0,1	0,1	0,3

Найти закон распределения случайной величины $Y = \cos X$.

Решение. Найдем значения случайной величины Y для всех значений случайной величины X. Имеем: $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. В результате получаем закон распределения дискретной случайной величины Y в следующем виде:

Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
p	0,6	0,3	0,1

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, заданную плотностью распределения $f(x)$. Непрерывная случайная величина $Y = \varphi(X)$ (или

$y = \varphi(x)$) называется *функцией от непрерывной случайной величины* X, если $\varphi(x)$ – строго монотонная дифференцируемая функция. Плотность распределения $g(y)$ непрерывной случайной величины Y определяется по формуле

$$g(y) = f\left[\psi(y)\right] \cdot \left|\psi'(y)\right|,$$

где ψ – функция обратная к φ.

Если функция $y = \varphi(x)$ в интервале всех возможных значений непрерывной случайной величины X не монотонна, то следует разбить интервал всевозможных значений на промежутки монотонности, для каждого из них найти плотности распределения $g(y)$, а искомую плотность распределения представить в виде совокупности плотностей $g(y)$ на всех промежутках.

Числовые характеристики новой случайной величины $Y = \varphi(X)$ можно вычислять и без нахождения плотности распределения $g(y)$

$$M(Y) = M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx,$$

$$D(Y) = D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi(x) - M(Y)\right]^2 f(x) dx.$$

Пример. Случайная величина X равномерно распределена на интервале $(0, \pi)$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \operatorname{ctg}(X)$, вычислить ее математическое ожидание.

Решение. Плотность распределения случайной величины X имеет вид: $f(x) = \dfrac{1}{\pi}, 0 < x < \pi$. Функция $\varphi(x) = \operatorname{ctg}(x)$ на интервале $(0;\pi)$ монотонно убывает и имеет производную. Найдем обратную функцию: $\psi(y) = \varphi^{-1} = \operatorname{arcctg}(y)$ и $\psi'(y) = -\dfrac{1}{1+y^2}$. Следовательно, плотность распределения случайной величины Y будет иметь следующий вид: $g(y) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{1+y^2}, -\infty < y < +\infty$.

Вычислим математическое ожидание случайной величины Y: $M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot g(y)dy\ =\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}dy=0$ в силу нечетности подынтегральной функции (или симметричности распределения относительно нуля).

10. Двумерная случайная величина

Совокупность двух случайных величин (X,Y) рассматриваемых совместно, называется *двумерной случайной величиной* (или *системой двух случайных величин*). Она описывается *двумерной функцией распределения* $F(x,y)$, которая определяется как вероятность совместного появления двух событий $\{X<x\}$ и $\{Y<y\}$: $F(x,y)=P\{X<x,Y<y\}$. Двумерная функция распределения удовлетворяет следующим свойствам:

– значения функции распределения лежат в пределах от 0 до 1: $0\le F(x,y)\le 1$;

– $F(x,y)$ – неубывающая функция по обоим аргументам;

– поведение функции на отрицательной бесконечности:

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,\ F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0;$$

– связь с одномерной функцией распределения:

$$F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=F(x),\ F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=F(y);$$

– поведение функции на положительной бесконечности:

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{x,y\to+\infty}F(x,y)=1.$$

11. Двумерная дискретная случайная величина

Двумерная дискретная случайная величина описывается *законом распределения* в виде матрицы

Y / X	y_1	$\cdots$	y_n
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_m	p_{m1}	$\cdots$	p_{mn}

Здесь $x_1,...,x_m$ – всевозможные значения дискретной случайной величины X, $y_1,...,y_n$ – всевозможные значения дискретной случайной величины Y, $p_{ij} = P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\}$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$, причем $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Законы распределения составляющих X и Y запишутся в виде таблиц

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
P	p_1^x	p_2^x	$\cdots$	p_m^x

где $p_i^x = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$ (сумма вероятностей по i-ой строке), и

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
P	p_1^y	p_2^y	$\cdots$	p_n^y

где $p_j^y = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$ (сумма вероятностей по j-ому столбцу).

Условным распределением вероятностей дискретной случайной величины X *при известном* $Y = y_j$ называется совокупность условных вероятностей $P\left\{X = x_i \mid Y = y_j\right\}$, $i = 1,...,m$, вычисляемых по формуле

$$P\left\{X = x_i \mid Y = y_j\right\} = \frac{P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\}}{P\left\{Y = y_j\right\}} = \frac{p_{ij}}{p_j^y}.$$

Аналогично определяется *условное распределение вероятностей дискретной случайной величины* Y *при известном* $X = x_i$.

Дискретные случайные величины X и Y являются *независимыми*, если их условные распределения совпадают с безусловными, т. е. $P\left\{X = x_i \mid Y = y_j\right\} = P\left\{Y = y_j \mid X = x_i\right\} = P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\}$.

12. Двумерная непрерывная случайная величина

Двумерная непрерывная случайная величина (X, Y) описывается *двумерной плотностью распределения вероятностей* $f(x, y)$, связанной с двумерной функцией распределения вероятностей по формуле $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$, или $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x} du \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dv$. Двумерная плотность распределения удовлетворяет следующим свойствам:

– неотрицательность: $f(x,y) \geq 0$;

– вероятность попадания двумерной случайной величины (X,Y) в область D можно найти по формуле $P\{(x,y)\in D\}=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$;

– нормированность: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=1$;

– вероятности попадания в точку или прямую равны нулю:
$P\{X=x_0\}=P\{Y=y_0\}=P\{X=x_0,Y=y_0\}=0$;

– плотности распределения составляющих находятся по формулам
$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ и $f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$.

Условная плотность распределения X *при заданном* Y определяется по формуле

$$f(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Аналогично определяется *условная плотность распределения* Y *при заданном* X.

Непрерывные случайные величины X и Y являются *независимыми*, если их условные плотности распределения совпадают с безусловными, т. е. $f(x\,|\,y)=f_X(x)$ и $f(y\,|\,x)=f_Y(y)$. *Критерием независимости* служит равенство $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

13. Числовые характеристики двумерных случайных величин

Математическое ожидание и дисперсия двумерной случайной величины (X,Y) определяются парами чисел $(M(X),M(Y))$ и $(D(X),D(Y))$, которые имеют те же определения, характеристики и свойства, что и в одномерном случае. Для двумерной случайной величины (X,Y) важными характеристиками являются *корреляционный момент (ковариация)* $K\left(X,Y\right)$ и *коэффициент корреляции* r_{XY}, которые определяются по формулам

$$K\left(X,Y\right)=M\left[\left(X-M\left(X\right)\right)\cdot\left(Y-M\left(Y\right)\right)\right],$$

$$r_{XY}=\frac{K\left(X,Y\right)}{\sigma_X\sigma_Y},$$

и описывают степень зависимости случайных величин X и Y. Корреляционный момент и коэффициент корреляции удовлетворяют следующим свойствам:

– удобная формула вычисления корреляционного момента –

$$K\left(X,Y\right)=M\left(X\cdot Y\right)-M\left(X\right)\cdot M\left(Y\right),$$

где для двумерной дискретной случайной величины $\left(X,Y\right)$:

$$M(X\cdot Y)=\sum_{i,j}x_i\cdot y_j\cdot p_{ij},$$

а для двумерной непрерывной случайной величины $\left(X,Y\right)$:

$$M(X\cdot Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f\left(x,y\right)dy;$$

– если $X=Y$, то $K\left(X,X\right)=D\left(X\right)$ и $r_{XX}=1$;

– если X и Y – независимые случайные величины, то $K\left(X,Y\right)=r_{XY}=0$;

– коэффициент корреляции по модулю не превышает единицы: $-1\le r_{XY}\le 1$. Если $r_{XY}=\pm 1$, то случайные величины X и Y имеют линейную функциональную связь.

Случайные величины X и Y являются *коррелированными,* если $r_{XY}\ne 0$, и *некоррелированными,* если $r_{XY}=0$. Отсюда следует, что если X и Y – коррелированные, значит, и зависимые. А если X и Y – независимые, то и некоррелированные.

Пример. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$ задан в таблице

Y / X	0	1	2
1	0,2	0,3	0,1
2	0,1	0,0	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при $Y=2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

Решение. Составим законы распределения составляющих. Имеем

X	1	2
P	0,6	0,4

Y	0	1	2
P	0,3	0,3	0,4

Находим условный закон распределения случайной величины X при $Y=2$. Имеем

$$P\{X=1\,|\,Y=2\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{0,1}{0,4}=0,25;$$

$$P\{X=2\,|\,Y=2\}=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{0,3}{0,4}=0,75.$$

Получаем

$X\,|\,Y=2$	1	2
P	0,25	0,75

Находим числовые характеристики.

Математические ожидания: $M(X)=1\cdot 0,6+2\cdot 0,4=1,4$; $M(Y)=0\cdot 0,3+1\cdot 0,3+2\cdot 0,4=1,1$.

Дисперсии: $D(X)=1^2\cdot 0,6+2^2\cdot 0,4-1,4^2=0,24$; $D(Y)=0^2\cdot 0,3+1^2\cdot 0,3+2^2\cdot 0,4-1,1^2=0,69$.

Среднеквадратические отклонения: $\sigma_X=\sqrt{0,24}=0,49$; $\sigma_Y=\sqrt{0,69}=0,83$.

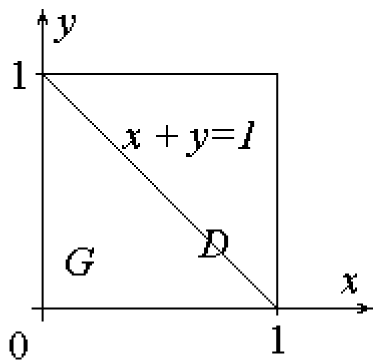
Корреляционный момент:

$$K(X,Y)=1\cdot 0\cdot 0,2+1\cdot 1\cdot 0,3+1\cdot 2\cdot 0,1+2\cdot 0\cdot 0,1+2\cdot 1\cdot 0,0+2\cdot 2\cdot 0,3-$$
$$-1,4\cdot 1,1=-0,16.$$

Коэффициент корреляции: $r_{XY} = \frac{-0,16}{0,49 \cdot 0,83} \quad -0,39$.

Пример. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y) = c\left(x+y\right), 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1$. Определить константу c и вычислить $P\left\{Y + X < 1\right\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$.

Решение. Изобразим область определения двумерной случайной величины $D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ и область $G: x + y < 1$ в области определения.



Находим константу c из условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dy = 1$. Имеем

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 c\left(x+y\right)dy = 1 \qquad \Rightarrow c\int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dx = 1 \qquad \Rightarrow c\int\limits_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = 1$$

$\Rightarrow c\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right)\Bigg|_0^1 = 1 \ \Rightarrow c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1 \ \Rightarrow c = 1$. Значит, плотность распределения имеет вид $f(x,y) = \left(x+y\right), 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1$. Тогда

$$P\left\{Y + X < 1\right\} = \iint\limits_G f\left(x,y\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(x+y\right)dy = \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$\int\limits_0^1 \left(x\left(1-x\right) + \frac{\left(1-x\right)^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{\left(1-x\right)^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Исследуем X и Y на зависимость. Для этого найдем безусловные и условные плотности распределения.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^1 (x+y)\,dy = x+\frac{1}{2},\ 0\le x\le 1;$$

$$f_Y(y)=y+\frac{1}{2},\ 0\le y\le 1.$$

$$f(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}\ne f_X(x);\ f(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\ne f_Y(y).$$

Так как условные плотности не совпадают с безусловными, следовательно, X и Y – зависимые.

Найдем числовые характеристики. Заметим, что математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения X и Y совпадают. Находим математическое ожидание: $M(X)=\int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{7}{12}=M(Y)$. Дисперсия: $D(X)=\int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{11}{144}=D(Y)$. Среднеквадратичное отклонение $\sigma_X=\frac{\sqrt{11}}{12}=\sigma_Y$. Находим корреляционный момент $K(X,Y)=\int_0^1 dx\int_0^1 xy(x+y)\,dy-\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}=\frac{-1}{144}$ и коэффициент корреляции $r_{XY}=\frac{-1}{144}:\left(\frac{\sqrt{11}}{12}\cdot\frac{\sqrt{11}}{12}\right)=-\frac{1}{11}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов. – М. : Высш. шк., 2003. – 479 с.
2. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики : учеб. пособие для студентов вузов. – М. : Высш. шк., 1997. – 400 с.
3. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей: учеб. для вузов. – М. : Высш. шк., 2002. – 575 с.
4. *Вентцель Е. С.*, *Овчаров Л. А.* Задачи и упражнения по теории вероятностей – М. : Высш. шк., 2000. – 366 с.
5. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М. : Айрис-Пресс, 2006. – 288 с.
6. *Сборник задач по математике* для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для втузов / Под ред. А. В. Ефимова – М. : Наука, 1990. – 428 с.
7. *Белугин В. И.*, *Величко Т. В.*, *Кац И. Я.*, *Поповский Э. Е.* Высшая математика : метод. руководство и контрольные задания – Екатеринбург: УрГУПС, 2001. Ч. 4. – 43 с.
8. *Вахрушев В. А., Кац И. Я., Тимофеева Г. А.* Типовой расчет по теории вероятностей. – Екатеринбург: УрГУПС, 2000. – 52 с.
9. *Егоров В. Я.* Руководство к решению прикладных задач по математике. – Свердловск : УЭМИИТ, 1974. – 112 с.
10. *Контрольные работы* по математике / Белугин В. И., Вахрушев В. А., Недвецкая А. И., Пирогова И. Н. – Екатеринбург : УрГУПС, 1998. – 116 с.
11. *Пирогова И. Н., Скачков П. П., Толмачева М. А.* Сборник задач по теории вероятностей. – Екатеринбург : УрГУПС, 2003. – 36 с.
12. *Башуров В. В., Башурова О. А.* Типовой расчет по вероятности и статистике. – Екатеринбург : УрГУПС, 2006. – 75 с.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,3989	0,66	0,3209	1,32	0,1669	1,98	0,0562	2,64	0,0122
0,02	0,3989	0,68	0,3166	1,34	0,1626	2,00	0,0540	2,66	0,0116
0,04	0,3986	0,70	0,3123	1,36	0,1582	2,02	0,0519	2,68	0,0110
0,06	0,3982	0,72	0,3079	1,38	0,1539	2,04	0,0498	2,70	0,0104
0,08	0,3977	0,74	0,3034	1,40	0,1497	2,06	0,0478	2,72	0,0099
0,10	0,3970	0,76	0,2989	1,42	0,1456	2,08	0,0459	2,74	0,0093
0,12	0,3961	0,78	0,2943	1,44	0,1415	2,10	0,0440	2,76	0,0088
0,14	0,3951	0,80	0,2897	1,46	0,1374	2,12	0,0422	2,78	0,0084
0,16	0,3939	0,82	0,2850	1,48	0,1334	2,14	0,0404	2,80	0,0079
0,18	0,3925	0,84	0,2803	1,50	0,1295	2,16	0,0387	2,82	0,0075
0,20	0,3910	0,86	0,2756	1,52	0,1257	2,18	0,0371	2,84	0,0071
0,22	0,3894	0,88	0,2709	1,54	0,1219	2,20	0,0355	2,86	0,0067
0,24	0,3876	0,90	0,2661	1,56	0,1182	2,22	0,0339	2,88	0,0063
0,26	0,3857	0,92	0,2613	1,58	0,1145	2,24	0,0325	2,90	0,0060
0,28	0,3836	0,94	0,2565	1,60	0,1109	2,26	0,0310	2,92	0,0056
0,30	0,3814	0,96	0,2516	1,62	0,1074	2,28	0,0297	2,94	0,0053
0,32	0,3790	0,98	0,2468	1,64	0,1040	2,30	0,0283	2,96	0,0050
0,34	0,3765	1,00	0,2420	1,66	0,1006	2,32	0,0270	2,98	0,0047
0,36	0,3739	1,02	0,2371	1,68	0,0973	2,34	0,0258	3,00	0,0044
0,38	0,3712	1,04	0,2323	1,70	0,0940	2,36	0,0246	3,02	0,0042
0,40	0,3683	1,06	0,2275	1,72	0,0909	2,38	0,0235	3,04	0,0039
0,42	0,3652	1,08	0,2227	1,74	0,0878	2,40	0,0224	3,08	0,0035
0,44	0,3621	1,10	0,2179	1,76	0,0848	2,42	0,0213	3,12	0,0031
0,46	0,3589	1,12	0,2131	1,78	0,0818	2,44	0,0203	3,16	0,0027
0,48	0,3555	1,14	0,2083	1,80	0,0790	2,46	0,0194	3,20	0,0024
0,50	0,3521	1,16	0,2036	1,82	0,0761	2,48	0,0184	3,24	0,0021
0,52	0,3485	1,18	0,1989	1,84	0,0734	2,50	0,0175	3,28	0,0018
0,54	0,3448	1,20	0,1942	1,86	0,0707	2,52	0,0167	3,36	0,0014
0,56	0,3410	1,22	0,1895	1,88	0,0681	2,54	0,0158	3,42	0,0012
0,58	0,3372	1,24	0,1849	1,90	0,0656	2,56	0,0151	3,54	0,0008
0,60	0,3332	1,26	0,1804	1,92	0,0632	2,58	0,0143	3,70	0,0004
0,62	0,3292	1,28	0,1758	1,94	0,0608	2,60	0,0136	3,80	0,0003
0,64	0,3251	1,30	0,1714	1,96	0,0584	2,62	0,0129	3,9	0,0002

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,66	0,2454	1,32	0,4066	1,98	0,4761	2,64	0,4959
0,02	0,0080	0,68	0,2517	1,34	0,4099	2,00	0,4772	2,66	0,4961
0,04	0,0160	0,70	0,2580	1,36	0,4131	2,02	0,4783	2,68	0,4963
0,06	0,0239	0,72	0,2642	1,38	0,4162	2,04	0,4793	2,70	0,4965
0,08	0,0319	0,74	0,2703	1,40	0,4192	2,06	0,4803	2,72	0,4967
0,10	0,0398	0,76	0,2764	1,42	0,4222	2,08	0,4812	2,74	0,4969
0,12	0,0478	0,78	0,2823	1,44	0,4251	2,10	0,4812	2,76	0,4971
0,14	0,0557	0,80	0,2881	1,46	0,4279	2,12	0,4830	2,78	0,4973
0,16	0,0636	0,82	0,2939	1,48	0,4306	2,14	0,4838	2,80	0,4974
0,18	0,0714	0,84	0,2995	1,50	0,4332	2,16	0,4846	2,82	0,4976
0,20	0,0793	0,86	0,3051	1,52	0,4357	2,18	0,4854	2,84	0,4977
0,22	0,0871	0,88	0,3106	1,54	0,4382	2,20	0,4861	2,86	0,4979
0,24	0,0948	0,90	0,3159	1,56	0,4406	2,22	0,4868	2,88	0,4980
0,26	0,1026	0,92	0,3212	1,58	0,4429	2,24	0,4875	2,90	0,4981
0,28	0,1103	0,94	0,3264	1,60	0,4452	2,26	0,4881	2,92	0,4982
0,30	0,1179	0,96	0,3315	1,62	0,4474	2,28	0,4887	2,94	0,4984
0,32	0,1255	0,98	0,3365	1,64	0,4495	2,30	0,4893	2,96	0,4985
0,34	0,1331	1,00	0,3413	1,66	0,4515	2,32	0,4898	2,98	0,4986
0,36	0,1406	1,02	0,3461	1,68	0,4535	2,34	0,4904	3,00	0,4987
0,38	0,1480	1,04	0,3508	1,70	0,4554	2,36	0,4909	3,02	0,4988
0,40	0,1554	1,06	0,3554	1,72	0,4573	2,38	0,4913	3,06	0,4989
0,42	0,1628	1,08	0,3599	1,74	0,4591	2,40	0,4918	3,08	0,4990
0,44	0,1700	1,10	0,3643	1,76	0,4608	2,42	0,4922	3,12	0,4991
0,46	0,1772	1,12	0,3686	1,78	0,4625	2,44	0,4927	3,16	0,4992
0,48	0,1844	1,14	0,3729	1,80	0,4641	2,46	0,4931	3,20	0,4993
0,50	0,1915	1,16	0,3770	1,82	0,4656	2,48	0,4934	3,24	0,4994
0,52	0,1985	1,18	0,3820	1,84	0,4671	2,50	0,4938	3,28	0,4995
0,54	0,2054	1,20	0,3849	1,86	0,4686	2,52	0,4941	3,36	0,4996
0,56	0,2123	1,22	0,3883	1,88	0,4699	2,54	0,4945	3,42	0,4997
0,58	0,2190	1,24	0,3925	1,90	0,4713	2,56	0,4948	3,54	0,4998
0,60	0,2257	1,26	0,3962	1,92	0,4726	2,58	0,4951	3,70	0,4999
0,62	0,2324	1,28	0,3997	1,94	0,4738	2,60	0,4953	3,80	0,4999
0,64	0,2389	1,30	0,4032	1,96	0,4750	2,62	0,4956		

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Вариант 1

1. В лифт на первом этаже шестиэтажного торгового центра вошли шесть незнакомых между собой женщин. Какова вероятность того, что они выйдут все на одном этаже?
2. Из колоды в тридцать шесть карт вытаскивают две карты. Найти вероятность того, что карты образуют марьяж (король и дама одной масти).
3. Производительности трех станков, обрабатывающих одинаковые детали, относятся как $2{:}3{:}5$. Из нерассортированной партии обработанных деталей взяты наудачу две. Какова вероятность того, что обе обработаны на одном станке?
4. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектна. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность менее трех.
5. Вероятность успешной сдачи экзамена первым студентом составляет $0,7$, а вторым – $0,8$. Составить закон распределения случайной величины – числа студентов, успешно сдавших экзамен, если каждый из них может пересдать один раз экзамен с той же вероятностью. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Плотность распределения случайной величины задана в виде $f(x)=c/x^4, x>1$. Найти значение постоянной c, функцию распределения $F(x)$, вероятность попадания в интервал $(1;3)$, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m=0$ и $\sigma=1$. Какое из двух событий $\{|X|\le 0,7\}$ или $\{|X|\ge 0,7\}$ имеет большую вероятность?
8. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=1-X^3$, где случайная величина X распределена по закону Коши с плотностью вероятности $f(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$?
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

$X \backslash Y$	0	2
1	0,1	0,5
2	0,1	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y)=cxy, 0\le x\le 3; 0\le y\le 1$. Определить константу c и вычислить $P\{Y+X>2\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

Вариант 2

1. Шеститомное собрание сочинений Сергея Есенина расположено на полке в случайном порядке томов. Какова вероятность того, что третий том стоит справа от второго тома, но необязательно рядом?
2. Имеются пять отрезков, длины которых равны 1, 3, 5, 7 и 9 единицам. Определить вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков можно построить треугольник.
3. В урне 6 белых, 5 синих и 4 жёлтых шара. Из неё наугад извлекают шары по одному, без возвращения, до тех пор, пока извлечённый шар не окажется жёлтым. Какова вероятность того, что из урны придётся извлечь не менее четырёх шаров?
4. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника три партии из четырех или пять партий из восьми (ничьи в отдельных партиях исключены)?
5. Вероятность того, что студент сдаст математику, физику и иностранный язык в сессию равны соответственно $0{,}5$; $0{,}6$; $0{,}8$. Составить закон распределения числа экзаменов, которые сдаст студент. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Плотность распределения случайной величины задана в виде $f(x)=3x^2$, $x\in[0;1]$. Найти функцию распределения $F(x)$, вероятность попадания в интервал $(0{,}5;3)$, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Случайная величина распределена равномерно с математическим ожиданием 2 и среднеквадратическим отклонением $\sqrt{3}$. Найти выражения плотности распределения вероятностей и функции распределения этой случайной величины.

8. Случайная величина распределена по закону Коши с плотностью распределения вероятностей $f(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^{-1}$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$ задан в таблице

X \ Y	1	4
–1	0,2	0,4
2	0,1	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$.
10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$, плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$. Проверить зависимость X и Y.

Вариант 3

1. Слава и Оксана условились встретиться на вокзале между 18 и 19 часами и договорились, что пришедший первым ждет другого 20 минут или до наступления семи вечера. Найти вероятность их встречи, если время их прихода равновозможно в любой момент времени.
2. Из 25 студентов 10 работали прошлым летом проводниками. Какова вероятность того, что выбранные наудачу три студента для работы проводниками следующим летом окажутся новичками?
3. При прохождении одного порога на реке Мана байдарка не получает повреждений с вероятностью $0,6$, полностью ломается с вероятностью $0,1$, получает серьезное повреждение с вероятностью $0,3$. Два серьезных повреждения приводят к полной поломке. Найти вероятность того, что при прохождении трех порогов байдарка не будет полностью сломана.
4. На факультете насчитывается 500 студентов. Какова вероятность того, что 1 января является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?

5. Студент выучил 20 из 30 вопросов к зачету. В билете два вопроса. Составить закон распределения числа вопросов из билета, которые знает студент. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Плотность распределения случайной величины задана по закону Симпсона: $f(x) = 1 - |x|$, $x \in [-1;1]$. Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Установлено, что время ремонта телевизора есть случайная величина X, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее пяти дней, если среднее время ремонта составляет три дня. Найти плотность распределения, функцию распределения и среднеквадратическое отклонение.
8. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2 - 3\sin X$, если плотность вероятности случайной величины X есть $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задан в таблице

Y / X	0	4
–1	0,2	0,4
1	0,2	0,2

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X = 1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X, Y).

10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x, y) = cy, 0 \le x \le 4; -1 \le y \le 2$. Определить константу c и вычислить $P\{Y + X > 2\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X, Y).

Вариант 4

1. Какова вероятность того, что наудачу брошенная в круг точка окажется внутри вписанного в него квадрата?

2. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам; каждый шарик попадает в ту или иную лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других. Найти вероятность того, что в одной лунке окажется три шарика, в другой – один, а в двух остальных лунках – пусто.
3. Вероятность того, что Елена Исинбаева возьмет планку на рекордной высоте в одной попытке, равна $0,2$. Определить вероятность того, что рекорд состоится, если разрешается сделать три попытки.
4. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют холодильники.
5. Среди десяти изготовленных омметров три неточных. Составить закон распределения числа неточных приборов среди взятых наудачу четырех омметров. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Случайная величина X, сосредоточенная на интервале $[2;6]$, задана функцией распределения $F(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-4x+4\right)$. Найти плотность распределения, вероятность того, что случайная величина примет значение меньше 4, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $m=173$ и $\sigma=6$, найти долю костюмов четвертого роста ($176-182$ см).
8. Случайная величина X распределена на всей числовой оси с плотностью распределения вероятностей $f(x)=0,5e^{-|x|}$. Найти плотность распределения случайной величины $Y=X^2$ и ее математическое ожидание.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

X \ Y	1	2
–1	0,3	0,3
0	0,1	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,3)$, $(-3,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной слу-

чайной величины (X,Y), плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y). Проверить зависимость X и Y.

Вариант 5

1. Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что произведение очков не превзойдет 20.
2. Пятитомное собрание сочинений Ивана Гашека расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят справа налево в порядке нумерации?
3. Вероятность, что студент Вагонов сдаст экзамен по теории вероятностей – $0,7$, студент Рельсов – $0,5$, студентка Шпалова – $0,4$. Какова вероятность того, что экзамен сдадут хотя бы двое из них?
4. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из девяти пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будут проданы менее двух пакетов.
5. Ряд распределения дискретной случайной величины состоит из двух неизвестных значений. Вероятность того, что случайная величина примет одно из этих значений, равна $0,8$. Найти функцию распределения случайной величины, если ее математическое ожидание равно $3,2$, а дисперсия – $0,16$.
6. Дана функция $\varphi(x) = Cxe^{-x}, x \geq 0$. При каком значении параметра C эта функция является плотностью распределения некоторой непрерывной случайной величины? Найти функцию распределения этой случайной величины, вероятность попадания в интервал $[0;1]$, математическое ожидание и дисперсию.
7. Среднее время безотказной работы прибора равно 50 часов. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательное распределение, найти выражение его плотности вероятности и функции распределения. Найти вероятность, что прибор не выйдет из строя в течение трех суток.
8. Случайная величина X подчинена нормальному закону с параметрами $m=10$ и $\sigma = 0,2$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = -2X + 6$, математическое ожидание и дисперсию Y.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

X \ Y	–1	2
0	0,1	0,5
2	0,1	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X=2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y)=cx, -2\le x\le 0; 0\le y\le 3$. Определить константу c и вычислить $P\{Y+X>2\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

Вариант 6

1. Предполагая, что значения $|p|\le 1$, $|q|\le 1$ равномерно распределены, определить вероятность того, что корни уравнения $x^2+px+q=0$ действительны.
2. Среди кандидатов в студенческий совет факультета три первокурсника, пять второкурсников и семь третьекурсников. Из этого состава декан наудачу выбирает пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятность того, что все первокурсники попадут на конференцию.
3. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью $0,2$ оказывается брюнетом, с вероятностью $0,3$ – шатеном, с вероятностью $0,4$ – блондином и с вероятностью $0,1$ – рыжим. Выбирается наугад группа из четырех человек. Найти вероятность того, что в составе группы будет одинаковое число блондинов и брюнетов.
4. Завод отправил на автобазу десять тысяч стандартных покрышек. Среднее число покрышек, поврежденных при транспортировке, составляет $0,02\ \%$. Найти вероятность того, что будет повреждено, по крайней мере, три покрышки.
5. Дискретная случайная величина может принимать только два значения: x_1 и x_2 ($x_1<x_2$). Известна вероятность $p_1=0,3$ возможного значения x_1. Найти закон распределения этой случайной величины, если ее математическое ожидание равно $3,7$, а дисперсия равна $0,21$.
6. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty<x\le 0, \\ 0,5(1-\cos x), & 0<x\le\pi, \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$ Найти плотность распределения,

$P\left\{\frac{\pi}{3} < X < \frac{\pi}{2}\right\}$, математическое ожидание. Построить графики функции распределения и плотности распределения.

7. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 у.е. и среднеквадратическим отклонением $0,2$ у.е. Найти вероятность того, что цена акции будет от $14,9$ до $15,3$ у.е. Найти интервал, в который попадет цена акции с вероятностью $0,997$.
8. Диаметр круга измерен приближенно, в предположении равномерного распределения в интервале $\left[2;3\right]$. Найти плотность распределения площади круга и среднее значение площади.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$ задан в таблице

X \ Y	1	3
–2	0,2	0,2
2	0,3	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$.

10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,4)$, $(-4,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$, плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$. Проверить зависимость X и Y.

Вариант 7

1. Бросаются три игральные кости. Определить вероятность того, что сумма очков будет четная.
2. Из 20 сбербанков десять расположены в криминальной части города. Для обследования случайным образом отобрано пять сбербанков. Какова вероятность того, что всего один сбербанк находится в опасном районе?
3. Причиной разрыва электрической цепи служит одновременный выход из строя по крайней мере одного элемента. Элементы могут выйти из строя

независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно $0{,}1$, $0{,}2$, $0{,}3$. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

4. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие города N имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных малых предприятий имеют нарушения не менее 480.
5. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна $0{,}2$. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Случайная величина X задана функцией распределения $$F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty < x \le 0, \\ \frac{1}{2}(1-\cos 2x), & 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$ Найти $P\left\{\frac{\pi}{3} < X < \frac{\pi}{2}\right\}$, плотность распределения, математическое ожидание. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m=25$ и $\sigma=5$. Что больше: вероятность попадания X в интервал $(10;15)$ или в интервал $(35;40)$?
8. Случайная величина X подчиняется закону распределения Рэлея с плотностью распределения $f(x)=\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$, $x>0$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=\ln X$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

X \ Y	0	1
0	0,2	0,4
2	0,3	0,1

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y) = cxy, 1 \le x \le 2; 1 \le y \le 2$. Определить константу c и вычислить $P\{Y + X > 3\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

Вариант 8

1. Бросаются одновременно две игральные кости. Какова вероятность того, что выпадет хотя бы одна шестерка?
2. Для выполнения лабораторной работы группа студентов разбивается случайным образом на две подгруппы по 12 человек. Найти вероятность того, что три друга попадут в одну подгруппу.
3. При включении зажигания в «Запорожце» двигатель начнет работать с вероятностью $0,6$. Найти вероятность того, что для запуска двигателя придется включать зажигание не более трех раз.
4. Предполагается, что $10\ \%$ открывающихся малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятий более двух в течение года прекратят свою деятельность?
5. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1000 рублей. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при пяти сделанных покупках. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Плотность распределения задана в виде $f(x) = \frac{1}{2}\cos x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

   Найти функцию распределения $F(x)$, вероятность попадания в интервал $(0;\pi)$, математическое ожидание. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Найти вероятность того, что случайная величина X, подчиненная нормальному закону распределения, окажется заключенной в интервал $(5;10)$, если $m = 20$ и $\sigma = 5$.
8. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

Y / X	-2	0
0	0,3	0,4
1	0,1	0,2

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X=1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,5)$, $(-5,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (X,Y), плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y). Проверить зависимость X и Y.

Вариант 9

1. Определить вероятность того, что наудачу выбранное натуральное число не делится ни на два, ни на три.
2. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит на три вопроса из четырех. Какова вероятность того, что студент не сдаст зачет?
3. Монета подбрасывается до тех пор, пока впервые не появится «орел». Какова вероятность того, что будет произведено не менее четырех бросков?
4. Два баскетболиста делают по три штрафных броска в корзину. Вероятности попадания мяча в корзину при каждом броске равны соответственно $0,6$ и $0,7$. Найти вероятность того, что у обоих будет одинаковое количество попаданий.
5. Контрольная работа состоит из трех вопросов. На каждый вопрос приведено четыре ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

6. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty<x\le -\dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{1}{2}\left(1+\sin 2x\right), & -\dfrac{\pi}{4}<x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти $P\left\{\dfrac{\pi}{6}<X<\dfrac{\pi}{2}\right\}$, плотность распределения, математическое ожидание. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Случайная величина распределена по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma=10$. Найти вероятность того, что отклонение по абсолютной величине от математического ожидания будет более трех.
8. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda=1$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=\sqrt{X}$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$ задан в таблице

X \ Y	0	2
1	0,2	0,2
3	0,5	0,1

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$.
10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y)=cy, -1\le x\le 2; -1\le y\le 1$. Определить константу c и вычислить $P\left\{Y+X>2\right\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$

Вариант 10

1. Определите вероятность того, что при случайном расположении трёхтомника стихотворений хотя бы один том окажется на своём естественном месте.

2. Среди десяти поступающих в ремонт часов четыре нуждаются в общей очистке механизма. Какова вероятность того, что среди взятых одновременно пяти часов по крайней мере двое нуждаются в общей очистке?
3. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна $0,2$, второй – $0,3$, третий – $0,4$. События, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста.
4. Коллоквиум по алгебре и геометрии с первого раза успешно выполняют 50% студентов. Найти вероятность того, что из 100 студентов работу успешно выполнят 50 студентов.
5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна $0,8$ и уменьшается с каждым выстрелом на $0,1$. Составить закон распределения числа попадания в цель, если сделано три выстрела. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Плотность распределения случайной величины задана в виде $f(x)=\sin 2x,\ x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Найти функцию распределения $F(x)$, вероятность попадания в интервал $(0;\dfrac{\pi}{6})$, математическое ожидание. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda=0,2$. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина попадет в интервал $(2;4)$.
8. Случайная величина X подчинена нормальному закону с параметрами $m=-1$ и $\sigma=2$. Найти плотность вероятности случайной величины $Y=\operatorname{arctg}X$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

X \ Y	0	1
–2	0,5	0,1
1	0,1	0,3

   Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X=-2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).
10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,6)$, $(-6,0)$. Опре-

делить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (X, Y), плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X, Y). Проверить зависимость X и Y.

Вариант 11

1. На сортировочной платформе четыре специализированных места. К платформе подают четыре вагона. Определить вероятность того, что хотя бы один вагон будет стоять на своем месте.
2. Какова вероятность того, что при шести бросаниях игральной кости выпадет каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?
3. Имеется шесть радиолокационных станций, каждая из которых за один цикл обзора обнаруживает объект с вероятностью $0,4$ независимо от других циклов и станций. В течение месяца каждая станция успевает сделать три цикла. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен каждой станцией.
4. Вероятность того, что директор опоздает на работу, равна $0,01$. Найти вероятность того, что в течение учебного года (200 дней) директор опоздает не более одного раза.
5. Из пяти гвоздик две белые. Составить закон распределения и найти функцию распределения случайной величины, выражающей число белых гвоздик среди двух взятых. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Дана функция распределения случайной величины $F(x) = a + b \cdot \text{arctg} x$. Найти константы a и b, вероятность попадания в интервал $[-1;1]$.
7. Случайная величина распределена равномерно с математическим ожиданием 5 и среднеквадратическим отклонением $\sigma = \sqrt{27}$. Найти выражение плотности распредеелния и функции распределения этой случайной величины.
8. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 0,2$. Найти плотность вероятности случайной величины $Y = X^{-1}$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задан в таблице

X \ Y	1	3
0	0,2	0,4
3	0,3	0,1

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=3$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$.

10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y)=cx, -2\le x\le 2; 0\le y\le 2$. Определить константу c и вычислить $P\left\{Y+X>2\right\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$.

Вариант 12

1. Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность того, что число читается одинаково как слева направо, так и справа налево?
2. Буквы А, А, А, Н, Н, С написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки случайным образом и прикладывает одну к другой все карточки. Какова вероятность того, что получится слово «АНАНАС»?
3. В данный район молоко поставляется тремя молокозаводами в соотношении $5:8:7$. Среди продукции первого молокозавода 90% нескисшего молока, второго – 95%, третьего – 98%. Найти вероятность того, что приобретенный пакет молока окажется скисшим.
4. Шесть преподавателей случайным образом независимо друг от друга назначают консультации на один из пяти дней недели. Какова вероятность того, что в понедельник будут консультации более чем у двух преподавателей?
5. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна $0{,}3$. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе четыре библиотеки. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty<x\le\dfrac{3\pi}{4}, \\ \cos 2x, & \dfrac{3\pi}{4}<x\le\pi, \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$$

Найти $P\left\{\dfrac{5\pi}{6}<X\right\}$, плотность распределения, математическое ожидание. Построить графики функции распределения и плотности распределения.

7. Случайная величина распределена равномерно на отрезке $[-1;4]$. Найти математическое ожидание и дисперсию. Что вероятнее: в результате испытания случайная величина окажется в интервале $(2;3,5)$ или вне его?
8. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	$-\pi/3$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/3$
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

   Найти закон распределения случайной величины $Y = \cos X$, математическое ожидание и дисперсию Y.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

$X \backslash Y$	–2	3
0	0,2	0,6
3	0,1	0,1

   Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X = 0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).
10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,-2)$, $(-2,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (X,Y), плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y). Проверить зависимость X и Y.

Вариант 13

1. Зенитная батарея, состоящая из пяти орудий, производит залп по группе, состоящей из четырех самолетов. Каждое из орудий выбирает себе цель независимо от остальных. Найти вероятность того, что все орудия выстрелят по одному самолету.
2. Для участия в судебном процессе из 20 потенциальных кандидатов, среди которых 8 женщин и 12 мужчин, выбирают 6 присяжных заседателей. Найти вероятность того, что после случайного отбора в группе оказалось только одна женщина.

3. В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой – 4 белых и 8 черных. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.
4. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове под Новый Год равна $0{,}005$. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность того, что было не более трех сбоев.
5. Каждый поступающий в УрГУПС должен сдать три экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена $0{,}7$, второго – $0{,}6$, третьего – $0{,}8$. Следующий экзамен абитуриент сдает в случае успешной сдачи предыдущего. Составить закон распределения числа экзаменов, сдававшихся абитуриентом. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Плотность распределения случайной величины задана в виде $f(x) = \cos 2x,\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$. Найти функцию распределения $F(x)$, вероятность попадания в интервал $(0;\pi)$, математическое ожидание. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda = \dfrac{1}{3}$. Что вероятнее: в результате испытания случайная величина окажется меньше двух или больше?
8. Острый угол ромба со стороною a подчинен закону равномерного распределения в интервале $(0, \dfrac{\pi}{2})$. Найти плотность распределения площади ромба.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задан в таблице

X \ Y	-1	1
0	0,1	0,5
2	0,1	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y = 1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X, Y).

10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y)=cxy, 0\le x\le 3; 0\le y\le 3$. Определить константу c и вычислить $P\left\{Y+X>2\right\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$.

Вариант 14

1. На шахматную доску случайным образом ставят две ладьи – черную и белую. Какова вероятность того, что ладьи не побьют друг друга?
2. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящий из пяти букв. Найти вероятность того, что в состав нового алфавита входят только согласные.
3. Мальчик и девочка поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадет «решка». Первой бросает, естественно, девочка. Найти вероятность того, что выиграет мальчик, не позднее шестого броска.
4. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна $0,8$. Найти вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее 8 машин.
5. Охотник, имеющий четыре патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна $0,6$ и уменьшается с каждым выстрелом на $0,1$. Составить закон распределения числа израсходованных патронов. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x\le A,\\ \frac{1}{8}x^3, & A<x\le B,\\ 1, & x>B.\end{cases}$ Найти значения A и B, плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. ВАЗ запускает в производство новый двигатель. Конструкторы двигателя считают, что средняя длина пробега для автомобиля с новым двигателем составит 160000 км со стандартным отклонением $\sigma=30000$ км. Чему равна вероятность того, что до первого ремонта километраж пробега автомобиля с новым двигателем будет находиться в пределах от 100000 до 180000 км, считая километраж пробега нормально распределенной случайной величиной?

8. Случайная величина X равномерно распределена на интервале $(0, 2\pi)$. Найти плотность вероятности случайной величины $Y = \cos X$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задан в таблице

X \ Y	0	2
–2	0,2	0,2
2	0,1	0,5

   Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X = -2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X, Y).
10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,-3)$, $(-3,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (X, Y), плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X, Y). Проверить зависимость X и Y.

Вариант 15

1. Какова вероятность того, что сумма длин трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых равновероятно распределена на интервале $(0;1)$, будет больше 1?
2. Десять приехавших на курсы повышения квалификации девушек, среди которых Маша и Ксюша, размещаются в гостиницу случайным образом в два трехместных и четырехместный номера. Какова вероятность того, что Маша и Ксюша попадут в один номер?
3. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком $0,6$, вторым – $0,7$. Первый сделал три выстрела, второй – четыре выстрела. Определить вероятность, что цель не поражена.
4. В хлопке $70\,\%$ длинных волокон. Какова вероятность того, что среди наудачу взятых 10 волокон не более 8 длинных?
5. Два стрелка сделали по два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна $0,6$, для второго – $0,7$. Составить закон распределения общего числа попаданий. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

6. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2, \\ 1-\dfrac{8}{x^3}, & x>2. \end{cases}$ Найти плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda=0,5$. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, большее пяти.
8. Случайная величина X равномерно распределена на интервале $(1,3)$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=\dfrac{1}{2}X^2$, математическое ожидание и дисперсию Y.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

Y / X	0	2
0	0,2	0,1
3	0,4	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).
10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y)=cy, 0\le x\le 2; -1\le y\le 2$. Определить константу c и вычислить $P\{Y+X>2\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

Вариант 16

1. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на двух костях будет равна числу очков на третьей кости?
2. Колода в 36 карт раздается на четыре игрока. Найти вероятность того, что у одного игрока окажется четыре туза?
3. В урне находятся 4 белых и 6 черных шаров. Из урны последовательно вынимаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Вычислить вероятность того, что будет вынуто не более двух шаров.

4. Вероятность рождения мальчика равна $0{,}515$. Найти вероятность того, что среди 100 детей в роддоме число мальчиков и девочек одинаковое.
5. В магазин поступили зонты с двух фабрик в соотношении $2:3$. Куплено четыре зонта. Составить закон распределения числа купленных зонтов первой фабрики. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Задана плотность распределения $f(x)=\dfrac{c}{x^3}, x\ge 1$. Найти константу c, функцию распределения этой случайной величины, вероятность попадания в интервал $\left[1;2\right]$, математическое ожидание и дисперсию.
7. Длительность безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0.01t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью в пятьдесят часов, элемент не откажет.
8. Случайная величина X подчинена нормальному закону с параметрами $m=1$ и $\sigma=2$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=3X-2$, математическое ожидание и дисперсию Y.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

X \ Y	2	4
1	0,2	0,4
2	0,1	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X=1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,-4)$, $(-4,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (X,Y), плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y). Проверить зависимость X и Y.

Вариант 17

1. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Моменты прихода пароходов независимы и равновозможны в течение суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать ос-

вобождения причала, если время стоянки одного парохода – один час, а второго – два часа.

2. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что два человека, испытывающие друг к другу неприязнь, не окажутся сидящими рядом?
3. Испытывается прибор, состоящий из трех узлов. Вероятности безотказной работы узлов за время Т соответственно равны $0,8$; $0,85$; $0,9$. Узлы отказывают независимо друг от друга. Прибор считается неисправным, если отказал хотя бы один узел. По истечении времени Т выяснилось, что прибор неисправен. Найти вероятность того, что неисправен только второй узел.
4. На склад магазина поступают китайский костюмы, из которых 80% без явного брака. Найти вероятность, что из 100 наудачу взятых костюмов не менее 85 окажутся без явного брака.
5. Проводится проверка большой партии колесных пар до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных колесных пар). Составить закон распределения числа проверенных колесных пар. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение, если известно, что вероятность брака для каждой колесной пары $0,1$.
6. Случайная величина распределена по закону Коши $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

   Найти функцию распределения, вероятность попадания в интервал $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$, математическое ожидание.
7. Концентрация примесей посторонних веществ в полупроводниках, используемых в производстве микропроцессоров для компьютеров, – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $0,000127$ и среднеквадратическим отклонением $0,000022$. Полупроводник считается стандартным, если концентрация примесей ниже $0,00015$. Оцените долю доброкачественных полупроводников.
8. Случайная величина X равномерно распределена на интервале $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$.

   Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=\mathrm{tg}X$, вычислить ее математическое ожидание.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$ задан в таблице

Y / X	-1	2
0	0,4	0,4
2	0,1	0,1

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y = 2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X, Y).

10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x, y) = cx, 0 \le x \le 4; 0 \le y \le 2$. Определить константу c и вычислить $P\{Y + X > 2\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X, Y).

Вариант 18

1. Некто написал три поздравительные открытки, вложил их в конверты, запечатал, а затем наугад написал адреса. Какова вероятность того, что по назначению не попадёт ни одна из открыток?
2. В кастрюле 30 пельменей, из них пара счастливых. Доценту и студенту достается поровну пельменей. Какова вероятность того, что все счастливые пельмени достанутся студенту?
3. Секретарь получила три папки с заявлениями: в первой папке пять заявлений от студентов и три – от преподавателей; во второй папке четыре заявления от студентов и шесть – от преподавателей; в третьей папке семь заявлений от студентов и пять – от преподавателей. Секретарь наугад из одной из папок вынимает два заявления и отдает ректору на подпись. Найти вероятность того, что оба заявления от студентов.
4. В среднем в одном из 200 наборов телефонного номера абонентом спутниковой связи происходит ошибочное соединение. Чему равна вероятность хотя бы одного неправильного соединения при пятистах звонках по спутниковой связи?
5. В магазине имеются 20 банок огурчиков, у семи из них кончился срок годности. Составить закон распределения числа просроченных банок огурцов среди выбранных наудачу четырех, найти математическое ожидание и дисперсию. Определить вероятность того, что среди выбранных банок нет просроченных.
6. Случайная величина распределена по закону $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}$ при $-1 < x < 1$. Найти функцию распределения этой случайной величины, вероятность попадания в интервал $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$, математическое ожидание.

7. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 15$ грамм. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 грамм.
8. Сторона квадрата X имеет равномерное распределение на отрезке $\left[1;2\right]$. Найти плотность распределения площади квадрата и среднее значение площади.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$ задан в таблице

X \ Y	–2	2
–1	0,3	0,4
0	0,1	0,2

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X = 0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$.
10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,-5)$, $(-5,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$, плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$. Проверить зависимость X и Y.

Вариант 19

1. Наудачу выбираются два числа, которые равновероятно распределены на отрезке $\left[-1,2\right]$. Какова вероятность того, что их сумма больше 1, а произведение меньше 1?
2. Десять студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеку. Какова вероятность того, что между Петровым и Ивановым окажутся ровно 4 человека?
3. Имеется пять урн следующего состава: 2 урны по 2 белых и 3 черных шара; 2 урны по одному белому и 4 черных шара; 1 урна 4 белых и 1 черный шар. Из одной наудачу выбранной урны взят шар. Он оказался белым. Чему равна вероятность того, что шар вынут из последней урны.

4. Известно, что в городе N 30% населения предпочитают добираться на работу на личном автотранспорте. Случайно выбрано 6 человек. Найти вероятность того, что более половины из них ездят на работу на своих авто.
5. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна $0,002$. Составить закон распределения отказавших за время T элементов, найти математическое ожидание и дисперсию. Определить вероятность того, что за время T откажет хотя бы один элемент.
6. Плотность распределения случайной величины задана в виде $f(x) = C\sin 3x,\ x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$. Найти постоянную C, функцию распределения $F(x)$, вероятность попадания в интервал $(0;\frac{\pi}{4})$, математическое ожидание. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Рост лиц призывного возраста предполагается нормально распределенным с параметрами $m = 172$ см и $\sigma = 6$ см. Определить процент лиц – потенциальных танкистов (рост меньше 165 см).
8. Случайная величина X равномерно распределена на интервале $(-0,5\pi;0,5\pi)$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \sin X$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

Y / X	1	2
1	0,1	0,5
2	0,1	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y = 1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y) = cxy, 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2$. Определить константу c и вычислить $P\{Y + X < 1\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y)

Вариант 20

1. В круг радиуса 5 вписан треугольник наибольшей площади. Определить вероятность попадания в треугольник точки, случайно брошенной в круг.
2. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.
3. Экономист полагает, что вероятность роста стоимости акций некоторой компании в следующем году составит $0,75$, если экономика страны будет на подъеме, и $0,3$, если экономика страны не будет успешно развиваться. По его же мнению, вероятность экономического подъема в будущем году равна $0,8$. Используя предположения экономиста, оцените вероятность того, что акции компании поднимутся в цене в следующем году.
4. В ходе аудиторской проверки строительной компании аудитор случайным образом отбирает 50 счетов. Если 3% счетов содержат ошибки, какова вероятность того, что аудитор найдет хотя бы один счет с ошибкой?
5. Из урны, в которой лежат 6 черных и 4 белых шара, последовательно вынимаются шары до тех пор, пока не появится черный шар. Найти закон распределения случайной величины – числа извлеченных шаров. Найти математическое ожидание, дисперсию.
6. Плотность распределения случайной величины задана в виде $f(x) = C\text{arctg}x,\ x \in [0;1]$. Найти постоянную C, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание. Построить график плотности распределения.
7. В здании областной администрации случайное время ожидания лифта равномерно распределено в диапазоне от 0 до 5 минут. Чему равна вероятность ожидания лифта более трех минут?
8. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda = \frac{1}{2}$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = e^{-X}$ и математическое ожидание.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

X \ Y	1	3
0	0,5	0,1
2	0,1	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X = 2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,-6)$, $(-6,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (X,Y), плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y). Проверить зависимость X и Y.

Вариант 21

1. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.
2. Урна содержит четыре занумерованных шара с номерами от 1 до 4. Шары извлекаются по одному без возвращения. Найти вероятность того, что не будет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения.
3. На химическом заводе установлена система аварийной сигнализации. Когда возникает аварийная ситуация, звуковой сигнал срабатывает с вероятностью $0,95$. Звуковой сигнал может сработать случайно и без аварийной ситуации с вероятностью $0,02$. Реальная вероятность аварийной ситуации равна $0,004$. Предположим, звуковой сигнал сработал. Чему равна вероятность реальной аварийной ситуации?
4. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдет 130, если всхожесть семян оценивается вероятностью $0,75$.
5. Стрелок ведет стрельбу по мишени до первого попадания, имея боезапас четыре патрона. Вероятность попадания при каждом выстреле равна $0,6$. Построить закон распределения случайной величины – числа использованных патронов. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Плотность распределения случайной величины задана в виде $f(x) = C\cos x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Найти постоянную C, функцию распределения $F(x)$, вероятность попадания в интервал $(0;\frac{\pi}{4})$, математическое ожидание. Построить графики функции распределения и плотности распределения.

7. Дневная добыча угля в некоторой шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 785 тонн и среднеквадратическим отклонением 60 тонн. Найти вероятность того, что в данный день добыча угля упадет ниже 665 тонн.
8. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	–2	–1	1	2
p	0,3	0,1	0,2	0,4

   Найти закон распределения случайной величины $Y = X^2$, математическое ожидание и дисперсию Y.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$ задан в таблице

Y / X	–2	0
0	0,3	0,4
2	0,1	0,2

   Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y = -2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$.
10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x, y) = cy, 0 \le x \le 2; 0 \le y \le 4$. Определить константу c и вычислить $P\left\{Y + X > 2\right\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$.

Вариант 22

1. Какова вероятность того, что наудачу брошенная в круг точка окажется внутри вписанного в него правильного шестиугольника?
2. На книжной полке помещается 20 томов, среди которых двухтомник Лермонтова. Найти вероятность того, что они не стоят рядом.
3. За некоторый промежуток времени амеба может погибнуть с вероятностью $0,25$, выжить с вероятностью $0,25$ и разделиться на две с вероятностью $0,5$. То же самое происходит с амебой в следующий промежуток времени независимо от «происхождения». Какова вероятность того, что хотя бы одна амеба выживет к концу второго промежутка?

4. Менеджер ресторана по опыту знает, что 70% людей, сделавших заказ на вечер, придут в ресторан поужинать. В один из вечеров менеджер решил принять 20 заказов, хотя в ресторане было лишь 15 свободных столиков. Чему равна вероятность того, что более 15 посетителей придут на заказанные места?
5. На станцию под погрузку поступило 20 вагонов, среди которых два с дефектом. Из них случайным образом отобрано три вагона. Построить закон распределения случайной величины – числа дефектных вагонов. Найти математическое ожидание, дисперсию.
6. Дана плотность распределения случайной величины $f(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$. Найти постоянную c, функцию распределения $F(x)$, вероятность попадания в интервал $(-1;2)$, математическое ожидание. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Срок службы жесткого диска компьютера – случайная величина, подчиняющаяся показательному закону со средней продолжитенльностью службы в 12000 часов. Найдите долю жестких дисков, срок службы которых превысит 20000 часов.
8. Случайная величина X подчинена нормальному закону с параметрами $m=1$ и $\sigma=2$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

$X \backslash Y$	–2	0
–1	0,2	0,2
1	0,3	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X=1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (X,Y), плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y). Проверить зависимость X и Y.

Вариант 23

1. Какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты «герб» выпадет по меньшей мере три раза подряд?
2. В клетке содержатся восемнадцать кур. Из них шесть невакцинированы. Партию делят на две равные части. Какова вероятность того, что не вакцинированные куры разделятся поровну?
3. При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения $33,7\%$ имеют первую, $37,5\%$ – вторую, $20,9\%$ – третью и $7,9\%$ – четвертую группу крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.
4. При передаче сообщения по каналу связи отдельные знаки этого сообщения независимо друг от друга могут искажаться. Вероятность искажения знака равна $0,1$. Какова вероятность того, что сообщение из пяти знаков содержит не менее двух искаженных знаков?
5. Из двадцати лотерейных билетов выигрышными являются четыре. Наудачу извлекаются четыре билета. Построить закон распределения случайной величины – числа выигрышных билетов среди отобранных. Найти математическое ожидание и дисперсию.
6. Дана плотность распределения случайной величины $f(x) = cx^3, 1 < x \le 3$. Найти постоянную c, функцию распределения $F(x)$, вероятность попадания в интервал $(2;4)$, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Служащий рекламного агентства утверждает, что время, в течение которого телезрители помнят содержание рекламного ролика, подчиняется показательному закону с параметром $\lambda = 0,25$ 1/день. Найти долю зрителей, способных вспомнить рекламу спустя семь дней.
8. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 0,5\sin x$ в интервале $(0, \pi)$. Найти плотность распределения вероятности случайной величины $Y = X^2$ и ее математическое ожидание.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задан в таблице

X \ Y	1	3
1	0,2	0,4

2	0,3	0,1

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=3$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y)=cy, 0\le x\le 2; 0\le y\le 2$. Определить константу c и вычислить $P\{Y+X>2\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

Вариант 24

1. Какова вероятность того, что сумма длин двух наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых равномерно распределена на интервале $(0,L)$, будет не меньше $L/2$, но и не больше $3L/2$?
2. На книжной полке стоят семь книг, среди которых трехтомник Честертона. Найти вероятность того, что все три книги стоят рядом.
3. Легковых автомобилей мимо бензоколонки проезжает вчетверо больше, чем грузовых машин. Вероятность того, что проезжающая машина подъедет на заправку, составляет для грузовой машины $0{,}05$, для легковой – $0{,}15$. Только что от бензоколонки отъехала заправленная машина. Найдите вероятность того, что это была грузовая машина.
4. Вероятность попадания достаточно крупной частицы в антенну спутника в течение суток равна $0{,}04$. Какова вероятность того, что в течение 30 дней полета в антенну попадет не более одной крупной частицы?
5. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы (за время t) первого элемента равна $0{,}9$, второго – $0{,}8$ и третьего – $0{,}7$. Составить закон распределения числа элементов, вышедших из строя за время t. Найти математическое ожидание, дисперсию.
6. Дана плотность распределения случайной величины $f(x)=c(x^3-1), 1<x\le 2$. Найти постоянную c, функцию распределения $F(x)$, вероятность попадания в интервал $(1{,}5;4)$, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m=0$ и $\sigma=2$. Какое из двух событий $\{|X|\le 2\}$ и $\{|X|\ge 2\}$ имеет большую вероятность?

8. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \cos x$ в интервале $(0, \pi/2)$. Найти плотность распределения вероятности случайной величины $Y = X^3$ и ее математическое ожидание.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

X \ Y	1	2
–2	0,2	0,1
–1	0,1	0,6

   Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X = -2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).
10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (X,Y), плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y). Проверить зависимость X и Y.

Вариант 25

1. Брошены 5 игральных костей. Какова вероятность того, что на всех гранях выпали различные числа подряд?
2. Для студентов, едущих на практику, предоставлены 15 путевок в Серов, 10 – в Соликамск и 5 – в Сочи. Какова вероятность того, что влюбленная пара студентов попадет на практику в один город?
3. В соревновании участвуют 20 спортсменов: 8 девушек и 12 юношей. Вероятность выполнить норму мастера спорта составляет для девушки $0{,}4$, для юноши – $0{,}5$. Наудачу выбранный спортсмен выполнил норму мастера. Определите вероятность того, что это был юноша.
4. Известно, что 80% специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек высшее образование имеет не менее 70.
5. Нефтеразведывательная компания получила финансирование для проведения пяти нефтеразработок. Вероятность успешной нефтеразведки $0{,}1$. Предположим, что нефтеразведки осуществляют независимые друг от друга разведывательные партии. Построить закон распределения случай-

ной величины – числа успешных разведок. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

6. Дана функция распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \sqrt{x}, & 0<x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$ Найти плотность распределения $f(x)$, вероятность попадания в интервал $(0,25;2)$, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0,1t}$, а второго – $F_2(t)=1-e^{-0,05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью 20 часов откажет только один элемент.
8. Случайная величина X подчинена нормальному закону с параметрами $m=-1$ и $\sigma=1,5$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=\sqrt[3]{X}$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$ задан в таблице

X \ Y	–2	1
0	0,2	0,4
2	0,2	0,2

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$.

10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y)=cxy, 0\le x\le 2; 0\le y\le 1$. Определить константу c и вычислить $P\left\{Y+X<1\right\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины $\left(X,Y\right)$.

Вариант 26

1. У театральной кассы стоят шесть человек. У троих из них сторублевые купюры, у троих – пятидесятирублевые. Билет стоит 50 рублей. Каждый покупатель приобретает по одному билету. В начальный момент в кассе

нет денег. Чему равна вероятность того, что ни один покупатель не будет ждать сдачу?

2. Группа студентов – 10 девушек и 5 юношей – случайно разбивается на 5 групп по три человека в каждой группе. Чему равна вероятность того, что в каждой группе будет юноша.
3. Три самолета, несущие по одному заряду каждый, поочередно атакуют наземную цель, поражая ее с вероятностями $0{,}8$; $0{,}7$; $0{,}6$ соответственно. В случае поражения цели атаки прекращаются. Какова вероятность того, что все бомбы будут израсходованы?
4. Среди лесных клещей 2% являются носителями вируса энцефалита. Какова вероятность того, что среди 400 укушенных человек менее пяти укушены энцефалитными клещами?
5. Приблизительно 10% бутылок бракуется на линии из-за трещин в стекле. Если три бутылки отобраны случайно, то постройте закон распределения случайной величины – числа дефектных бутылок. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \sin^2 x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ Найти $P\left\{\dfrac{\pi}{6}<X<\dfrac{\pi}{2}\right\}$, плотность распределения, математическое ожидание. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Случайная величина распределена по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma=2$. Найти вероятность, что отклонение от среднего значения по абсолютной величине будет не более трех.
8. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$
p	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

Найти закон распределения случайной величины $Y=\left|\operatorname{arctg} X\right|$, математическое ожидание и дисперсию Y.

9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

Y / X	1	2
0	0,3	0,3
2	0,1	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X = 2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (X,Y), плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y). Проверить зависимость X и Y.

Вариант 27

1. Найти вероятность того, что выбранное наудачу натуральное число при возведении в квадрат даст число, оканчивающееся на девять.
2. Гражданин купил карточку Спортлото и отметил в ней шесть из имеющихся 49 номеров. Найти вероятность того, что он угадает четыре номера.
3. Пусть 3% всех мужчин и $0,5\%$ всех женщин – дальтоники. Наугад выбранный человек оказался дальтоником. Какова вероятность того, что это был мужчина, если на 10 девчонок по статистике 9 ребят?
4. Студент должен вычислить сто интегралов за то, что не выучил таблицу интегралов. Вероятность того, что студент вычислит интеграл, равна $0,6$. Студент будет допущен к контрольной работе, если вычислит правильно не менее 70 интегралов. Найти вероятность того, что студента допустят к контрольной работе.
5. Согласно статистическим данным, вероятность того, что двадцатипятилетний человек проживет еще один год, равна $0,998$. Страховая компания предлагает двадцатипятилетнему человеку застраховаться на сумму 1000000 рублей. Страховой взнос равен 3000 рублей. Какую среднюю прибыль ожидает получить компания при страховании одного двадцатипятилетнего человека?

6. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ ax+b, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$ Найти константы a и b, плотность распределения, $P\{-5 < X < 1{,}5\}$, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Испытываются пять приборов, работающих независимо друг от друга. Длительность безотказной работы распределена по показательному закону с равными параметрами $\lambda = 0{,}01$ отказов в час. Найти вероятность того, что за время длительностью в десять часов, откажут ровно три прибора.
8. Случайная величина распределена по закону Коши с плотностью вероятности $f(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \mathrm{arctg} X$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

X \ Y	0	1
–1	0,2	0,5
0	0,1	0,2

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).
10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y)=cx, 0 \le x \le 3; 0 \le y \le 2$. Определить константу c и вычислить $P\{Y+X>2\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

Вариант 28

1. Пассажир трамвая оплатил проезд. Какова вероятность того, что все цифры на билете (всего шесть цифр) разные?

2. В отделение связи, в котором четыре канала связи, поступили четыре телеграммы. Телеграммы случайным образом распределяются по каналам связи с равными вероятностями. Найти вероятность того, что все четыре телеграммы будут переданы по разным каналам.
3. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча, а после игры возвращают обратно в коробку. При выборе мячей не отличают игранные от неигранных. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется новых мячей?
4. Левши составляют в среднем 1% населения. Какова вероятность того, что среди двухсот человек не более трех левшей?
5. Из урны, содержащей четыре белых и шесть черных шаров, случайным образом и без возвращения извлекаются три шара. Построить закон распределения случайной величины – числа извлеченных белых шаров. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Плотность распределения случайной величины задана в виде $f(x) = a/x^3$, $x > 2$. Найти значение постоянной a, функцию распределения $F(x)$, вероятность попадания в интервал $(1;3)$, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Случайная величина распределена равномерно на отрезке $[0;6]$. Найти математическое ожидание и дисперсию. Что вероятнее: в результате испытания случайная величина окажется в интервале $(2;4)$ или вне его?
8. Случайная величина X подчинена нормальному закону с параметрами $m = 3$ и $\sigma = 0,5$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = 0,5X^3$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

X \ Y	1	2
–1	0,1	0,4
1	0,1	0,4

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X = 1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).
10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,5)$, $(5,0)$. Опреде-

лить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (X,Y), плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y). Проверить зависимость X и Y.

Вариант 29

1. Какова вероятность выбрать трехзначное число с разными цифрами?
2. Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрывается четыре билета на шоу «Красная Шапочка», причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся хотя бы три девушки?
3. По самолету производится три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна $0{,}4$, при втором – $0{,}5$, при третьем – $0{,}7$. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий; при одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью $0{,}2$, при двух попаданиях – с вероятностью $0{,}6$. Найти вероятность того, что в результате выстрелов самолет будет выведен из строя.
4. В Екатеринбурге в сентябре вероятность дождливого дня равна $0{,}4$. Что вероятнее: из восьми наудачу взятых дней сентября будет два дождливых или три?
5. На конноспортивных соревнованиях необходимо преодолеть четыре препятствия с вероятностями прохождения, равными соответственно $0{,}9$, $0{,}8$, $0{,}7$, $0{,}6$. При неудаче спортсмен в дальнейшем в состязании не участвует. Построить закон распределения случайной величины – числа взятых препятствий. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
6. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}, & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$ Найти $P\{1<X<2\}$, плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda=2$. Найти вероятность, что в результате испытания случайная величина попадет в интервал $(2;4)$.
8. Радиус шара измерен приближенно, в предположении равномерного распределения в интервале $[1;2]$. Найти плотность распределения объема шара и среднее значение объема.

9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

$X \backslash Y$	–2	2
–1	0,2	0,1
1	0,4	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=-2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины имеет вид: $f(x,y)=cx, 0\le x\le 2; 0\le y\le 2$. Определить константу c и вычислить $P\{Y+X>2\}$. Установить, зависимы X и Y или нет. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).

Вариант 30

1. Три пассажира едут в лифте, который останавливается на восьми этажах. Каждый пассажир может выйти на любом этаже. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах.
2. Два числа выбираются случайно из чисел 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Одно их них становится числителем, другое – знаменателем дроби. Какова вероятность того, что полученная дробь будет несократима?
3. Из урны, содержащей первоначально 20 белых и 10 черных шаров, пропал один шар. После этого из нее извлекают наугад один шар. Какова вероятность того, что это будет белый шар?
4. В студии телевидения имеется четыре телевизионных камеры, каждая из которых может быть включена в данный момент независимо от других с вероятностью $0{,}3$. Найти вероятность того, что в данный момент работают по крайней мере две камеры.
5. На пути движения автомобиля пять светофоров. Каждый из них, независимо от остальных светофоров, с вероятностью 0,5 запрещает движение. Построить закон распределения случайной величины – числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

6. Случайная величина X задана функцией распределения
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ a+b\cdot \arcsin x, & -1<x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$ Найти константы a и b, плотность распределения, $P\{0<X<1\}$, математическое ожидание. Построить графики функции распределения и плотности распределения.
7. Время ожидания приезда пожарной машины распределено равномерно на отрезке $[5;10]$ (минут), машины скорой помощи – на отрезке $[3;15]$ (минут), милиции – на отрезке $[2;20]$ (минут). Какая машина прибудет на место происшествия быстрее в среднем?
8. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda=1$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=\ln X$.
9. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задан в таблице

X \ Y	1	2
–1	0,3	0,3
0	0,1	0,3

Найти законы распределения составляющих, условный закон распределения случайной величины Y при условии $X=-1$. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y).
10. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,6)$, $(6,0)$. Определить выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (X,Y), плотности распределения составляющих. Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X,Y). Проверить зависимость X и Y.

Учебное издание

Башуров Вячеслав Владимирович
Башурова Оксана Анатольевна
Спевак Лев Фридрихович

Теория вероятностей

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
230201 – «Информационные системы и технологии»,
090103 – «Организация и технологии защиты информации»,
направлений подготовки бакалавров
230400 – «Информационные системы и технологии»,
090900 – «Информационная безопасность»

Редактор *С. В. Пилюгина*

Подписано в печать 13 .03.12. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 4,6
Тираж 100 экз. Заказ № 30

Издательство УрГУПС
620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66