

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УрФУ имени первого Президента Б. Н. Ельцина»
Институт радиоэлектроники и информационных технологий – РТФ
Кафедра информационных технологий

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Отчёт по лабораторной работе № 2

Тема «Многокритериальная оптимизация»

ВАРИАНТ №

Выполнил:

Студент _____

(ФИО)

Группа РИМ-150209

Проверила:

(оценка)

(дата)

(подпись)

Г. М. Черногорова,
доцент кафедры ИТ

Екатеринбург 2015

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача линейного программирования

Решить задачу многокритериальной оптимизации методом ограничений:

Максимизировать: $f_1(x) = x_1 + 5x_2$.

Минимизировать: $f_2(x) = 3x_1 - 2x_2$.

При ограничениях: $\delta_1: x_1 + 2x_2 \geq 5$;

$\delta_2: 3x_1 + x_2 \geq 7$;

$\delta_3: -3x_1 + 5x_2 \leq 17$;

$\delta_4: 5x_1 - x_2 \leq 23$;

$\delta_5: 3x_1 - 4x_2 \leq 5$;

$x_1, x_2 \geq 0$.

РЕШЕНИЕ

1. Найдём допустимое множество решений задачи (представлено на рис. 1 желтым многоугольником ABCDE).

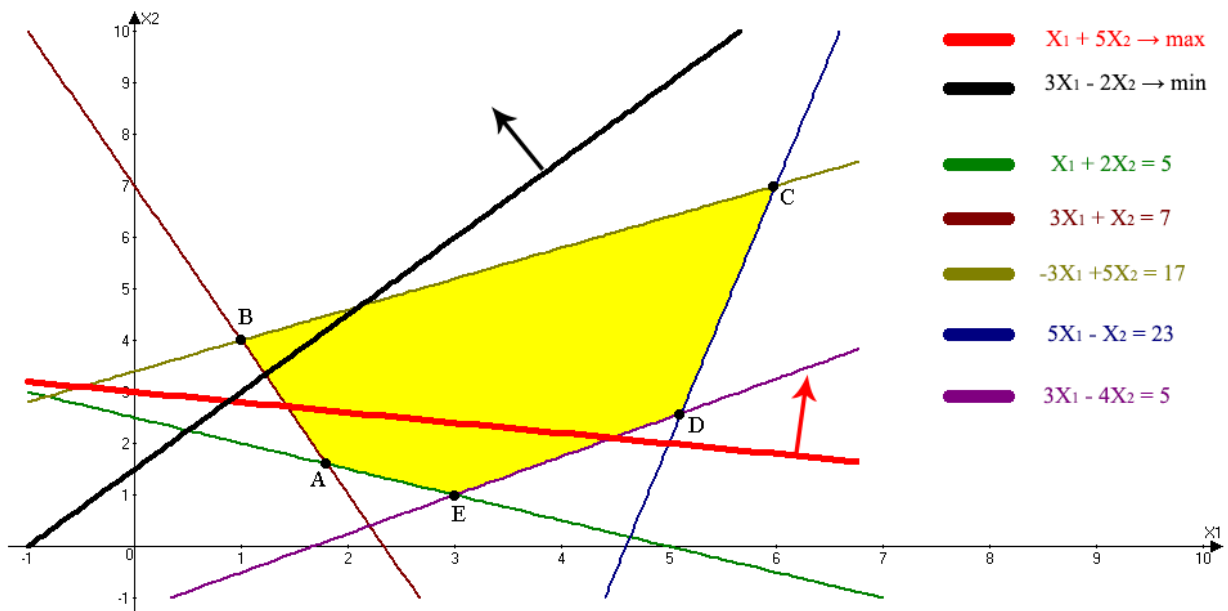


Рисунок 1- Допустимое множество решений

Координаты угловых точек (вершин) многоугольника следующие:

$$A = (1.8; 1.6), B = (1; 4), C = (6; 7), D = (5\frac{2}{17}; 2\frac{10}{17}), E = (3; 1).$$

Значения критериев в данных точках представлены в таблице 1.

Таблица 1 Значения критериев

Точка	$f_1(x) = x_1 + 5x_2$	$f_2(x) = 3x_1 - 2x_2$
$A = (1.8; 1.6)$	9.8	2.2
$B = (1; 4)$	21	-5 -min
$C = (6; 7)$	41 - max	4
$D = (5\frac{2}{17}; 2\frac{10}{17})$	$18\frac{1}{17}$	10,176 - max
$E = (3; 1)$	8 - min	7

2. Для каждого критерия $f_i(x)$ найдём наилучшее и наихудшее решения и значения целевых функций в соответствующих точках симплекс –методом. Получаем результат:

❖ Функция $f_1(x) = x_1 + 5x_2$:

- принимает наихудшее значение 8 в точке $E = (3; 1)$;
- принимает **наилучшее значение 41** в точке $C = (6; 7)$;

❖ Функция $f_2(x) = 3x_1 - 2x_2$:

- принимает наихудшее значение $10\frac{3}{17}$ в точке $D = (5\frac{2}{17}; 2\frac{10}{17})$;
- принимает **наилучшее значение -5** в точке $B = (1; 4)$.

Результат совпадает с значениями таблицы 1.

Отрезок BC представляет собой множество эффективных планов.

3. Рассмотрим случай, когда критерии равноценны, т.е. $\rho_1 = \rho_2$, и будем искать компромиссное решение на множестве эффективных планов, обеспечивающее минимальные одинаковые относительные потери $k_0 = x_3$ для обоих критериев.

Вычислим функции относительных потерь:

$$W_1 = \rho_1 W_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_1^o - f_1(x)}{f_1^o - f_{1 \min}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{41 - x_1 - 5x_2}{33} = \frac{41 - x_1 - 5x_2}{66}$$

$$W_2 = \rho_2 W_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_2(x) - f_2^o}{f_{2 \max} - f_2^o} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x_1 - 2x_2 + 5}{15.18} = \frac{3x_1 - 2x_2 + 5}{30.36}$$

Запишем эквивалентную задачу линейного программирования для определения компромиссного решения:

Целевая функция: $x_3 \rightarrow \min$

При условиях: $\frac{41 - x_1 - 5x_2}{66} \leq x_3;$

$$\frac{3x_1 - 2x_2 + 5}{30.36} \leq x_3;$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 5;$$

$$3x_1 + x_2 \geq 7;$$

$$-3x_1 + 5x_2 \leq 17;$$

$$5x_1 - x_2 \leq 23;$$

$$3x_1 - 4x_2 \leq 5;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Или:

Целевая функция: $x_3 \rightarrow \min$

При условиях: $-x_1 - 5x_2 - 66x_3 \leq -41;$

$$3x_1 - 2x_2 - 30.36x_3 \leq -5;$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 5;$$

$$3x_1 + x_2 \geq 7;$$

$$-3x_1 + 5x_2 \leq 17;$$

$$5x_1 - x_2 \leq 23;$$

$$3x_1 - 4x_2 \leq 5;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Решим данную задачу с помощью программы SimplexWin 3.1. Ввод исходных данных представлен на рисунке 2, полученный результат – на рисунках 3 и 4.

The screenshot shows the SimplexWin 3.1 window with a menu bar (Файл, Настройки, Задача, Помощь) and two main input sections.

Введите элементы матрицы

x1	x2	x3	Знак	b
-1	-5	-66	<=	-41
3	-2	-30.36	<=	-5
1	2	0	>=	5
3	1	0	>=	7
-3	5	0	<=	17

Введите элементы функции

Min F(x)

x1	x2	x3
0	0	1

Рисунок 2- Ввод данных в программу SimplexWin 3.1

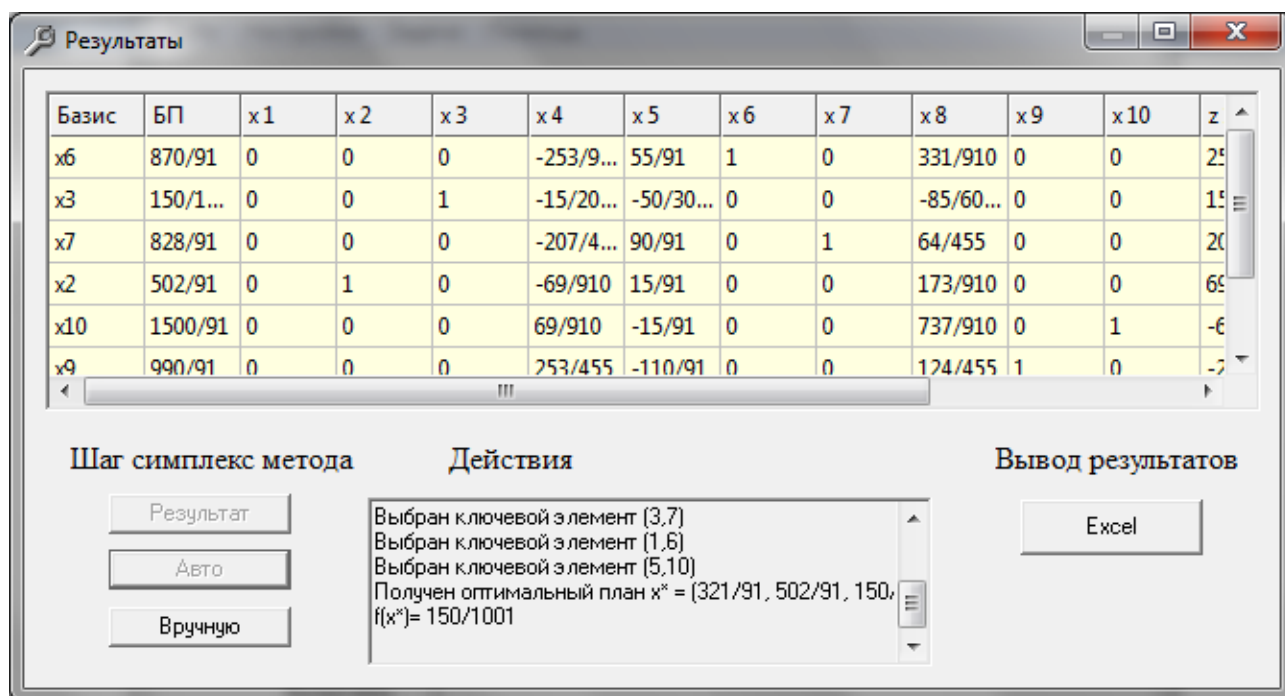


Рисунок 3 - Результат вычислений программы SimplexWin 3.1

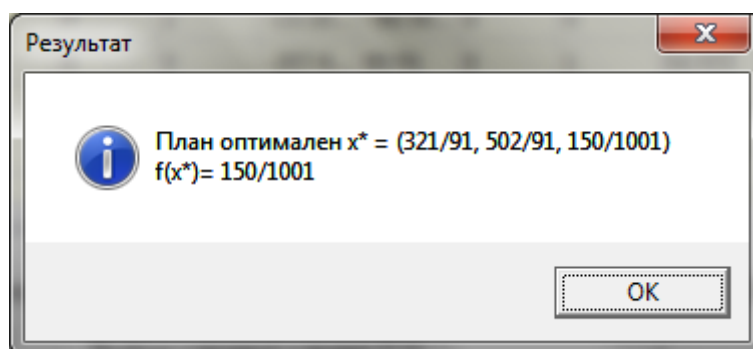


Рисунок 4 - Конечный результат вычислений программы SimplexWin 3.1

Итак, получили решение $x_1 = 3.53$; $x_2 = 5.52$; $x_3 = k_0 = 0.15$. Этому решению соответствует точка F на отрезке BC на рисунке 5.

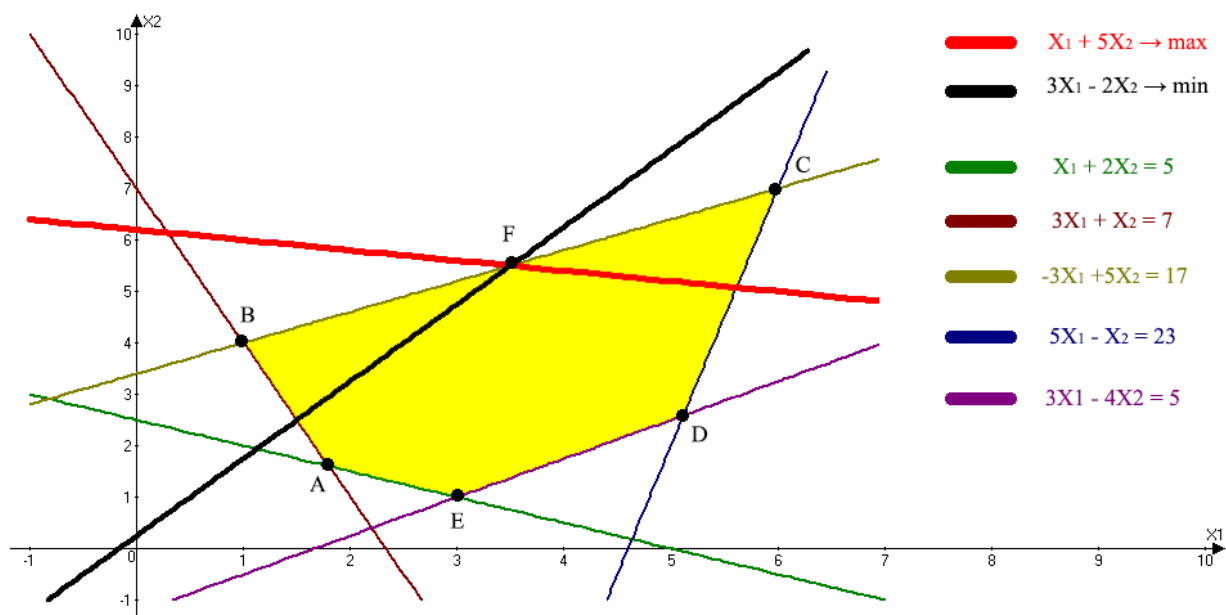


Рисунок 5 - Компромиссное решение задачи на множестве эффективных решений (на отрезке BC)

Вычислим в найденной точке F значения:

- ❖ критерий $f_1(x) = x_1 + 5x_2$ принимает значение 31.13;
- ❖ критерий $f_2(x) = 3x_1 - 2x_2$ принимает значение -0.45 ;
- ❖ минимальные относительные потери критериев равны:

$$\begin{aligned} \blacksquare W_1(f_1(x_1^o, x_2^o)) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{f_1^o - f_1(x_1^o, x_2^o)}{f_1^o - f_{1 \min}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{41 - 31.13}{41 - 8} = \frac{9.87}{66} = 0.15 = k_0; \\ \blacksquare W_2(f_2(x_1^o, x_2^o)) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{f_2(x_1^o, x_2^o) - f_2^o}{f_{2 \max} - f_2^o} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-0.45 + 5}{10.18 + 5} = \frac{4.55}{30.36} = 0.15 = k_0. \end{aligned}$$

Ответ: $x^o = (3.53; 5.52)$ – компромиссное решение ЗЛП;

$f_1(x^o) = 31.13$ – значение критерия максимизации;

$f_2(x^o) = -0.45$ – значение критерия минимизации;

$W_1(f_1(x^o)) = W_2(f_2(x^o)) = 0.15$ – относительные потери критериев при компромиссном решении.