Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Министерство образования и науки Российской Федерации.
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина» (УрФУ)

Уральский федеральный университет

Г.М. Черногородова

ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методические указания к лабораторной работе № 1

по дисциплине «Методы оптимизации»

для студентов дневной формы обучения направления 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника»

Екатеринбург

2015

ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Многие задачи исследования операций из области экономики и управления описываются математическими моделями дискретного программирования. Детальное изложение теории по дискретному программированию представлено: модуль ЛЕКЦИЯ_4 в ЭУМК; учеб. пособия из списка литературы данного модуля.

Пусть необходимо отыскать максимум функции

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1,m}; \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,n}; \qquad (3)$$

$$x_j - \text{целые}, \; j = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Методы решения задач ДП делятся на 3 группы:

1) методы отсекающих плоскостей,
2) методы ветвей и границ,
3) методы случайного поиска и эвристические методы.

Метод отсекающих плоскостей предназначен для решения частного случая задач дискретного программирования - задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП).

Метод ветвей и границ в задачах дискретного программирования состоит в последовательном ветвлении исходного множества решений на дерево подмножеств с нахождением решений на всех подмножествах, пока не получим искомое решение.

Теория и алгоритмы методов изложены ниже в справочном материале и в курсе лекций (модуль 4) настоящего ЭУМК.

1. Индивидуальное задание

Решить целочисленную ЗЛП в соответствии с вариантом, используя метод ветвей и границ. Найти x^0 - оптимальное ***целочисленное*** решение и Z - значение целевой функции в точке x^0. Для выполнения лабораторной работы можно использовать программу Simplex.exe. Выполнить геометрическую интерпретацию задачи в случае, если число переменных равно двум.

Варианты задач приведены ниже в таблице.

Таблица

№ вар	Математическая модель
1	$5x_1 - 15x_2 \to \mathbf{max}$; $-2x_1 + x_2 \le 1$; $3x_1 + x_2 \le 8$; $-2x_1 + 3x_2 \ge -7$; $4x_1 + 3x_2 \ge 0$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
2	$x_1 + 2x_2 - 7x_3 \to \mathbf{max}$; $2x_1 + x_2 - x_3 \le 8$; $x_1 + 4x_2 + x_3 \le 9$; $-x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 3$; $-3x_1 - x_2 - x_3 \le 6$; $x_j \ge 0\ (j = 1, 2, 3)$.
3	$10x_1 - 7x_2 - 9x_3 \to \mathbf{min}$; $6x_1 + 15x_2 + 6x_3 \le 9$; $14x_1 + 42x_2 + 16x_3 \le 21$; $2x_1 + 8x_2 + 2x_3 \le 4$; $x_j \ge 0\ (j = 1, 2, 3)$.

4	$8x_1 + 15x_2 \to \mathbf{max}$; $2x_1 + x_2 \le 10$; $x_1 + x_2 \le 12$; $4x_1 + x_2 \le 8$; $x_1 + 4x_2 \le \mathbf{15}$; $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2)$.
5	$5x_1 - \mathbf{8}x_2 \to \mathbf{max}$; $-2x_1 + x_2 \le 1$; $-x_1 + x_2 \le 2$; $3x_1 + x_2 \le 8$; $4x_1 + 3x_2 \ge 0$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
6	$x_1 + 5x_2 \to \mathbf{max}$; $2x_1 + x_2 \le 10$; $x_1 + x_2 \le \mathbf{15}$; $4x_1 + x_2 \le 8$; $x_1 + 4x_2 \le 10$; $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2)$.
7	$6x_1 + 13x_2 \to \mathbf{max}$; $2x_1 + 3x_2 \le 12$; $3x_1 + 2x_2 \le 10$; $2x_1 + x_2 \le 18$; $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2)$.
8	$3x_1 + 9x_2 \to \mathbf{max}$; $2x_1 - 3x_2 \le \mathbf{9}$; $-2x_1 + x_2 \le 4$; $x_1 + x_2 \le \mathbf{18}$; $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2)$.

9	$4x_1 - 7x_2 - 5x_3 \to \mathbf{min}$; $6x_1 + 15x_2 + 6x_3 \le \mathbf{19}$; $14x_1 + 42x_2 + 16x_3 \le 21$; $2x_1 + 8x_2 + 2x_3 \le 4$; $x_j \ge 0$ (j = 1, 2, 3).
10	$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \to \mathbf{max}$; $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 24$; $3x_1 + 5x_2 + x_3 \mathbf{\ge 8}$; $6x_1 + 3x_3 + x_4 \le \mathbf{20}$; $x_j \ge 0$ (j = 1, 2, 3, 4).
11	$2{,}5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \mathbf{max}$; $4{,}5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 14$; $2x_1 + 6{,}3x_2 + x_3 \le 11$; $x_j \ge 0$ (j = 1, 2, 3).
12	$2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \mathbf{max}$; $x_1 + 3x_2 + \mathbf{2}x_4 \le \mathbf{7}$; $x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3$; $x_j \ge 0$ (j = 1, 2, 3, 4).
13	$x_1 + 2x_2 \to \mathbf{max}$; $x_1 - 2x_2 \le 2$; $-2x_1 + x_2 \le \mathbf{12}$; $x_1 + x_2 \le 3$; $x_j \ge 0$ (j = 1, 2).
14	$2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \mathbf{max}$; $x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le \mathbf{14}$; $5x_1 - x_3 \le 12$; $2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 4$; $x_j \ge 0$ (j = 1, 2, 3)

15	$3x_1 - 4x_2 \to \mathbf{max}$; $-2x_1 + x_2 \le 3$; $x_1 - 2x_2 \le \mathbf{8}$; $x_1 + 0{,}5x_2 \le 5$; $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2)$.
16	$3x_1 + 5x_3 + 14x_4 - 12x_5 \to \mathbf{min}$; $x_1 + 2x_4 + x_5 \le 3$; $x_2 - 3x_4 + 4x_5 \le 2$; $x_3 + x_4 \le \mathbf{6}$ $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$
17	$x_1 + 2x_2 + x_3 \to \mathbf{max}$; $x_1 + x_2 \le \mathbf{5}$; $x_1 + 2x_3 \le \mathbf{14}$; $x_1 + x_2 + x_3 \ge \mathbf{2}$; $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2, 3)$.
18	$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \mathbf{max}$; $-2x_1 + 4x_2 \le 16$; $-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10$; $2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4$; $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2, 3)$.

2. Справочный материал. Целочисленное программирование

Метод ветвей и границ в задачах ЦЛП

Реализация этого метода состоит в последовательном ветвлении исходного множества решений на дерево подмножеств с нахождением решений на всех подмножествах, пока не получим искомое.

Пусть необходимо отыскать максимум функции в задаче (1) – (4). Искомое решение задачи будет найдено на множестве, соответствующем висячей вершине с максимально возможной оценкой. Уточним, что множество, на котором получено оптимальное целочисленное решение, ветвлению не подлежит. Ему соответствует концевая вершина дерева решений.

Как и в методе отсекающих плоскостей, процесс начинается с решения непрерывной задачи ЛП. Если полученный план $X^{\text{опт}}$ не удовлетворяет условию целочисленности, то значение целевой функции $\xi_0 = F\ (X^{\text{опт}})$ дает верхнюю оценку искомого решения на множестве $G^{(0)}$, определенном двумя первыми условиями (2) - (3). Если некоторая переменная не получила целочисленного значения, то в целочисленном плане ее следует либо уменьшить до $[x_{i0}]$, либо увеличить до $[x_{i0}]+1$.

Таким образом, исходное множество $G^{(0)}$ разбиваем на два непересекающихся подмножества:

$$G^{(0)} = G_1^{(1)} \bigcup G_2^{(1)};$$
$$G_1^{(1)} = \left\{X \,/\, X \in G^{(0)},\ x_i \le [x_{i0}]\right\};$$
$$G_2^{(1)} = \left\{X \,/\, X \in G^{(0)},\ x_i \ge [x_{i0}]+1\right\}.$$

Находим решения и оценки на множествах $G_1^{(1)}$ и $G_2^{(1)}$. Если решения, полученные на $G_1^{(1)}$ и $G_2^{(1)}$, целочисленные, то оптимальным будет то, у которого оценка ξ— большая. Если же, допустим, на множестве $G_1^{(1)}$ получено целочисленное решение, а на $G_2^{(1)}$ — нецелочисленное, но $\xi\ (G_2^{(1)}) > \xi\ (G_1^{(1)})$, продолжаем ветвление множества $G_2^{(1)}$, так как на следующем этапе мы можем получить целочисленное решение, оценка которого будет больше, чем оценка $\xi\ (G_1^{(1)})$.

Построение дерева решений продолжается до тех пор, пока не будет найдено решение задачи (1) — (4), полученное на множестве, соответствующем висячей вершине с максимально возможной оценкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие. – СПб. : ЛАНЬ, 2011. – 352 с.
2. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации. Практический курс : учеб. пособие. – М. : Логос, 2011. – 424 с.
3. Черногородова Г.М. Теория принятия решений : учеб. пособие/ Г.М. Черногородова. – Екатеринбург : УГТУ – УПИ, 2006. – 183 с.