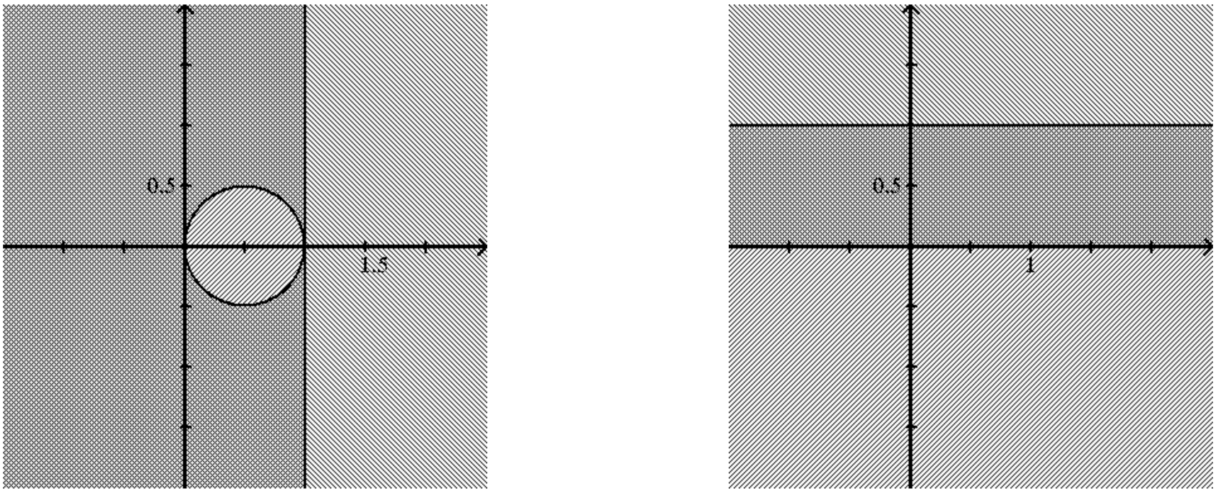

Рис. 1: К задаче 1 а).

Контрольная работа

Вариант 65

1.

а) Найти образ области

$$Z = \left\{ \left| z - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \, , \; \operatorname{Re} z < 1 \right\}$$

под действием функции

$$w = \frac{iz}{z-1} \, .$$

б) Найти функцию $w = f(z)$, осуществляющую отображение $Z \to W$, если:

$$Z = \{|z-1| > 1\} \, , \quad W = \{|w| < 2\} \, .$$

Решение.

а)

$$w = f(z) = \frac{iz}{z-1} \, ;$$

$Z = Z_1 \cap Z_2$, где Z_1 – внешность окужности C_1 с центром в точке $z_0 = 1/2$ радиуса $a = 1/2$; Z_2 – полуплоскость, находящаяся левее прямой C_2, задаваемой уравнением $x = 1$.

Пусть C_1' и C_2' – образы линий C_1 и C_2 при преобразовании $f(z)$. Зависимость $f(z)$ является дробно-линейной, следовательно, каждая из линий C_1' и C_2' являюется прямой или окружностью. Обе линии C_1 и C_2 проходят через полюс $z_p = 1$ функции $f(z)$, следовательно, C_1' и C_2' – это прямые.

Образазами лежащих на C_1 точек $z_1 = 0$ и $z_2 = \frac{1}{2}(1+i)$ являются точки $w_1 = 0$ и $w_2 = 1$. Прямая C_1' проходит через эти точки, следовательно, C_1' – это действительная ось.

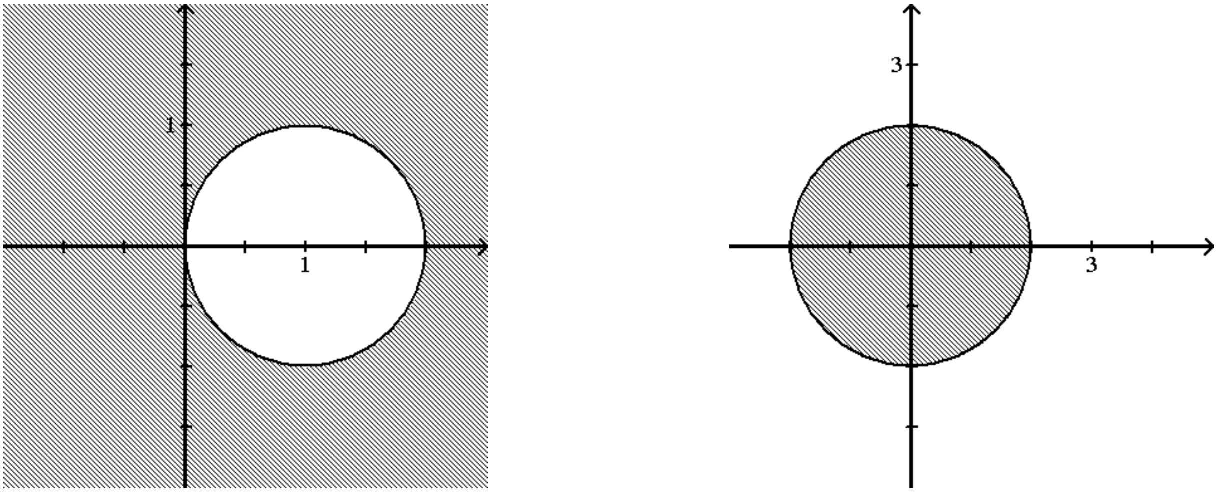

Рис. 2: К задаче 1 б).

Образами лежащих на C_2 точек $z_3 = 1 + i$ и $z_4 = 1 - i$ являются точки $w_3 = 1 + i$ и $w_4 = -1 + i$. Прямая C_2' проходит через эти точки, следовательно, C_2' – это горизонтальная прямая, задаваемая уравнением $y = 1$.

Образом точки $z_5 = 1/2$ является точка $w_5 = -i$. Точка z_5 находится вне области Z_1, следовательно, образом Z_1 является верхняя полуплоскость. Точка z_5 находится в области Z_2, следовательно, образом Z_2 является полуплоскость, находящаяся ниже прямой C_2'.

Таким образом, искомой областью W является полоса, задаваемая неравенствами

$$0 < \operatorname{Im} w < 1 \ .$$

б) Z – внешность круга с центром в точке $z_0 = 1$ радиуса $a = 1$; W – круг с центром в точке $w_0 = 0$ радиуса $b = 2$.

Функция $f_1(z) = z - 1$ преобразует область Z в область Z_1 – внешность круга с центром в точке $z_0 = 0$ радиуса $a = 1$.

Функция $f_2(z) = 1/z$ преобразует область Z_1 в область Z_2 – круг с центром в точке $z_0 = 0$ радиуса $a_2 = 1/a = 1$.

Функция $f_3(z) = 2z$ преобразует область Z_2 в область W.

Искомая функция может быть задана в виде

$$f(z) = f_3\Big(f_2\big(f_1(z)\big)\Big) = \frac{2}{z-1} \ .$$

2. Проверить дифференцируемость и аналитичность функций:

$$\text{а) } f(z) = \sin(iz) \ ; \qquad \text{б) } f(z) = |z| + \frac{1}{z} \ .$$

Решение.

Мы используем обозначения:

$$x = \operatorname{Re} z \ , \quad y = \operatorname{Im} z \ , \quad u = \operatorname{Re} f(z) \ , \quad v = \operatorname{Im} f(z) \ .$$

а)

$$f(z) = \sin(iz) = \sin(-y + i\,x)\ ;$$

тогда

$$u = -\cosh x \cdot \sin y\ , \qquad v = \sinh x \cdot \cos y\ .$$

Находим:

$$\partial u/\partial x = -\sinh x \cdot \sin y\ , \qquad \partial u/\partial y = -\cosh x \cdot \cos y\ ,$$
$$\partial v/\partial x = \cosh x \cdot \cos y\ , \qquad \partial v/\partial y = -\sinh x \cdot \sin y\ .$$

Уравнения Коши–Римана

$$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y\ , \quad \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$$

выполняются во всей открытой комплексной плоскости. Следовательно, функция $f(z)$ аналитична во всей открытой комплексной плоскости.

б)

$$f(z) = |z| + \frac{1}{z}\ ;$$

тогда

$$u = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}\ , \qquad v = -\frac{y}{x^2+y^2}\ .$$

Находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2\,xy}{(x^2+y^2)^2}\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{(x-y)^2}{(x^2+y^2)^2}\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2\,xy}{(x^2+y^2)^2}\ ,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2\,xy}{(x^2+y^2)^2}\ , \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(x-y)^2}{(x^2+y^2)^2}\ .$$

Уравнения Коши–Римана

$$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y\ , \quad \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$$

не выполняются одновременно ни в какой точке комплексной плоскости. Следовательно, функция $f(z)$ нигде не является ни дифференцируемой, ни аналитической.

3. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, если $u(x,y) = \sin x \cdot \cosh y$.

Решение.

$$u = \sin x \cdot \cosh y\ .$$

В данном случае

$$\partial u/\partial x = \cos x \cdot \cosh y\ , \quad \partial u/\partial y = \sin x \cdot \sinh y\ ,$$

$$\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = -\sin x \cdot \cosh y + \sin x \cdot \cosh y = 0\ ;$$

функция u является гармонической, следовательно, искомая аналитическая функция существует.

Записываем уравнения Коши–Римана:

$$\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y = -\sin x \cdot \sinh y\ ,$$

$$\partial v/\partial y = \partial u/\partial x = \cos x \cdot \cosh y\ .$$

Интегрируем первое уравнение:

$$v = \int -\sin x \cdot \sinh y\, dx + \varphi(y) = \cos x \cdot \sinh y + \varphi(y)\ .$$

Подставляем полученную функцию во второе уравнение:

$$\cos x \cdot \cosh y + \varphi'(y) = \cos x \cdot \cosh y\ .$$

Получаем

$$\varphi'(y) = 0\ ;$$

$$\varphi(y) = C = \mathrm{const}\ ,$$

$$v = \cos x \cdot \sinh y + C\ ;$$

$$f(z) = \sin x \cdot \cosh y + i \cdot \cos x \cdot \sinh y + C\ .$$

Окончательно,

$$f(z) = \sin z + C\ .$$

4. Разложить функцию в ряд Лорана в кольце:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^3\,(z-1)} + \frac{\sin z}{z^2}\ , \qquad |z| > 1\ .$$

Решение.

а) В условии, видимо, имеется в виду, что $1 < |z| < 2$.

Итак,

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^3\,(z-1)} + \frac{\sin z}{z^2} \qquad 1 < |z| < 2\ .$$

Разложим сначала в ряд следующую функцию:

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,z^{2k-1}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}\,z^{2k+1}$$

Разложим на элементарные дроби дробно-рациональную функцию:

$$\frac{1}{(z+2)^3\,(z-1)} = \frac{\mu_1}{z-1} + \frac{\mu_{20}}{(z+2)^3} + \frac{\mu_{21}}{(z+2)^2} + \frac{\mu_{22}}{z+2}\ .$$

Обозначив $\xi = z+2$, получим

$$\frac{1}{\xi^3\,(\xi-3)} = \frac{\mu_1}{\xi-3} + \frac{\mu_{20}}{\xi^3} + \frac{\mu_{21}}{\xi^2} + \frac{\mu_{22}}{\xi}\ .$$

Коэффициент μ_1 может быть определен сразу:

$$\mu_1 = (1/3)^3 = 1/27 \; .$$

Остальные коэффициенты определяем следующим образом:

$$\frac{\mu_{20}}{\xi^3} + \frac{\mu_{21}}{\xi^2} + \frac{\mu_{22}}{\xi} = \frac{1}{\xi^3\,(\xi-3)} - \frac{\mu_1}{\xi-3}$$

$$= \frac{1-\xi^3/27}{\xi^3\,(\xi-3)} = -\frac{\xi^2+3\,\xi+9}{27\,\xi^3} \; ,$$

откуда

$$\mu_{20} = -1/3 \; , \quad \mu_{21} = -1/9 \; , \quad \mu_{22} = -1/27 \; .$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(z+2)^3\,(z-1)} = \frac{1/27}{z-1} + \frac{-1/3}{(z+2)^3} + \frac{-1/9}{(z+2)^2} + \frac{-1/27}{z+2} \; .$$

Используем формулу для суммы элементов геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad (|z|<1) \; .$$

Из данной формулы следует:
при $|z| < |z_0|$

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{-1/z_0}{1-z/z_0} = -\frac{1}{z_0}\,\sum_{k=0}^{\infty}(z/z_0)^k$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} z_0^{-k-1}\cdot z^k \; ;$$

при $|z| > |z_0|$

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1/z}{1-z_0/z} = \frac{1}{z}\,\sum_{k=0}^{\infty}(z_0/z)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z_0^k\cdot z^{-k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} z_0^{k-1}\cdot z^{-k} \; .$$

Используем также следующие формулы, которые могут быть получены при дифференцировании формулы для суммы элементов геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,z^k = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad (|z|<1);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\,(k+1)(k+2)\,z^k = \frac{1}{(1-z)^3} \qquad (|z|<1).$$

Из данных формул следует:
при $|z| < |z_0|$

$$\frac{1}{(z-z_0)^2} = \frac{1/z_0^2}{(1-z/z_0)^2} = \frac{1}{z_0^2}\,\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,(z/z_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, z_0^{-k-2} \cdot z^k;$$

аналогично, при $|z| < |z_0|$

$$\frac{1}{(z-z_0)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\,(k+1)(k+2)\, z_0^{-k-3} \cdot z^k;$$

В результате получаем:

$$\frac{1}{(z+2)^3\,(z-1)} = \frac{1}{27}\,\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} + \frac{1}{27}\,\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^{-k-1}\, z^k$$

$$-\frac{1}{9}\,\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\,(-2)^{-k-2}\, z^k + \frac{1}{3}\,\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\,(k+1)(k+2)\,(-2)^{-k-3}\, z^k$$

$$= \frac{1}{27}\,\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^{-k} \left(-\frac{1}{2\cdot 27} - \frac{1}{4\cdot 9} - \frac{1}{8\cdot 3} \right) z^k$$

$$= \frac{1}{27}\,\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} - \frac{19}{216}\,\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^{-k}\, z^k$$

Окончательно,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+3)!}\, z^{2j+1} + \frac{1}{27}\,\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} - \frac{19}{216}\,\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^{-k}\, z^k$$

$$= \frac{28}{27}\, z^{-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+3)!}\, z^{2j+1} + \frac{1}{27}\,\sum_{k=2}^{\infty} z^{-k} - \frac{19}{216}\,\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^{-k}\, z^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, z^k\ ,$$

где

$$\alpha_{-1} = 28/27\ ;$$

$$\alpha_{-k} = 1/27 \qquad (k = 2, 3, ...);$$

$$\alpha_k = (-1)^{k+1}\,\frac{19}{216}\, 2^{-k}$$

для четных неотрицательных k;

$$\alpha_k = (-1)^{k+1}\,\frac{19}{216} \cdot 2^{-k} + \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+3)!}$$

для нечетных положительных $k = 2j+1$.

б) $z_0 = 0$;

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2} + \frac{1}{1-z}\ .$$

При $|z| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\ .$$

При $0 < |z| < \infty$

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{z^2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{z^{2k}}{(2k)!}\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{z^{2\,(k-1)}}{(2k)!} = z^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{z^{2k}}{(2k+2)!}\ .$$

Отсюда при $0 < |z| < 1$

$$f(z) = z^{-2} + \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}\,\frac{z^{2j}}{(2j+2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = z^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\, z^k\ ,$$

где

$$\alpha_k = 1 \quad \text{для нечетных } k = 2j+1\ ;$$

$$\alpha_k = 1 + \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+2)!} \quad \text{для четных } k = 2j\ .$$

5.

а) Вычислить с помощью интегральной формулы типа Коши:

$$\oint_{\Gamma}\frac{\cos^2 z + 1}{(z-\pi)^2}\,dz\ , \qquad \Gamma:\ |z-2| = 3\ .$$

б) Вычислить с помощью основной теоремы о вычетах:

$$\oint_{\Gamma}(1+z+z^2)\cdot e^{\frac{1}{z-2}}\,dz\ , \qquad \Gamma:\ |z-3| = 2\ .$$

Решение.

а) Γ – круг с центом $z_0 = 2$ радиуса $a = 3$;

$$W = \int_C \frac{\Phi(z)}{(z-\pi)^2}\,dz\ , \qquad \Phi(z) = (\cos z)^2 + 1\ .$$

Одна из интегральных формул Коши имеет вид

$$\oint_{\Gamma}\frac{\Phi(z)}{(z-z_1)^2}\,dz = 2\pi\,i\cdot\Phi'(z_1)\ ,$$

где $\Phi(z)$ – аналитическая функция; z_1 – внутренняя точка области, ограниченной контуром Γ.

В данном случае $z_1 = \pi$;

$$\Phi'(z) = 2\,\cos z\,\sin z = \sin(2z)\ ,$$

$$\Phi'(z_1) = 0\ ,$$

следовательно, искомый интеграл равен

$$W = 0\ .$$

б) Γ – круг с центом $z_0 = 3$ радиуса $a = 2$;

$$W = \oint_\Gamma f(z)\,dz\,, \qquad f(z) = (1 + z + z^2)\cdot e^{1/(z-2)}\,.$$

Функция $f(z)$ имеет одну особую точку $z_1 = 2$, находящуюся внутри окружности Γ. Поэтому искомый интеграл равен

$$W = 2\pi\,i\cdot \mathrm{res}_{z_1} f(z)\,.$$

Положим $z = \xi + 2$. Тогда

$$f(z) = \Big(1 + \xi + 2 + (\xi+2)^2\Big)\cdot e^{1/\xi} = (7 + 5\,\xi + \xi^2)\cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\xi^{-k}$$

$$= 7\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\xi^{-k} + 5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\xi^{-k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\xi^{-k+2}$$

$$= 7\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\xi^{-k} + 5\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\,\xi^{-k} + \sum_{k=-2}^{\infty}\frac{1}{(k+2)!}\,\xi^{-k}\,.$$

Отсюда

$$\mathrm{res}_{z_1} f(z) = \frac{7}{1!} + \frac{5}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{58}{6} = \frac{29}{3}$$

и

$$W = 2\pi\,i\cdot 29/3 = i\cdot 60.73746\,.$$

6. Решить уравнение операционным методом:

$$x'' + x = t\,e^t + 4\,\sin t\,, \qquad x(0) = x'(0) = 0\,.$$

Решение.

При решении операционным методом линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\alpha_2\,\frac{d^2}{dt^2}\,\Phi(t) + \alpha_1\,\frac{d}{dt}\,\Phi(t) + \alpha_0\,\Phi(t) = f(t)$$

с учетом начальных условий $\Phi(0) = x_0$ и $\Phi'(0) = x_1$ необходимо применить преобразование Лапласа к обеим частям данного уравнения. Пусть при преобразовании Лапласа функциям $\Phi(t)$ и $f(t)$ соответствуют функции $\Psi(p)$ и $F(p)$; тогда функциям $\Phi'(t)$ и $\Phi''(t)$ соответствуют функции

$$p\,\Psi(p) - x_0 \quad \text{и} \quad p^2\,\Psi(p) - p\,x_0 - x_1;$$

в результате получаем уравнение

$$Q(p)\,\Psi(p) - \alpha_2\,(p\,x_0 + x_1) - \alpha_1\,x_0 = F(p),$$

откуда

$$\Psi(p) = \frac{F(p)}{Q(p)} + \frac{1}{Q(p)}\Big(\alpha_2\,(p\,x_0 + x_1) + \alpha_1\,x_0\Big).$$

Здесь

$$Q(p) = \alpha_2\,p^2 + \alpha_1\,p + \alpha_0$$

– характеристический полином исходного уравнения.

Для определения функции $F(p)$ и восстановления функции $\Phi(t)$ по заданной функции $\Psi(p)$ используем следующее табличное преобразование Лапласа (образом функции $g(t)$ является функция $G(p)$):

$$\text{при} \quad g(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \qquad G(p) = \frac{1}{p^n} \qquad (n = 1, 2, ...).$$

Используя формулу для сдвига аргумента у изображения, можно также получить

$$\text{при} \quad g(t) = \frac{1}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{at} \qquad G(p) = \frac{1}{(p-a)^n} \qquad (n = 1, 2, ...).$$

В данном случае

$$x_0 = 0 \; , \qquad x_1 = 0 \; ,$$

$$f(t) = t\, e^t + 4\, \sin t = t\, e^t - 2i\, e^{it} + 2i\, e^{-it} \; ,$$

$$Q(p) = p^2 + 1 \; .$$

Отсюда

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{4}{p^2+1} \; ;$$

$$\Psi(p) = \frac{1}{(p-1)^2\,(p^2+1)} + \frac{4}{(p^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(p-1)^2\,(p-i)(p+i)} + \frac{4}{(p-i)^2\,(p+i)^2} \; .$$

Разложим данную дробно-рациональную функцию на элементарные дроби. Здесь легче раскладывать каждое слагаемое в выражении для $\Psi(p)$ отдельно. Учитывая формулу

$$\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1/(z_1-z_2)}{z-z_1} + \frac{1/(z_2-z_1)}{z-z_2} \; ,$$

получим

$$\frac{2}{p^2+1} = \frac{-i}{p-i} + \frac{i}{p+i} \; ,$$

$$\frac{4}{(p^2+1)^2} = \left(\frac{-i}{p-i} + \frac{i}{p+i}\right)^2 = \frac{-1}{(p-i)^2} + \frac{-i}{p-i} + \frac{-1}{(p+i)^2} + \frac{i}{p+i} \; ;$$

$$\frac{1}{(p-1)^2\,(p^2+1)} = \frac{1-p/2}{(p-1)^2} + \frac{p/2}{p^2+1} = \frac{1/2}{(p-1)^2} + \frac{-1/2}{p-1} + \frac{1/4}{p-i} + \frac{1/4}{p+i} \; ;$$

окончательная формула разложения

$$\Psi(p) = \frac{1/2}{(p-1)^2} + \frac{-1/2}{p-1} + \frac{-1}{(p-i)^2} + \frac{1/4-i}{p-i} + \frac{-1}{(p+i)^2} + \frac{1/4+i}{p+i} \; .$$

Выполняем обратное преобразование Лапласа:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\, t\, e^t - \frac{1}{2}\, e^t - t\, e^{it} + (1/4 - i)\, e^{it} - t\, e^{-it} + (1/4 + i)\, e^{-it} \; .$$

Искомое решение

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\,(t-1)\,e^t + (1/2 - 2t)\,\cos t + 2\,\sin t\;.$$

Проверка результата:

$$\Phi'(t) = \frac{1}{2}\,t\,e^t + (2t - 1/2)\,\sin t\;,$$

$$\Phi''(t) = \frac{1}{2}\,(t+1)\,e^t + (2t - 1/2)\,\cos t + 2\,\sin t\;,$$

$$\Phi''(t) + \Phi(t) = t\,e^t + 4\,\sin t\;,$$

$$\Phi(0) = 0\;,\quad \Phi'(0) = 0\;.$$