БИБЛИОТЕКА СТУДЕНТА — ЭКОНОМИСТА

Главный редактор серии
доктор экономических наук, профессор В. А. Колемаев

ПРАКТИКУМ
ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Под редакцией
доктора экономических наук, профессора В. А. Колемаева
и кандидата экономических наук, доцента В. И. Соловьева

Рекомендовано кафедрой прикладной математики
ГОУ ВПО «Государственный университет управления»
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся
по специальностям 080000 «Специальности экономики и управления»

Рекомендовано кафедрой математики и естествознания
НОУ «Институт гуманитарного образования» (ИГУМО)
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся
по специальностям 080000 «Специальности экономики и управления»

Москва • 2007

УДК 519 (075.8)
ББК 22.1я73
К60

А в т о р ы:
доктор экономических наук, профессор *В. А. Колемаев*,
кандидат экономических наук, доцент *В. И. Соловьев*,
доцент *И. С. Карандаев*,
доктор физико-математических наук, профессор *В. И. Малыхин*,
доктор экономических наук, профессор *Т. М. Гатауллин*

Р е ц е н з е н т ы:
заведующий кафедрой математики и информационных технологий
Московской академии предпринимательства при Правительстве г. Москвы,
доктор физико-математических наук, профессор *В. И. Быков*,

заведующий кафедрой высшей математики
Московского энергетического института (технического университета),
доктор физико-математических наук, профессор *И. М. Петрушко*,

профессор кафедры прикладной математики
Государственного университета управления,
доктор физико-математических наук *В. В. Шмелев*

Колемаев В. А.
К60 Практикум по исследованию операций в экономике: Учебное пособие для вузов / В. А. Колемаев, В. И. Соловьев, И. С. Карандаев и др.; Под ред. В. А. Колемаева и В. И. Соловьева. − М., 2007. − 192 с. − (Библиотека студента — экономиста).

Задания практикума (каждое из которых представлено 35 вариантами исходных числовых данных) охватывают методы линейного, нелинейного, целочисленного и динамического программирования, оптимизации на графах, многокритериальной оптимизации, принятия решений в условиях конфликта и неопределенности, модели математической экономики и финансовой математики. Задания предполагают построение математических моделей, ручные вычисления, их компьютерную проверку и содержательную экономическую интерпретацию. Все задания предваряются необходимыми теоретическими сведениями и подробно разобранными примерами (в частности, приводятся подробные сведения о компьютерной реализации изучаемых методов оптимизации в пакете Microsoft Excel).

Практикум предназначен для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления. Может быть полезен студентам физико-математических и технических специальностей, преподавателям и аспирантам.

ISBN

© Коллектив авторов, 2007

Предисловие

Учебное пособие «Практикум по исследованию операций в экономике» предназначено для студентов экономических специальностей вузов, изучающих раздел «Математические методы принятия решений в экономике» дисциплины «Математика», а также дисциплины «Математические методы и модели исследования операций», «Методы оптимизации», «Системный анализ и принятие решений», «Экономико-математические методы», «Финансовая математика» и т. п.

Практикум подготовлен в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальностям 080000 «Специальности экономики и управления», Примерной программой дисциплины «Математика» для экономических, менеджериальных направлений и специальностей, составленной Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации, действующими учебными планами и программами учебных дисциплин Государственного университета управления (ГУУ) и Института гуманитарного образования (ИГУМО), которые отводят существенную роль контролируемой самостоятельной работе студентов. Например, в ГУУ самостоятельная работа студентов по разделу «Математические методы принятия решений в экономике» дисциплины «Математика» организована в форме курсового проекта, в ИГУМО — в форме семестрового домашнего задания. В других вузах также организуется самостоятельная работа студентов по математическим дисциплинам в форме курсовых работ и проектов, семестровых домашних заданий, лабораторных и расчетно-графических работ, типовых расчетов и т. п.

Данный практикум состоит из двадцати заданий, которые охватывают линейное, нелинейное, целочисленное и динамическое программирование, задачи оптимизации на графах, многокритериальной оптимизации, принятия решений в условиях конфликта и неопределенности, математической экономики и финансовой математики.

Цель практикума — подготовить студента к самостоятельному проведению операционного исследования, основными этапами которого являются построение математической модели, решение управленческой задачи при помощи модели и анализ полученных результатов.

Выполнение практикума направлено на усиление связи обучения студентов с практикой совершенствования управления и организации современного производства. В процессе работы над заданиями практикума студент не только закрепляет и углубляет теоретические знания, полученные на лекциях и практических занятиях, но и учится применять математические методы оптимизации и исследования операций при постановке и решении конкретных экономических, управленческих и финансовых задач.

Практикум состоит из двадцати разделов, соответствующих двадцати заданиям: в каждом разделе приводятся необходимые для решения задач теоретические сведения и методические указания к выполнению заданий (с подробно разобранными примерами).

Основой организации самостоятельной работы студентов является индивидуализация заданий, поэтому каждая задача практикума представлена 35 вариантами исходных числовых данных, что позволяет предложить индивидуальное задание каждому студенту учебной группы.

Каждое задание практикума предполагает построение математической модели, ее анализ с использованием ручных вычислений, компьютерную проверку решения (в пособии приводятся подробные сведения о компьютерной реализации изучаемых методов оптимизации в пакете Microsoft Excel) и содержательную экономическую интерпретацию полученных результатов.

В зависимости от специфики вуза и специальности преподаватель может использовать практикум полностью или частично. Так, студентам специальности 080801 «Математические методы в экономике» целесообразно выполнить практикум полностью в рамках курсового проекта по дисциплине «Математические методы и модели исследования операций», а студентам специальности 080600 «Статистика» — в рамках курсового проекта по дисциплине «Методы оптимизации». Самостоятельная работа студентов специальностей 080102 «Мировая экономика», 080103 «Национальная экономика», 080111 «Маркетинг», 080507 «Менеджмент организации» и других прикладных экономических и управленческих специальностей может быть организована в форме выполнения части заданий практикума, составляющих курсовой проект, семестровое домашнее задание, типовой расчет, лабораторную или расчетно-графическую работу по разделу «Математические методы принятия решений в экономике» дисциплины «Математика». На ряде специальностей, таких как 080105 «Финансы и кредит», 080109 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 080503 «Антикризисное управление», 080506 «Логистика и управление цепями поставок», 220601 «Управление инновациями» и др., Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования в дополнение к учебной дисциплине «Математика» предусмотрены также такие дисциплины, как «Экономико-математические методы», «Системный анализ и принятие решений», «Финансовая математика» и т. п. — часть заданий практикума может быть использована и в преподавании экономико-математических и финансово-математических дисциплин.

Работа авторов над пособием разделилась следующим образом: предисловие написано В. А. Колемаевым и В. И. Соловьевым, ими же осуществлена общая редакция пособия; разделы 1, 2, 4, 8 и 10 написаны совместно И. С. Карандаевым и В. И. Соловьевым; раздел 3 написан совместно Т. М. Гатауллиным и В. И. Соловьевым; разделы 5, 19 и 20 написаны В. И. Соловьевым; разделы 6 и 7 написаны И. С. Карандаевым; разделы 9, 11—13 и 16 написаны совместно В. И. Малыхиным и В. И. Соловьевым; разделы 14, 15, 17 и 18 написаны совместно В. А. Колемаевым, В. И. Малыхиным и В. И. Соловьевым.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам: заведующему кафедрой математики и информационных технологий Московской академии предпринимательства при Правительстве г. Москвы, доктору физико-математических наук, профессору В. И. Быкову, заведующему кафедрой высшей математики Московского энергетического института, доктору физико-математических наук, профессору И. М. Петрушко и профессору кафедры прикладной математики Государственного университета управления, доктору физико-математических наук В. В. Шмелеву.

Авторы также благодарны преподавателям кафедры прикладной математики ГУУ, которые участвовали в подготовке исходных числовых данных для заданий практикума: кандидату физико-математических наук, доценту Ю. Г. Прохорову и старшему преподавателю Х. Х. Юнисову.

1. Линейная производственная задача

1.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Задача планирования производства состоит в отыскании такого плана производства

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

который позволяет получить максимальную прибыль

$$z = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1.1.1}$$

при ограничениях по заданным ресурсам

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.1.2}$$

где по смыслу задачи

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1.3}$$

Исходные данные задачи представляются в виде матрицы **A** удельных затрат ресурсов, вектора **b** объемов ресурсов и вектора **c** удельной прибыли:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}.$$

По оптимальному плану производства некоторые ресурсы используются полностью (назовем их *дефицитными*), а другие ресурсы избыточны. Более того, различные виды ресурсов в процессе производства оказываются неравноценными в том смысле, что незначительное увеличение объема одного дефицитного ресурса может сильно повлиять на получаемую прибыль, а такое же увеличение объема другого дефицитного ресурса повлияет значительно меньше.

В рамках модели линейного программирования предприятия должна существовать внутренняя система оценки ресурсов, используемых им в процессе производства. Эти оценки связаны с технологическими особенностями данного производственного процесса, характеризуемыми технологической матрицей **A**, со структурой и количеством ресурсов, отпущенных для производственного потребления, описываемых вектором **b**, а также со структурой внешних цен, на основе которых получается вектор прибылей **c**. Условимся называть эти оценки *расчетными оценками ресурсов*. Подчеркнем, что расчетную оценку единицы ресурса не следует отождествлять с той ценой, по которой предприятие приобретало этот ресурс. Последняя отражает общественно необходимые затраты на производство единицы ресурса и определяется рынком, а расчетная оценка показывает только сравнительную ценность этого ресурса на данном предприятии в данных конкретных условиях.

Как определить расчетные оценки ресурсов? Обозначим через y_i оценку единицы i-го вида ресурса, т. е.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \text{ —}$$

вектор оценок ресурсов.

Суммарная оценка всех ресурсов представляется в виде $b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m$. Эта сумма должна быть минимальной при условии, что на производство единицы продукции j-го вида мы должны затратить различные виды ресурсов в количествах $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$, и их суммарная оценка, равная $a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \cdots + a_{mj} y_m$, должна быть не меньше той прибыли, которую мы получим от реализации единицы готовой продукции.

Таким образом, мы пришли к новой задаче линейного программирования: найти вектор оценок ресурсов

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

минимизирующий суммарную оценку всех ресурсов

$$f = (\mathbf{b}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i \to \min \tag{1.1.4}$$

при условиях

$$(\mathbf{a}^j, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1.5}$$

где по смыслу задачи

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.1.6}$$

Полученная задача линейного программирования (1.1.4)—(1.1.6) называется **двойственной задачей** к задаче (1.1.1)—(1.1.3). Расчетные оценки ресурсов, соответствующие оптимальному плану производства, служат компонентами оптимального решения двойственной задачи. Поэтому каждую из компонент y_i оптимального решения двойственной задачи называют *двойственной оценкой i-го ресурса.*

Приведем краткую сводку основных результатов теории двойственности.

Первая основная теорема двойственности. *Если одна из задач двойственной пары имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения линейных форм равны; если же линейная форма одной из задач не ограничена, то система условий другой задачи противоречива.*

Экономическое содержание первой основной теоремы двойственности линейного программирования таково. В терминах оценок она может быть сформулирована следующим образом: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения минимальных оценок ресурсов, причем цена продукта, полученного реализацией оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой имеющихся ресурсов.

Вторая основная теорема двойственности (теорема о дополняющей нежесткости). *Для того, чтобы допустимые решения*

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_m^* \end{pmatrix}$$

пары двойственных задач являлись оптимальными решениями этих задач, необходимо и достаточно выполнение условий

$$y_j^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.1.7}$$

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1.8}$$

т. е. если какое-либо неравенство системы ограничений одной из задач не обращается в точное равенство оптимальным решением этой задачи, то соответствующая компонента оптимального решения двойственной задачи должна равняться нулю; если же какая-либо компонента оптимального решения одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задаче ее оптимальным решением должно обращаться в точное равенство. Другими словами, если $y_i^* > 0$ для некоторого i, то

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i, \tag{1.1.7'}$$

а если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$, то

$$y_i^* = 0; \tag{1.1.7''}$$

если $x_j^* > 0$ для некоторого j, то

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j, \tag{1.1.8'}$$

а если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > 0$, то

$$x_j^* = 0; \tag{1.1.8''}$$

Рассмотрим **экономическое содержание** второй теоремы двойственности. Для этого обратимся последовательно к утверждениям (1.1.7')—(1.1.7'') и (1.1.8')—(1.1.8''). Утверждения (1.1.7') и (1.1.7'') можно истолковать следующим образом.

Если по оптимальному плану производства ($\mathbf{x}^*$) расход i-го ресурса $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*$ строго меньше его запаса b_i:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i,$$

то оценка y_i^* единицы этого ресурса равна нулю:

$$y_i^* = 0;$$

если же оценка i-го ресурса строго больше нуля:

$$y_i^* > 0,$$

то расход этого ресурса равен его запасу:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i.$$

Таким образом, оценки оптимального плана выступают как мера дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс, полностью используемый по оптимальному плану производства, имеет положительную оценку, а недефицитный ресурс, не полностью используемый, имеет нулевую оценку.

Условия (1.1.8') и (1.1.8'') можно истолковать так. Если оценка $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$ ресурсов, расходуемых по j-й технологии в единицу времени, строго больше цены продукта, производимого по той же технологии за то же время

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j,$$

то j-я технология не применяется:

$$x_j^* = 0;$$

если же по некоторому оптимальному плану производства j-я технология применяется, т. е.

$$x_j^* > 0,$$

то оценка ресурсов, расходуемых по этой технологии в единицу времени, равна цене произведенного за единицу времени по той же технологии продукта:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j.$$

Таким образом, оценки оптимального плана выступают как инструмент определения эффективности отдельных технологических способов. Данный способ производства используется в том и только в том случае, когда при его реализации оценка затраченных ресурсов и цена полученной продукции совпадают.

Пусть теперь рассматривается задача линейного программирования:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

и двойственная ей задача:

$$f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где переменные $y_1, y_2, \dots, y_m$ могут принимать значения любого знака.

Будем считать, что в исходной задаче величины a_{ij} и c_j остаются неизменными, а правые части b_i системы ограничений подвергаются некоторым изменениям. Тогда каждому вектору

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

ограничений будет отвечать свое оптимальное решение (если оно существует) и максимальное значение $z_{\max}$ функции цели, т. е.

$$z_{\max} = z_{\max}(b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Тесная связь между решениями пары двойственных задач линейного программирования состоит также и в том, что характер изменения величины $z_{\max}$ можно определить с помощью компонент оптимального решения двойственной задачи.

Третья основная теорема двойственности (теорема об оценках влияния ресурсов на выпуск продукции). *Значения переменных y_i^* в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния правых частей b_i системы ограничений исходной задачи на величину максимума ее целевой функции*

$$\frac{\partial z_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*,$$

т. е. увеличение правой части i-го ограничения приводит к увеличению или уменьшению $z_{\max}$ в зависимости от того, будет ли y_i^* положительным или отрицательным, и при этом скорость изменения $z_{\max}$ определяется величиной $|y_i^*|$.

Остается указать на **экономическое содержание** третьей теоремы двойственности; оно очевидно. Двойственная оценка ресурса — это приращение прибыли, приходящееся на единицу приращения этого ресурса. Заметим, что здесь речь идет лишь о достаточно малых приращениях ресурсов, так как изменение величины b_i в некоторый момент вызовет изменение оценок y_i. Оценки позволяют выявить направление мероприятий по расшивке узких мест производства, обеспечивающих получение наибольшего экономического эффекта.

Пример 1.1.1. Предприятие может выпускать четыре вида продукции, используя для этого три вида ресурсов. Известна технологическая матрица **A** затрат каждого из ресурсов на единицу каждой продукции, вектор **b** объемов ресурсов и вектор **c** удельной прибыли на единицу каждой продукции:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 208 \\ 107 \\ 181 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = (36\ \ 14\ \ 25\ \ 50).$$

Требуется определить производственную программу, обеспечивающую предприятию наибольшую прибыль при имеющихся ограниченных ресурсах.

Решение. Математическая модель задачи такова: *требуется найти производственную программу*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

максимизирующую прибыль

$$z = 36x_1 + 14x_2 + 25x_3 + 50x_4$$

при ограничениях по ресурсам

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leqslant 208, \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad\quad + 2x_4 \leqslant 107, \\ 3x_1 + \ x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leqslant 181, \end{cases}$$

где по смыслу задачи

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 .$$

Получили задачу на условный экстремум. Для ее решения систему неравенств при помощи дополнительных неотрицательных неизвестных x_5, x_6, x_7 заменим системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 \qquad\qquad = 208, \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad\quad + 2x_4 \qquad + x_6 \qquad = 107, \\ 3x_1 + x_2 \ \ + 2x_3 + 2x_4 \qquad\qquad + x_7 = 181, \end{cases}$$

в которой дополнительные переменные x_5, x_6 и x_7 имеют смысл остатков ресурсов (соответственно первого, второго и третьего вида). Среди всех решений системы уравнений, удовлетворяющих условиям неотрицательности

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0, x_6 \geqslant 0, x_7 \geqslant 0 ,$$

нужно найти то решение, при котором целевая функция примет наибольшее значение.

Воспользуемся тем, что правые части всех уравнений системы неотрицательны, а сама система имеет предпочитаемый вид — дополнительные переменные являются базисными. Поэтому можно применить симплексный метод. Процесс решения записан в виде последовательности симплексных таблиц (табл. 1.1.1).

Подчеркнем, что за каждой симплексной таблицей надо видеть вспомогательную систему четырех линейных уравнений, из которых первые три представляют некоторый предпочитаемый эквивалент системы условий задачи и определяют соответствующее базисное допустимое решение, а из последнего уравнения получается выражение функции цели через свободные неизвестные. Как видно из последней симплексной таблицы, оптимальной является производственная программа $x_1 = 27$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 20$, обеспечивающая предприятию наибольшую прибыль $z_{max} = 1972$; при этом остаток ресурса первого вида $x_5 = 0$, второго вида $x_6 = 13$, третьего вида $x_7 = 0$.

Следует обратить внимание на экономический смысл элементов последней строки симплексной таблицы. Оценочные коэффициенты Δ_1, Δ_2, Δ_3 и Δ_4 имеют смысл *оценок технологий* и показывают, насколько уменьшится прибыль, если произвести единицу соответствующей продукции. Например, коэффициент $\Delta_3 = 7$ при переменной x_3 показывает, что если произвести одну единицу продукции третьего вида (она не входит в оптимальную производственную программу), то прибыль уменьшится на 7 единиц.

Таблица 1.1.1

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	36	14	25	50	0	0	0	Пояснения
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	208	4	3	4	5	1	0	0	$z_0=(\tilde{\mathbf{c}},\mathbf{h}),\ \Delta_j=(\tilde{\mathbf{c}},\mathbf{g}_j)-c_j,\ j=1,2,\dots,n;$
0	x_6	107	2	5	0	2	0	1	0	
0	x_7	181	3	1	2	5	0	0	1	$\min(\Delta_j<0)=-50,\ \min\left(\dfrac{b_i}{a_{i4}>0}\right)=\dfrac{181}{5}$
	z_0-z	$0-z$	−36	−14	−25	−50	0	0	0	
0	x_5	27	1	2	2	0	1	0	−1	$\min(-6;-4;-5)=-6,$
0	x_6	173/5	4/5	23/5	−4/5	0	0	1	−2/5	$\min\left(\dfrac{27}{1};\dfrac{173/5}{4/5};\dfrac{181/5}{3/5}\right)=\dfrac{27}{1}$
50	x_4	181/5	3/5	1/5	2/5	1	0	0	1/5	
	z_0-z	$1810-z$	−6	−4	−5	0	0	0	10	
36	x_1	27	1	2	2	0	1	0	−1	все $\Delta_j \geqslant 0,\ j=1,2,\dots,n$
0	x_6	13	0	3	−12/5	0	−4/5	1	2/5	
50	x_4	20	0	−1	−4/5	1	−3/5	0	4/5	
	z_0-z	$1972-z$	0	8	7	0	6	0	4	

Оставшиеся коэффициенты Δ_5, Δ_6 и Δ_7 имеют смысл двойственных оценок ресурсов и показывают, насколько возрастет прибыль, если первоначальные запасы соответствующего ресурса увеличить на единицу. Так, увеличение на единицу запаса первого ресурса приведет к увеличению прибыли на $\Delta_5 = 6$ единиц.

Двойственные оценки представляют собой оптимальное решение задачи, двойственной к исходной задаче планирования производства: это такие внутренние цены y_1, y_2, y_3, что суммарная внутренняя стоимость всех имеющихся ресурсов минимальна при условии, что внутренняя стоимость ресурсов, из которых можно изготовить единицу продукции каждого вида, не меньше той цены, по которой единицу соответствующей продукции можно продать на рынке.

Для производства единицы продукции первого вида мы должны затратить, как видно из матрицы $\mathbf{A}$, 4 единицы ресурса первого вида, 2 единицы ресурса второго вида и 3 единицы третьего (элементы первого столбца матрицы). В ценах y_1, y_2, y_3 наши затраты составят $4y_1+2y_2+3y_3$. При реализации единицы первой продукции на рынке мы получили бы прибыль 36 руб. Следовательно, внутренняя оценка стоимости ресурсов, из которых можно изготовить единицу первого продукта $(4y_1+2y_2+3y_3)$, должна составлять не менее 36 руб. Аналогичные условия должны выполняться и для всех остальных видов продукции.

При этом суммарная оценка всех имеющихся ресурсов $208y_1+107y_2+181y_3$ должна быть минимальной.

Окончательно двойственная задача формулируется так: *требуется найти вектор двойственных оценок*

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

минимизирующий общую оценку всех ресурсов

$$f = 208y_1 + 107y_2 + 181y_3$$

при условии, что по каждому виду продукции суммарная оценка всех ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции, не меньше прибыли, получаемой от реализации единицы этой продукции:

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geqslant 36, \\ 3y_1 + 5y_2 + y_3 \geqslant 14, \\ 4y_1 + 2y_3 \geqslant 25, \\ 5y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geqslant 50, \end{cases}$$

причем оценки ресурсов не могут быть отрицательными:

$$y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0\,.$$

Запишем в т о р у ю о с н о в н у ю т е о р е м у д в о й с т в е н н о с т и для этой задачи:

$$\begin{aligned} y_1(4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 208) &= 0, \\ y_2(2x_1 + 5x_2 + 2x_4 - 107) &= 0, \\ y_3(3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 181) &= 0, \\ x_1(4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 36) &= 0, \\ x_2(3y_1 + 5y_2 + y_3 - 14) &= 0, \\ x_3(4y_1 + 2y_3 - 25) &= 0, \\ x_4(5y_1 + 2y_2 + 5y_3 - 50) &= 0 \end{aligned}$$

и подставим в эти уравнения уже известную оптимальную производственную программу $x_1 = 27$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 20$:

$$\begin{aligned} y_1(4\cdot 27 + 3\cdot 0 + 4\cdot 0 + 5\cdot 20 - 208) &= 0, & 27(4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 36) &= 0, \\ y_2(2\cdot 27 + 5\cdot 0 + 2\cdot 20 - 107) &= 0, & 0(3y_1 + 5y_2 + y_3 - 14) &= 0, \\ y_3(3\cdot 27 + 0 + 2\cdot 0 + 5\cdot 20 - 181) &= 0, & 0(4y_1 + 2y_3 - 25) &= 0, \\ & & 20(5y_1 + 2y_2 + 5y_3 - 50) &= 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} y_1(208 - 208) &= 0, & 27(4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 36) &= 0, \\ y_2(94 - 107) &= 0, & 0(3y_1 + 5y_2 + y_3 - 14) &= 0, \\ y_3(181 - 181) &= 0, & 0(4y_1 + 2y_3 - 25) &= 0, \\ & & 20(5y_1 + 2y_2 + 5y_3 - 50) &= 0. \end{aligned}$$

Второе из этих уравнений [$y_2(94 - 107) = 0$] означает, что поскольку второй ресурс используется не полностью (при выполнении оптимальной производственной программы расходуется 94 единицы из 107), его двойственная оценка $y_2 = 0$. Четвертое уравнение [$27(4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 36) = 0$] означает, что поскольку первый продукт входит в оптимальную производственную программу ($x_1 = 27$), то суммарная двойственная оценка ресурсов, из которых можно изготовить единицу продукта первого вида ($4y_1 + 2y_2 + 3y_3$) должна быть равна цене этого продукта (36 руб.). Из последнего уравнения следует, что поскольку четвертый продукт входит в оптимальную производственную программу ($x_4 = 20$), то суммарная двойственная оценка ресурсов, из которых можно изготовить единицу продукта четвертого вида ($5y_1 + 2y_2 + 5y_3$) должна быть равна цене этого продукта (50 руб.). Итак,

$$\begin{cases} \quad\quad y_2 \quad\quad\quad\quad = 0, \\ 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 36 = 0, \\ 5y_1 + 2y_2 + 5y_3 - 50 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим окончательно, что $y_2 = 6$, $y_2 = 0$, $y_2 = 4$.

Теперь получим решение этой же задачи в пакете Microsoft Excel. Введем исходные данные в рабочий лист Microsoft Excel, как показано на рис. 1.1.1, *а*: в ячейки A5:D7 введем элементы технологической матрицы **A**, в ячейки A2:D2 — элементы вектора удельной прибыли **c**, в в ячейки H5:H7 — запасы ресурсов (элементы вектора **b**). Ячейки A10:D10 отведем под компоненты плана производства $\mathbf{x}$, а в ячейках F2 и F5:F7 рассчитаем значения целевой функции $z = \sum_{j=1}^{4} c_j x_j$ и расходов ресурсов $\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j$ соответственно (формулы Microsoft Excel приведены на рис. 1.1.1, *а*, а результат их ввода в рабочий лист — на рис. 1.1.1, *б*).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**c**					*z*		
2	36	14	25	50		=СУММПРОИЗВ(A2:D2;$A$10:$D$10)		
3								
4	**A**					*расходы ресурсов*		**b**
5	4	3	4	5		=СУММПРОИЗВ(A5:D5;$A$10:$D$10)		208
6	2	6	0	2		=СУММПРОИЗВ(A6:D6;$A$10:$D$10)		107
7	3	1	2	5		=СУММПРОИЗВ(A7:D7;$A$10:$D$10)		181
8								
9	$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$							
10								

а) формулы Microsoft Excel

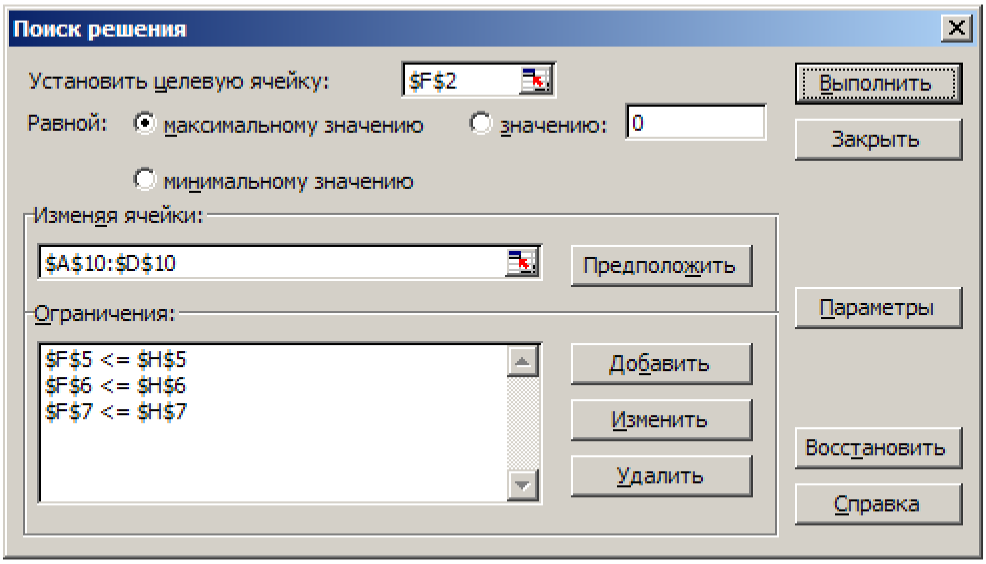
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**c**					*z*		
2	36	14	25	50		0		
3								
4	**A**					*расходы ресурсов*		**b**
5	4	3	4	5		0		208
6	2	6	0	2		0		107
7	3	1	2	5		0		181
8								
9	$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$							
10								

б) результат ввода формул

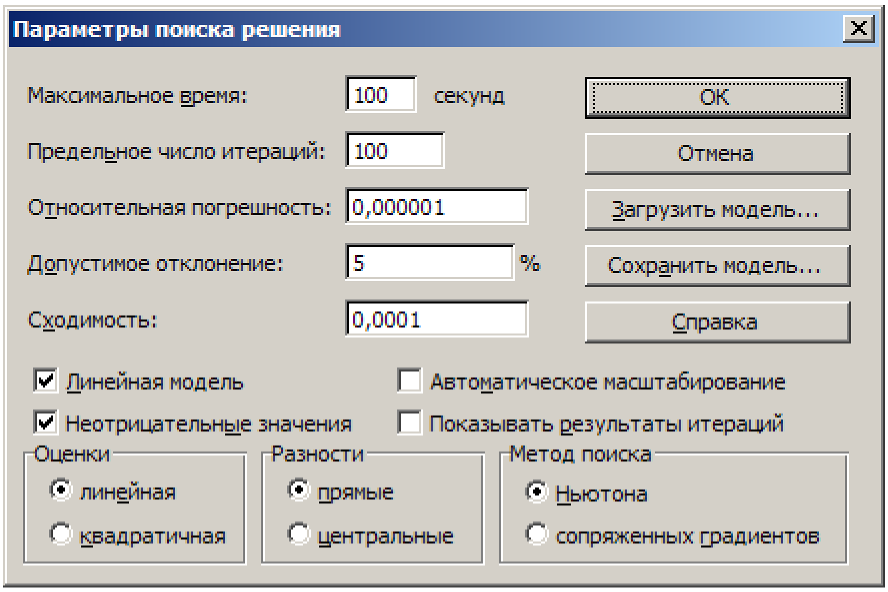
Рис. 1.1.1. *Исходные данные для решения задачи линейного программирования с помощью надстройки «Поиск решения»*

Запустим надстройку «**Поиск решения**» пакета **Microsoft Excel** (меню «**Сервис | Поиск решения**»; если такой пункт в меню **Microsoft Excel** отсутствует, то это означает, что надстройка «**Поиск решения**» не установлена. Чтобы ее установить, необходимо отметить флажок «**Поиск решения**» в списке надстроек пакета **Microsoft Excel**, который вызывается с помощью выбора пункта меню «**Сервис | Надстройки**».).

В появившемся диалоговом окне (рис. 1.1.2, *а*) укажем, что целевая функция рассчитывается в ячейке **$F$2**, переменные задачи находятся в ячейках **$A$10:$D$10**. С помощью кнопки «**Добавить**» добавим ограничения, состоящие в том, что расходы ресурсов не могут быть больше их запасов (**$F$5<=$H$5; $F$6<=$H$6; $F$7<=$H$7**). Здесь можно указывать не только любые ограничения вида «равно», «больше либо равно», «меньше либо равно», но также условия целочисленности или двоичности переменных (нуль или единица).



а) окно ввода данных



б) окно ввода параметров

Рис. 1.1.2. *Ввод данных в надстройку «Поиск решения»*

Надстройка «**Поиск решения**» позволяет решать не только задачи линейного программирования, но и другие задачи математического программирования с произвольным видом целевой функции и системы ограничений. Алгоритмы решения различных задач отличаются, и при больших размерностях задачи линейного программирования требуют для решения существенно меньше машинного времени, чем задачи нелинейного программирования.

Для указания того, что модель является линейной, необходимо войти в диалоговое окно «**Параметры поиска решения**» (нажав соответствующую кнопку) и установить флажок «**Линейная модель**». В этом же окне укажем, что переменные задачи неотрицательны, установив флажок «**Неотрицательные значения**» (рис. 1.1.2, *б*).

В появившемся по окончании вычислений диалоговом окне «**Результаты поиска решения**» следует указать необходимость вывода отчетов по результатам, по устойчивости и по пределам (рис. 1.1.3).

В результате работы программы (рис. 1.1.4, *а*) в соответствующих ячейках исходного рабочего листа рассчитаны: оптимальный план производства $x_1 = 27$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 20$, максимальная прибыль $z_{\max} = 1972$ и расходы ресурсов 208, 94, 181.

Кроме того, в рабочей книге появятся три новых листа: «**Отчет по результатам**» (рис. 1.1.4, *б*), «**Отчет по устойчивости**» (рис. 1.1.4, *в*) и «**Отчет по пределам**» (рис. 1.1.4, *г*). На листе «**Отчет по результатам**» сохраняются результаты работы программы.

На листе «**Отчет по устойчивости**» в столбце «**Нормированная стоимость**» указаны величины, противоположные оценкам технологий, откуда $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 8$, $\Delta_3 = 7$, $\Delta_4 = 0$, в столбце «**Теневая цена**» приводятся двойственные оценки ресурсов: $y_1 = 6$, $y_2 = 0$, $y_3 = 4$.

Кроме того, столбцы «**Допустимое увеличение**» и «**Допустимое уменьшение**» в «**Отчете по устойчивости**» (рис. 1.1.2, *в*) показывают, насколько можно увеличить или уменьшить коэффициенты целевой функции (т. е. цены продукции) и правые части ограничений (т. е. запасы ресурсов), чтобы структура оптимального плана производства не изменилась, т. е. чтобы в оптимальный план входили те же виды продукции, что и в данном решении (в нашем случае — первый и четвертый виды).

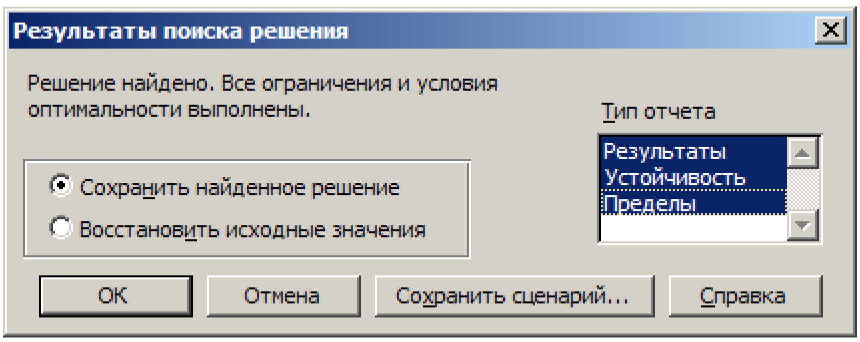


Рис. 1.1.3. *Список отчетов, предлагаемых в результатах работы надстройки «Поиск решения»*

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		c				*z*		
2	36	14	25	50		1972		
3								
4		A				*расходы ресурсов*		b
5	4	3	4	5		208		208
6	2	6	0	2		94		107
7	3	1	2	5		181		181
8								
9		$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$						
10	27	0	0	20				

а)

Microsoft Excel 8.0a Отчет по результатам

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$I$3	*z*	1972	1972

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$B$11	$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$	27	27
$C$11		0	0
$D$11		0	0
$E$11		20	20

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$I$6	*расходы ресурсов*	208	$I$6<=$G$6	связанное	0
$I$7	*расходы ресурсов*	94	$I$7<=$G$7	не связан.	13
$I$8	*расходы ресурсов*	181	$I$8<=$G$8	связанное	0
$B$11	$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$	27	$B$11>=0	не связан.	27
$C$11		0	$C$11>=0	связанное	0
$D$11		0	$D$11>=0	связанное	0
$E$11		20	$E$11>=0	не связан.	20

б)

Microsoft Excel 8.0a Отчет по устойчивости

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$B$11	$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$	27	0	36	4	3,5
$C$11		0	–8,00	14	7,99	1E+30
$D$11		0	–7,00	25	7,00	1E+30
$E$11		20	0	50	8,00	5

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Ограничение Правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$I$6	*расходы ресурсов*	208	6	208	16,25	27
$I$7	*расходы ресурсов*	94	0	107	1E+30	13
$I$8	*расходы ресурсов*	181	4	181	27	25

в)

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$F$2	*z*	1972

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$A$10	$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$	27	0	1000	27	1972
$B$10		0	0	1972	0	1972
$C$10		0	0	1972	0	1972
$D$10		20	0	972	20	1972

б)

Рис. 1.1.4. *Результаты решения задачи линейного программирования с помощью надстройки «Поиск решения»*

При этом, например, число 1E+30 означает $+\infty$, т. е. цены не выпускающейся продукции второго и третьего вида можно сколь угодно уменьшать, а запас второго избыточного ресурса сколь угодно увеличивать, при этом оптимальный план производства не изменится.

Компьютерное решение совпало с решением, полученным вручную.

Предлагаем студенту самостоятельно прокомментировать содержание «Отчета по пределам». ❑

1.2. Задание практикума

Предприятие может выпускать четыре вида продукции, используя для этого три вида ресурсов. Известны технологическая матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

затрат ресурсов на производство единицы каждого вида продукции [элемент a_{ij} этой матрицы равен количеству ресурса i-го вида ($i = 1, 2, 3$), которое необходимо затратить в процессе производства единицы продукции j-го вида ($j = 1, 2, 3, 4$)], вектор

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

объемов ресурсов и вектор

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

удельной прибыли на единицу продукции. Исходные данные для каждого варианта компактно записаны в табл. 1.2.1 в следующем виде.

c_1	c_2	c_3	c_4	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3

Требуется составить производственную программу, обеспечивающую предприятию наибольшую прибыль с учетом ограниченности запасов ресурсов.

Для этого необходимо обсудить экономическое содержание линейной производственной задачи и сформулировать ее математическую модель, преобразовать данную задачу к виду основной задачи линейного программирования, решить ее симплексным методом, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса, найти оптимальную производственную программу, максимальную прибыль, остатки ресурсов различных видов и определить узкие места производства (дефицитные ресурсы).

Затем требуется сформулировать задачу, двойственную линейной производственной задаче, обсудить ее экономическое содержание и записать математическую модель, после чего найти решение двойственной задачи, пользуясь второй основной теоремой двойственности, обосновав экономический смысл этой теоремы.

Указать оптимальную производственную программу и оценки технологий, максимальную прибыль и минимальную суммарную оценку всех ресурсов, остатки и двойственные оценки ресурсов и обсудить экономический смысл всех этих величин.

После этого необходимо с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel проверить правильность решения задачи и, кроме того, определить границы, в которых могут изменяться коэффициенты целевой функции, в пределах которых не изменяется ассортимент выпускаемой продукции, и границы, в которых могут изменяться правые части ограничений, в пределах которых сохраняется устойчивость двойственных оценок.

Таблица 1.2.1

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
1	45 60 21 14 3 6 3 0 180 6 2 0 6 210 2 3 5 7 112	9	48 30 29 10 3 2 4 3 198 2 3 1 2 96 6 5 1 0 228	17	60 12 44 17 4 2 4 1 180 4 0 2 2 160 2 4 3 0 109
2	30 11 45 6 3 2 6 0 150 4 2 3 5 130 4 3 2 4 124	10	38 12 28 21 3 0 3 3 186 2 3 1 1 102 4 3 2 2 196	18	16 18 14 12 4 3 0 6 192 0 1 5 0 24 1 2 4 3 90
3	35 41 22 12 2 2 3 4 151 3 1 0 2 156 1 4 4 0 162	11	30 28 9 23 1 0 2 5 110 3 6 0 4 126 2 4 1 3 114	19	24 20 31 10 3 0 2 5 162 3 6 0 3 134 2 4 3 1 148
4	59 27 20 35 1 3 2 2 102 3 2 0 3 204 4 2 3 1 188	12	27 39 18 20 2 1 6 5 140 0 3 0 4 90 3 2 4 0 198	20	34 20 8 23 2 0 2 3 142 1 5 4 2 100 3 4 0 1 122
5	34 32 28 36 2 4 5 3 128 3 0 4 1 130 3 5 0 2 142	13	31 10 14 20 1 4 3 4 120 3 0 2 2 168 2 5 0 3 80	21	30 25 14 12 2 3 0 4 148 4 1 5 0 116 0 2 4 3 90
6	27 10 9 8 3 5 0 6 144 2 0 1 0 130 1 4 2 3 140	14	48 15 11 32 4 2 3 1 116 2 0 3 2 94 4 1 0 5 196	22	26 35 18 30 2 5 1 4 126 3 0 7 2 84 2 1 4 0 75
7	36 32 10 13 2 3 4 1 103 4 2 0 2 148 2 8 7 0 158	15	28 14 11 20 4 2 2 4 112 2 3 1 0 32 1 4 0 2 46	23	31 10 41 29 4 0 8 7 316 3 2 5 1 216 5 6 3 2 199
8	36 30 16 12 4 5 2 3 180 6 0 4 1 150 0 7 6 5 140	16	36 14 25 50 4 3 4 5 208 2 5 2 2 99 3 1 2 5 181	24	42 28 17 19 5 2 4 1 132 3 4 0 6 124 4 2 54 4 117

Окончание табл. 1.2.1

№ вар.	Исходные данные
25	8 21 17 36 8 5 6 2 100 1 0 1 4 80 2 7 3 0 70
26	31 16 18 8 5 7 1 8 140 8 3 0 1 60 0 4 6 2 100
27	18 19 8 5 3 2 0 3 168 0 1 4 2 60 1 3 5 0 112
28	44 28 78 23 4 1 6 3 288 7 3 1 2 240 2 4 5 1 200
29	45 33 30 42 4 9 8 1 220 5 2 3 0 200 0 3 1 6 216
30	21 16 32 18 2 6 1 8 220 3 1 0 2 240 0 2 4 1 200
31	15 16 52 13 2 2 2 1 250 1 0 4 3 220 7 3 0 5 240
32	50 27 34 54 5 4 6 7 275 2 0 4 2 100 3 2 0 1 85
33	48 33 16 22 6 3 1 4 252 2 4 5 1 144 1 2 4 3 80
34	35 10 54 40 9 8 4 2 176 3 1 6 0 180 2 1 0 8 200
35	13 24 17 25 9 2 8 1 70 1 4 1 0 96 2 0 3 5 80

2. Задача о расшивке узких мест производства

2.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

При выполнении оптимальной производственной программы может оказаться так, что некоторые ресурсы расходуются полностью. Говорят, что такие ресурсы образуют *узкие места производства*. Наличие узких мест в силу неустойчивости решения задач линейного программирования может привести к тому, что потеря достаточно малого количества некоторого ресурса, имеющего сравнительно низкую стоимость (относительно суммарной прибыли) может привести к тому, что оптимальное значение прибыли уменьшится намного сильнее, чем на стоимость потерянного ресурса. Рассмотрим тривиальный пример.

Пример 2.1.1. Предприятие собирает автомобили из готовых узлов и агрегатов. Для изготовления одного автомобиля требуется один кузов с подвеской (в сборе), один двигатель и четыре колеса. Производство одного автомобиля приносит предприятию чистую прибыль 50 тыс. руб. В наличии у предприятия имеется 2 кузова, 2 двигателя и 8 колес. Требуется определить, какие убытки принесет предприятию потеря (в результате хищения) одного колеса (стоимостью 2 тыс. руб.).

Решение. Казалось бы, убытки предприятия равны 2 тыс. руб. Но это не так! Из 2 кузовов, 2 двигателей и 8 колес предприятие могло изготовить 2 автомобиля и получить прибыль 100 тыс. руб. После утраты колеса предприятие может собрать только 1 автомобиль и получить прибыль в 2 раза меньше — всего 50 тыс. руб. Конечно, недостающее колесо можно приобрести, но это требует времени, которое предприятию придется простаивать... Итак, если колесо можно купить мгновенно, то убытки предприятия составляют 2 тыс. руб., если колесо купить вообще невозможно, то убытки предприятия составят 50 тыс. руб., а в общем случае убытки равны стоимости простоя предприятия в течение того времени, которое занимает закупка колеса). ❑

Будем р а с ш и в а т ь узкие места производства, т. е. закажем дополнительно те ресурсы, которые полностью используются при выполнении оптимальной производственной программы. Пусть

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \text{ —}$$

это вектор дополнительных объемов ресурсов.

При этом вектор запасов ресурсов изменится от $\mathbf{b}$ до $(\mathbf{b} + \mathbf{t})$, а производственная программа — от

$$\mathbf{h} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$$

до

$$\mathbf{h}_{\text{нов}} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{t}) \qquad (2.1.1)$$

(здесь $\mathbf{Q}^{-1}$ — это обращенный базис, т. е. матрица коэффициентов в последнем предпочитаемом эквиваленте системы ограничений, стоящих при неизвестных, которые были базисными в исходном предпочитаемом эквиваленте).

Прирост прибыли, связанный с вовлечением в производство t_1 дополнительных единиц первого ресурса, t_2 — второго, ..., t_m — m-го, равен

$$w = (\mathbf{y}, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{m} y_i t_i \,,$$

так как двойственные оценки этих ресурсов (y_1, y_2, ..., y_m) показывают, насколько увеличится прибыль при добавлении к имеющимся запасам единицы соответствующего ресурса. Естественно этот прирост прибыли максимизировать.

При этом, вообще говоря, двойственные оценки могут изменяться. Чтобы они не изменялись, необходимо и достаточно, чтобы новое решение, получаемое по правилу (2.1.1), осталось допустимым (т. е. неотрицательным, поскольку всем ограничениям по ресурсам оно будет удовлетворять). Итак, условие устойчивости двойственных оценок таково:

$$\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{t}) \geqslant \mathbf{0}\,.$$

Преобразуем левую часть:

$$\mathbf{h}_{\text{нов}} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{t}) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{t} = \mathbf{h} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{t}\,.$$

Окончательно получаем **условие устойчивости двойственных оценок**:

$$\mathbf{h} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{t} \geqslant \mathbf{0}\,. \tag{2.1.2}$$

Кроме того, как правило, производитель не может получить неограниченно много ресурсов, т. е. все компоненты вектора $\mathbf{t}$ ограничены.

В общем случае расшивка узких мест производства позволяет максимально задействовать имеющийся потенциал предприятия по производству данной продукции по данным технологиям в условиях существующих цен.

Пример 2.1.2. Решить задачу о расшивке узких мест производства в условиях примера 1.1.1 при условии, что поставщики не могут поставить дополнительно более трети от первоначальных запасов ресурсов.

Решение. При выполнении оптимальной производственной программы в условиях примера 1.1.1 первый и третий ресурсы используются полностью, т. е. образуют узкие места производства. Будем их заказывать дополнительно. Пусть

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ t_3 \end{pmatrix} \text{ —}$$

это вектор дополнительных объемов ресурсов.

При этом вектор запасов ресурсов изменится от

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 208 \\ 107 \\ 181 \end{pmatrix}$$

до

$$\mathbf{b} + \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 208 + t_1 \\ 107 \\ 181 + t_3 \end{pmatrix}.$$

Производственная программа, содержащаяся в последней симплексной таблице, выразится через новый вектор запасов ресурсов при помощи обращенного базиса

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4/5 & 1 & 2/5 \\ -3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

следующим образом:

$$\mathbf{h}_{\text{нов}} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{t}).$$

Прирост прибыли, связанный с вовлечением в производство t_1 дополнительных единиц первого ресурса и t_3 — третьего, равен

$$w = 6t_1 + 4t_3, \tag{2.1.3}$$

так как двойственные оценки этих ресурсов ($y_1 = 6$ и $y_3 = 4$) показывают, насколько увеличится прибыль при добавлении к имеющимся запасам единицу соответствующего ресурса.

При этом, вообще говоря, двойственные оценки могут изменяться. Чтобы они не изменялись, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие устойчивости двойственных оценок (2.1.2):

$$\mathbf{h} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{t} \geqslant \mathbf{0}$$

или

$$\begin{pmatrix} 27 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4/5 & 1 & 2/5 \\ -3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ t_3 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получаем:

$$\begin{cases} -t_1 \quad +t_3 \leqslant 27, \\ \dfrac{4}{5}t_1 \quad -\dfrac{2}{5}t_3 \leqslant 13, \\ \dfrac{3}{5}t_1 \quad -\dfrac{4}{3}t_3 \leqslant 20. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Условие, которое состоит в том, что производитель не может получить более трети первоначальных запасов ресурсов, запишется как

$$\mathbf{t} \leqslant \frac{1}{3}\mathbf{b}$$

или

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ t_3 \end{pmatrix} \leqslant \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 208 \\ 107 \\ 181 \end{pmatrix}.$$

В скалярной форме последнее условие запишется так:

$$\begin{cases} t_1 \leqslant \dfrac{208}{3}, \\ t_3 \leqslant \dfrac{181}{3}. \end{cases} \qquad (2.1.5)$$

Таким образом, задача о расшивке узких мест производства формулируется следующим образом: *требуется максимизировать дополнительный прирост прибыли* (2.1.3), *связанный с вовлечением в производство $t_1 \geqslant 0$ дополнительных единиц первого ресурса и $t_3 \geqslant 0$ — третьего, при выполнении условия устойчивости двойственных оценок* (2.1.4) *и условия* (2.1.5), означающего, что невозможно заказать дополнительно более трети первоначальных запасов ресурсов.

Окончательно задача о расшивке узких мест производства запишется так:

$$w = 6t_1 + 4t_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -t_1 & +t_3 & \leqslant 27, \\ \dfrac{4}{5}t_1 & -\dfrac{2}{5}t_3 & \leqslant 13, \\ \dfrac{3}{5}t_1 & -\dfrac{4}{3}t_3 & \leqslant 20, \\ t_1 & & \leqslant \dfrac{208}{3}, \\ & t_3 & \leqslant \dfrac{181}{3}, \end{cases} \qquad (2.1.6)$$

$$t_1 \geqslant 0, t_3 \geqslant 0.$$

Эту задачу легко решить графически: область допустимых решений задачи (2.1.6) заштрихована на рис. 2.1.1, и самая дальняя точка этой области в направлении, указываемом градиентом целевой функции

$$\operatorname{grad} w = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{—}$$

это точка M, которая задается пересечением прямых, задаваемых вторым и пятым из ограничений задачи:

$$\begin{cases} \frac{4}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_3 = 13, \\ t_3 = \frac{181}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, программа расшивки узких мест имеет вид

$$t_3 = \frac{181}{3} = 60\frac{1}{3},\ t_1 = \frac{5}{4}\left(13 + \frac{2}{5}t_3\right) = \frac{5}{4}\left(13 + \frac{2}{5}\cdot\frac{181}{3}\right) = \frac{557}{12} = 46\frac{5}{12}.\ \square$$

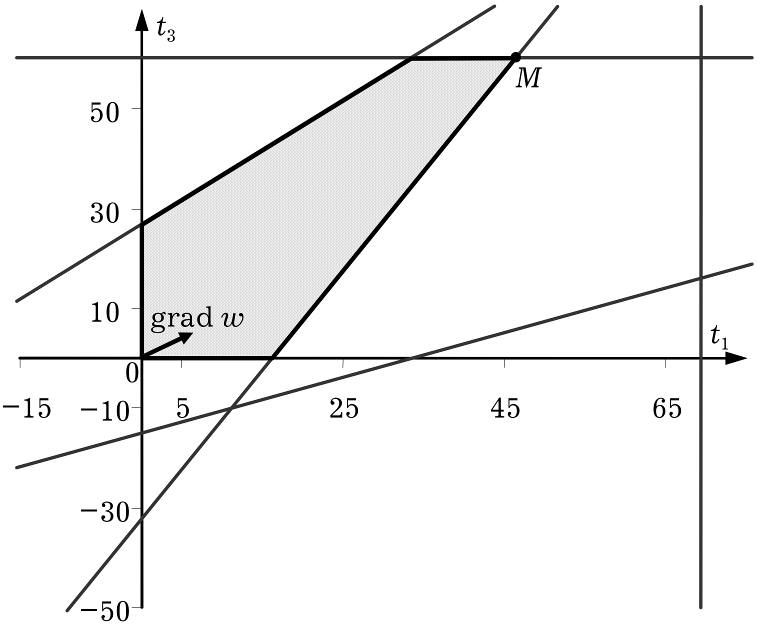


Рис. 2.1.1. *Графическое решение задачи о расшивке узких мест производства*

Решение оказалось нецелочисленным. Если речь идет о недельном плане производства, который будет действовать в течение предстоящего года, то это решение означает просто, что 5 из 12 недель нужно заказывать по 47 единиц третьего ресурса, а оставшиеся 7 недель — по 46 единиц.

Если же речь идет о плане на последнюю неделю года, то необходимо найти целочисленное решение задачи.

2.2. Задание практикума

При выполнении оптимальной производственной программы в линейной производственной задаче некоторые ресурсы расходуются полностью и образуют узкие места. Требуется определить план заказа дополнительных объемов этих ресурсов, обеспечивающий максимальный прирост прибыли предприятия при условии сохранения устойчивости двойственных оценок, если поставщики могут предоставить дополнительно не более трети от первоначальных запасов соответствующих ресурсов.

3. Целочисленное программирование

3.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Задачи математического программирования, в которых наряду с обычными ограничениями накладывается требование целочисленности всех или некоторых компонент решения, изучает раздел математического программирования, который называется **целочисленным программированием**.

С принципиальной точки зрения задача целочисленного программирования достаточно проста: для ее решения достаточно пронумеровать все целочисленные элементы множества допустимых решений и затем последовательно вычислять значения целевой функции в этих точках, запоминая на каждом шаге тот из уже проверенных элементов, для которого значение целевой функции было наибольшим (или наименьшим). Однако часто, особенно в экономических задачах, такая процедура практически нереализуема из-за очень большого или бесконечного числа элементов множества допустимых решений. Другой подход к решению этой задачи позволяет отбрасывать не отдельные точки, а достаточно большие подмножества заведомо неоптимальных элементов множества допустимых решений. Эта идея положена в основу алгоритмов, которые принято относить к **методу ветвей и границ**.

Рассмотрим применение метода ветвей и границ к решению следующей задачи целочисленного линейного программирования:

$$\begin{aligned} & p=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i=1,2,\dots,m, \\ & x_j^{\min} \leqslant x_j \leqslant x_j^{\max}, \quad j=1,2,\dots,n, \\ & x_j \in \mathbb{Z}, \qquad j=1,2,\dots,k\ (k \leqslant n). \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Здесь $x_j^{\min}$ и $x_j^{\max}$ — это конечные константы.

Если $k = n$, то задача называется полностью целочисленной, если же $k < n$, то частично целочисленной.

Суть метода ветвей и границ заключается в том, что оптимальное решение задачи (3.3.1) будет удовлетворять также одному и только одному из условий:

$$x_j \leqslant z_j,\ j=1,2,\dots,k \tag{3.1.2}$$

или

$$x_j \geqslant z_j,\ j=1,2,\dots,k\,, \tag{3.1.3}$$

где z_j — произвольное целое число из отрезка $[x_j^{\min}; x_j^{\max}]$.

Основная идея метода ветвей и границ — осуществить ветвление, т. е. разбить исходную задачу (3.1.1) на две другие задачи с дополнительными ограничениями соответственно вида (3.1.2) и (3.1.3) для какого-то l (от 1 до k) и решить каждую из них как обычную (непрерывную) задачу линейного программирования, игнорируя требование целочисленности. Этот процесс повторяется для различных l и z_l.

Выбор z_l можно осуществить следующим образом: если оптимальное решение задачи

$$
\begin{aligned}
&p = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, 2, ..., m, \\
&x_j^{\min} \leqslant x_j \leqslant x_j^{\max}, \quad j = 1, 2, ..., n,
\end{aligned} \tag{3.1.4}
$$

удовлетворяет условию целочисленности, то оно является и оптимальным решением задачи целочисленного программирования (3.1.1); в противном случае рассматривается одна из переменных x_l (из числа тех, на которые накладывается условие целочисленности, но которая в оптимальном решении

$$
\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_l^* \\ \vdots \\ x_{n-1}^* \\ x_n^* \end{pmatrix}
$$

задачи (3.3.3) принимает дробное значение).

На основе полученного решения обычной задачи (3.1.4) проводим ветвление, описываемое соотношениями вида (3.1.2), (3.1.3), — формируем две новые задачи:

$$
\begin{aligned}
&p = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, 2, ..., m, \\
&x_j^{\min} \leqslant x_j \leqslant x_j^{\max}, \quad j = 1, 2, ..., n, \\
&x_l \leqslant [x_l^*];
\end{aligned} \tag{3.1.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&p = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, 2, ..., m, \\
&x_j^{\min} \leqslant x_j \leqslant x_j^{\max}, \quad j = 1, 2, ..., n, \\
&x_l \geqslant [x_l^*] + 1.
\end{aligned} \tag{3.1.6}
$$

Далее мы решаем эти задачи и проверяем их оптимальные решения на целочисленность. Если они не удовлетворяют требованию целочисленности, то на основе каждой задачи составляются две новые (аналогично рассмотренным выше). При этом обычно ветвление начинают с наиболее «перспективной» задачи — с лучшим значением целевой функции. Последовательность получаемых таким образом задач образует древовидную структуру, пример которой показан на рис. 3.1.1.

При этом ограничения каждой из двух новых задач, полученных в результате ветвления по очередной переменной, включают ограничения родительской задачи и новое ограничение на эту переменную. Процесс ветвления продолжается до тех пор, пока не выполнится один из следующих **критериев окончания ветвления**.

1. Получена задача, не имеющая решения (это становится все более вероятным с увеличением числа ветвлений, когда все больше и больше ограничений вида (3.1.2) или (3.1.3) добавляется к уже существующим ограничениям, т. е. все более вероятной становится несовместность системы ограничений получаемых задач).

2. Получена задача с решением, удовлетворяющим условию целочисленности, т. е. все x_j ($j = 1, 2, ..., k$) имеют целочисленные значения. Тогда значение целевой функции данного решения сравнивается с верхним (нижним при минимизации) граничным значением $p_{\text{гр}}$. Граничное значение на первом шаге принимается равным $p_{\text{гр}} = -\infty$, если решается задача на максимум (и $p_{\text{гр}} = +\infty$ при решении задачи минимизации). Если полученное значение хуже граничного, то оно отбрасывается, а если лучше, то принимается за новое граничное значение (при решении задач на максимум «лучше» означает «больше», а «хуже» — «меньше»; при решении задач на минимум все наоборот). Так как в каждой новой задаче добавляется все больше верхних и нижних целочисленных ограничений на переменные, то непрерывные переменные рано или поздно примут целочисленные значения (если, конечно, целочисленное решение вообще существует).

3. Получена задача с нецелочисленным решением, значение целевой функции на котором хуже граничного (т. е. хуже, чем у наилучшего из числа найденных целочисленных решений). Добавление последующих ограничений посредством ветвления не поможет улучшить значение целевой функции, так что не имеет смысла продолжать ветвление этой задачи.

После окончания процесса ветвления оптимальным является такое целочисленное решение, для которого значение целевой функции будет наилучшим, т. е. совпадает с граничным.

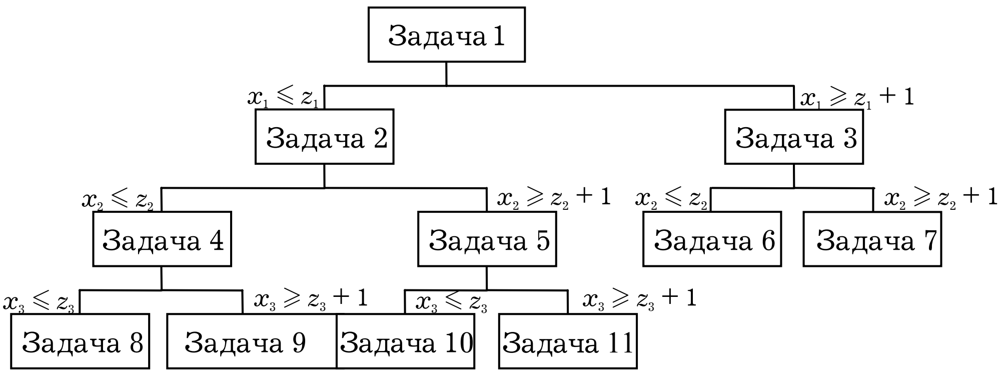


Рис. 3.1.1. *Древовидная структура последовательности задач в методе ветвей и границ*

Таким образом, для получения целочисленного решения методом ветвей и границ приходится решать большое количество обычных задач линейного программирования, причем в каждом очередном ветвлении число ограничений увеличивается на единицу. Поэтому время решения задачи целочисленного программирования по сравнению с непрерывной задачей значительно увеличивается. При этом, вообще говоря, оптимальное целочисленное решение для некоторых задач может быть получено в результате сравнения всех допустимых целочисленных решений.

Пример 3.1.1. Решить задачу о расшивке узких мест производства в условиях примера 1.1.1 при условии, что поставщики не могут поставить дополнительно более трети от первоначальных запасов ресурсов, причем все ресурсы делятся только поштучно.

Решение. В результате решения примера 2.1.2 получено нецелочисленное решение данной задачи: $t_1 = 557/12 = 46\frac{5}{12}$, $t_3 = 181/3 = 60\frac{1}{3}$.

Произведем ветвление по переменной t_1: получим две новые задачи:

$$w = 6t_1 + 4t_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} -t_1 + t_3 \leqslant 27, \\ \frac{4}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_3 \leqslant 13, \\ \frac{3}{5}t_1 - \frac{4}{3}t_3 \leqslant 20, \\ t_1 \leqslant \frac{208}{3}, \\ t_3 \leqslant \frac{181}{3}, \\ t_1 \leqslant 46, \end{cases} \tag{3.1.7}$$
$$t_1 \geqslant 0, t_3 \geqslant 0;$$

$$w = 6t_1 + 4t_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} -t_1 + t_3 \leqslant 27, \\ \frac{4}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_3 \leqslant 13, \\ \frac{3}{5}t_1 - \frac{4}{3}t_3 \leqslant 20, \\ t_1 \leqslant \frac{208}{3}, \\ t_3 \leqslant \frac{181}{3}, \\ t_1 \geqslant 47, \end{cases} \tag{3.1.8}$$
$$t_1 \geqslant 0, t_3 \geqslant 0.$$

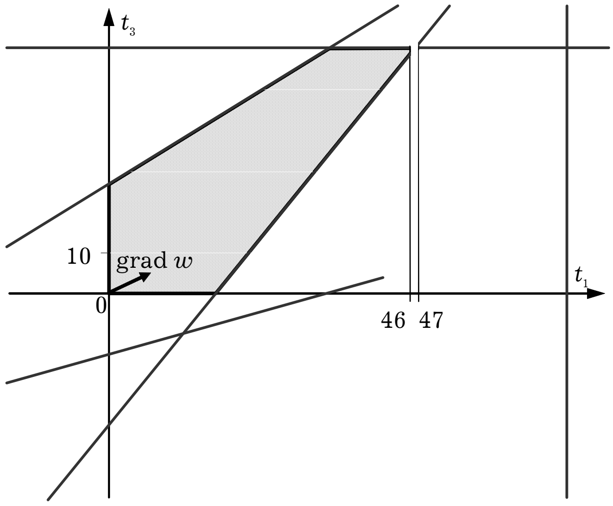
Это ветвление иллюстрируется рис. 3.1.2, *а*. Задача (3.1.7) имеет нецелочисленное оптимальное решение $t_1 = 46$, $t_3 = 181/3 = 60\frac{1}{3}$, а задача (3.1.8) не имеет решений (значит, эта ветвь метода ветвей и границ обрывается).

Произведем ветвление в задаче (3.1.7); оно проиллюстрировано рис. 3.1.2, *б*; получим две новые задачи:

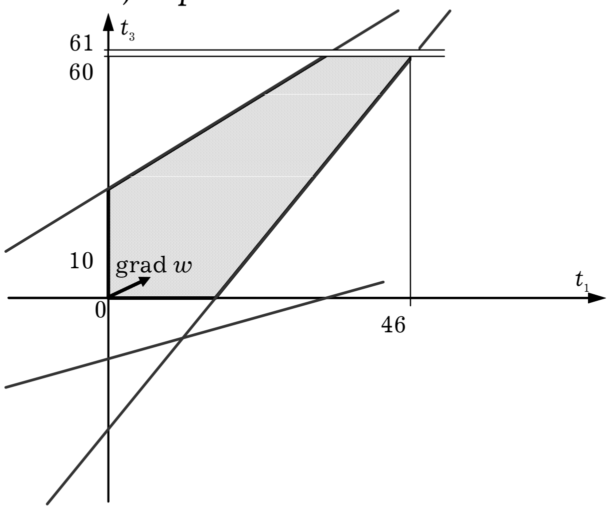
$$w = 6t_1 + 4t_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} -t_1 + t_3 \leqslant 27, \\ \frac{4}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_3 \leqslant 13, \\ \frac{3}{5}t_1 - \frac{4}{3}t_3 \leqslant 20, \\ t_1 \leqslant \frac{208}{3}, \\ t_3 \leqslant \frac{181}{3}, \\ t_1 \leqslant 46, \\ t_3 \leqslant 60, \end{cases} \tag{3.1.9}$$
$$t_1 \geqslant 0, t_3 \geqslant 0;$$

$$w = 6t_1 + 4t_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} -t_1 + t_3 \leqslant 27, \\ \frac{4}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_3 \leqslant 13, \\ \frac{3}{5}t_1 - \frac{4}{3}t_3 \leqslant 20, \\ t_1 \leqslant \frac{208}{3}, \\ t_3 \leqslant \frac{181}{3}, \\ t_1 \leqslant 46, \\ t_3 \geqslant 61, \end{cases} \tag{3.1.10}$$
$$t_1 \geqslant 0, t_3 \geqslant 0.$$

Задача (3.1.9) имеет целочисленное оптимальное решение $t_1 = 46$, $t_3 = 60$, а задача (3.1.10) не имеет решений (значит, эта ветвь обрывается).



а) первый шаг ветвления



б) второй шаг ветвления

Рис. 3.1.2. *Применение метода ветвей и границ к решению целочисленной задачи о расшивке узких мест производства*

Таким образом, получено оптимальное целочисленное решение задачи о расшивке узких мест производства: необходимо дополнительно получить 46 единиц первого ресурса и 60 единиц третьего. ❑

В данной задаче целочисленного программирования решение получено достаточно быстро и является тривиальным (округлением компонент оптимального решения сопутствующей нецелочисленной задачи). В задачах целочисленного программирования, вообще говоря, так бывает довольно редко.

3.2. Задания практикума

1. Целочисленная задача о расшивке узких мест производства. Если полученное решение задачи о расшивке узких мест производства оказалось не целочисленным, то требуется с помощью метода ветвей и границ найти целочисленное решение этой задачи.

2. Задача о комплектном плане. Решить задачу планирования производства в предположении, что продукция должна производиться комплектами: комплект первого типа состоит из двух единиц продукта первого вида и одной единицы продукта второго вида, комплект второго типа состоит из трех единиц продукта третьего вида и двух единиц продукта четвертого вида.

4. Транспортная задача линейного программирования

4.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Транспортная задача формулируется следующим образом. Однородный продукт, сосредоточенный в m пунктах производства (хранения) в количествах $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц, необходимо распределить между n пунктами потребления, которым необходимо соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц. Стоимость перевозки единицы продукта из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения равна c_{ij} и известна для всех маршрутов. Необходимо составить план перевозок, при котором запросы всех пунктов потребления были бы удовлетворены за счет имеющихся продуктов в пунктах производства и общие транспортные расходы по доставке продуктов были минимальны.

Если производство и потребление сбалансированы, т. е. суммарные запасы продукта у поставщиков равны суммарным запросам потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (4.1.1)$$

то такая транспортная задача называется *закрытой* или *замкнутой*. Если же суммарные запасы продукта у поставщиков строго больше или строго меньше, чем суммарные запросы потребителей, то такая задача называется *открытой*.

Для сведения открытой задачи к закрытой вводятся фиктивные пункты производства или потребления. Если суммарные запасы продукта у поставщиков строго больше, чем суммарные запросы потребителей, вводится фиктивный потребитель, запросы которого равны

$$\sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

если же суммарные запасы продукта у поставщиков строго больше, чем суммарные запросы потребителей, то вводится фиктивный поставщик, запас продукта у которого равен

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Обозначим через x_{ij} количество груза, планируемого к перевозке от i-го поставщика j-му потребителю. При наличии баланса производства и потребления (4.1.1) математическая модель транспортной задачи будет выглядеть так: *требуется найти план перевозок*

$$\mathbf{X} = (x_{ij}),\ i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

минимизирующий общую стоимость всех перевозок

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{4.1.2}$$

при условии, что из любого пункта производства вывозится весь продукт:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.1.3}$$

и любому потребителю доставляется необходимое количество груза:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{4.1.4}$$

причем по смыслу задачи

$$x_{11} \geqslant 0, x_{12} \geqslant 0, \ldots, x_{mn} \geqslant 0\,. \tag{4.1.5}$$

Таблица 4.1.1

Производство \ Потребление	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

Для решения транспортной задачи чаще всего применяется **метод потенциалов**, который состоит из шагов, на каждом из которых переходят по определенным правилам от одного базисного решения к другому и заполняют транспортную таблицу (табл. 4.1.1), строки которой соответствуют поставщикам (в заголовках строк указываются запасы продукта у поставщиков a_i), а столбцы соответствуют потребителям (в заголовках столбцов указываются запросы потребителей b_j). В клетки транспортной таблицы заносятся поставки продукта, перевозимого от соответствующего поставщика к соответствующему потребителю (x_{ij}). Кроме того, в правом верхнем углу каждой клетки указывается стоимость перевозки единицы продукта от соответствующего поставщика к соответствующему потребителю (c_{ij}).

Следует иметь в виду, что по любой транспортной таблице можно восстановить соответствующий предпочитаемый эквивалент системы уравнений (4.1.3)—(4.1.4), а в таблице записаны лишь правые части уравнений, причем номер клетки показывает, какая неизвестная в соответствующем уравнении является базисной. Так как в системе (4.1.3)—(4.1.4) ровно $(m+n-1)$ линейно независимых уравнений, то в любой транспортной таблице должно быть $(m+n-1)$ занятых клеток.

Первое базисное допустимое решение легко построить по **правилу северо-западного угла**. В соответствии с этим правилом, заполнение транспортной таблицы начинается с левой верхней клетки («северо-западного угла») и состоит из однотипных шагов, на каждом из которых из рассмотрения исключается один поставщик или один потребитель:

- если остаток продукта у i-го поставщика после предыдущих шагов меньше, чем неудовлетворенный запрос j-го потребителя, то исключается из рассмотрения i-й поставщик, и в клетку (i, j) заносится поставка x_{ij}, равная остатку продукта у i-го поставщика после предыдущих шагов;
- если остаток продукта у i-го поставщика после предыдущих шагов больше, чем неудовлетворенный запрос j-го потребителя, то исключается из рассмотрения j-й потребитель, и в клетку (i, j) заносится поставка x_{ij}, равная неудовлетворенному запросу j-го потребителя;
- если остаток продукта у i-го поставщика после предыдущих шагов равен неудовлетворенному запросу j-го потребителя, то исключается из рассмотрения или i-й поставщик, или j-й потребитель, и в клетку (i, j) заносится поставка $x_{ij} = 0$ равная остатку продукта у i-го поставщика после предыдущих шагов.

После этого рассматривается левая верхняя клетка среди тех, которые остаются после вычеркивания строк, соответствующих поставщикам, весь запас продукта у которых уже распределен по потребителям, и столбцов, соответствующих потребителям, запросы которых уже удовлетворены.

Каждому поставщику ставится в соответствие п о т е н ц и а л p_i, а каждому потребителю — п о т е н ц и а л q_j. При этом каждой клетке соответствует некоторая о ц е н к а

$$\Delta_{ij} = p_i + q_j - c_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.1.6}$$

Один из потенциалов можно выбрать произвольно, так как в системе (4.1.3)—(4.1.4) одно уравнение линейно зависит от остальных. Обычно полагают $p_1 = 0$. Остальные потенциалы вычисляются из условия, что для базисных клеток $\Delta_{ij} = 0$.

Затем по формуле (4.1.6) вычисляются оценки всех свободных клеток.

Если хотя бы одна из оценок строго положительна, то базисное допустимое решение, содержащееся в данной транспортной таблице, не является оптимальным. Выбирается свободная клетка (r, s), соответствующая наибольшей положительной оценке

$$\Delta_{rs} = \max(\Delta_{ij} > 0).$$

Для выбранной свободной клетки (r, s) строится *цикл пересчета* — замкнутая ломаная, одна из вершин которой находится в данной свободной клетке, а все остальные — в занятых клетках, соседние звенья взаимно перпендикулярны, сами звенья параллельны строкам и столбцам таблицы. Можно доказать, что цикл пересчета всегда существует и состоит из четного числа вершин.

Клетка (r, s) помечается знаком «плюс», далее соседние вершины цикла пересчета помечаются по очереди знаками «минус», «плюс». Выбирается минимальная из поставок, отмеченных знаком «минус» (ρ_{max}), и к поставкам, отмеченным знаком «плюс», добавляется ρ_{max}, а из поставок отмеченных знаком «минус», вычитается ρ_{max}. Так производится перераспределение поставок вдоль цикла пересчета, при котором происходит такой **переход к новому базисному допустимому решению**, что в клетку (r, s), соответствующую наибольшей положительной оценке Δ_{rs}, поставляется максимально возможное количество продукта ρ_{max}. При этом от всех поставщиков продукт полностью вывозится, и запросы всех потребителей полностью удовлетворяются.

Заполняется новая транспортная таблица, вычисляются новые потенциалы и оценки клеток и т. д.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена транспортная таблица (и соответствующий план перевозок), для которой все

$$\Delta_{ij} \leqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Соответствующее последней транспортной таблице базисное решение является оптимальным.

Отметим, что для вычисления потенциалов необходимо $(m + n - 1)$ уравнений (4.1.6), т. е. на каждом шаге метода потенциалов число занятых клеток должно сохраняться.

Если на каком-либо шаге перераспределение поставок вдоль цикла пересчета приводит к освобождению более чем одной клетки, все освободившиеся клетки, за исключением одной (не важно, какой), нужно по-прежнему считать занятыми. Для того в эти клетки вместо поставки вписывается число нуль, и эти клетки с фиктивными поставками участвуют в вычислении потенциалов наравне с другими.

План перевозок, содержащий фиктивные поставки, называется *вырожденным.* При следующем перераспределении перемещаться будут как раз нулевые, вырожденные поставки, и план перевозок фактически не изменится. Но при этом изменится набор занятых клеток, изменятся потенциалы и оценки свободных клеток, и решение можно будет продолжать.

В заключение обсудим **экономический смысл** оценок клеток и потенциалов.

Оценка свободной клетки Δ_{ij} показывает, насколько уменьшатся суммарные расходы по перевозке груза, если поставить единицу груза от i-го производителя j-му потребителю (перераспределив остальные поставки так, чтобы сохранился баланс по строкам и столбцам).

Потенциалы же интерпретируются следующим образом. Каждый производитель уплачивает перевозчику одну и ту же цену p_i за вывоз единицы груза (не важно, какому потребителю этот груз достанется); каждый потребитель уплачивает перевозчику одну и ту же цену q_j за получение единицы груза (не важно, от какого производителя этот груз доставлен); сумма цен, взимаемых при этом с любой пары «производитель – потребитель», не превосходит реальной стоимости перевозки единицы груза от данного производителя к данному потребителю:

$$p_i + q_j \leqslant c_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,m, \; j = 1,2,\ldots,n. \tag{4.1.7}$$

При этом и производители, и потребители не заплатят перевозчику больше, чем реальные транспортные расходы, потому перевозчик может установить цены так, чтобы максимизировать свою прибыль:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i p_i + \sum_{j=1}^{n} b_j q_j \to \max \tag{4.1.8}$$

при условиях (4.1.7).

Переменные p_i и q_j при этом могут быть как положительными, так и отрицательными: не исключено, что перевозчик платит определенному производителю за право перевозить его продукцию (или потребителю — за право доставлять ему продукцию):

$$p_i, q_j \in \mathbb{R}.$$

Задача максимизации функции (4.1.8) при условиях (4.1.7) и произвольных вещественных значениях переменных p_i и q_j является двойственной к транспортной задача (4.1.2)—(4.1.5), и приведенная экономическая интерпретации оценок клеток и потенциалов основана на теоремах двойственности.

В реальных условиях p_i и q_j — это не цены, а надбавки к основному тарифу перевозчика, единому для всех производителей и потребителей.

Пример 4.1.1. Однородный продукт, сосредоточенный на трех складах в количествах a_1, a_2, a_3 единиц, необходимо распределить между четырьмя потребителями, которым необходимо соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 единиц.

Стоимость перевозки единицы продукта из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения равна c_{ij} и известна для всех маршрутов.

Векторы **a**, **b** и матрица **C** таковы:

$$\mathbf{a}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 60 \\ 63 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \;\; b_4) = (41 \;\; 50 \;\; 44 \;\; 30), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить план перевозок, при котором запросы всех потребителей были бы удовлетворены за счет имеющегося на складах объема продукции, так чтобы общие транспортные расходы по доставке продукции были минимальны.

Решение. Составим математическую модель транспортной задачи при заданном векторе объемов производства **a**, векторе потребления **b** и матрице транспортных издержек **C** и решим эту транспортную задачу методом потенциалов.

Общий объем производства $\sum_{i=1}^{3} a_i = 54 + 60 + 63 = 177$ больше, чем суммарные запросы всех потребителей $\sum_{j=1}^{4} b_j = 41 + 50 + 44 + 30 = 165$, т. е. мы имеем открытую модель транспортной задачи. Для превращения ее в закрытую введем фиктивный пункт потребления с объемом потребления $177-165=12$ единиц, причем тарифы на перевозку в этот пункт условимся считать равными нулю, помня, что переменные, добавляемые к левым частям неравенств для превращения их в уравнения, входят в функцию цели с нулевыми коэффициентами.

Первое базисное допустимое решение построим по правилу северо-западного угла (табл. 4.1.2).

Таблица 4.1.2

Производство \ Потребление	$b_1=41$	$b_2=50$	$b_3=44$	$b_4=30$	$b_5=12$	
$a_1=54$	1 41 −	4 13 +	3	2	0	$p_1=0$
$a_2=60$	3	6 37 −	2 23 +	5	0	$p_2=2$
$a_3=63$	2 * +	5	6 21 −	7 30	0 12	$p_3=6$
	$q_1=1$	$q_2=4$	$q_3=0$	$q_4=1$	$q_5=-6$	

Положим $p_1=0$ и найдем остальные потенциалы из условия, что для базисных клеток $\Delta_{ij}=0$:

$$\Delta_{11}=0,\ p_1+q_1-c_{11}=0,\quad 0+q_1-1=0,\quad q_1=1,$$
$$\Delta_{12}=0,\ p_1+q_2-c_{12}=0,\quad 0+q_2-4=0,\ q_2=4,$$
$$\Delta_{22}=0,\ p_2+q_2-c_{22}=0,\quad p_2+4-6=0,\ p_2=2,$$

и т. д. В результате получим: $q_3=0, p_3=6, q_4=1, q_5=-6$.

Затем по формуле (4.1.6) вычислим оценки всех свободных клеток:

$$\Delta_{13}=p_1+q_3-c_{13}=0+0-3=-3,\quad \Delta_{14}=p_1+q_4-c_{14}=0+1-2=-1,$$
$$\Delta_{15}=p_1+q_5-c_{15}=0-6-0=-6,\ \Delta_{21}=p_2+q_1-c_{21}=2+1-3=0,$$
$$\Delta_{24}=-2,\ \Delta_{25}=-4,\ \Delta_{31}=5,\ \Delta_{32}=5.$$

Находим наибольшую положительную оценку:

$$\max(\Delta_{ij}>0)=5=\Delta_{31}.$$

Для найденной свободной клетки (3, 1) построим цикл пересчета:

(3, 1) — (1, 1) — (1, 2) — (2, 2) — (2, 3) — (3, 3).

Производим перераспределение поставок вдоль цикла пересчета ($\rho_{\max}=21$):

41	13	
	37	23
		21

41 − ρ	13 + ρ	
	37 − ρ	23 + ρ
ρ		21 − ρ

20	34	
	16	44
21		

Получаем второе базисное допустимое решение (табл. 4.1.3).

Таблица 4.1.3

Потребление / Производство	$b_1 = 41$	$b_2 = 50$	$b_3 = 44$	$b_4 = 30$	$b_5 = 12$	
$a_1 = 54$	$\boxed{1}$ 20 −	$\boxed{4}$ 34	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ * +	$\boxed{0}$	$p_1 = 0$
$a_2 = 60$	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$ 16	$\boxed{2}$ 44	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$p_2 = 2$
$a_3 = 63$	$\boxed{2}$ 21 +	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$ 30 −	$\boxed{0}$ 12	$p_3 = 1$
	$q_1 = 1$	$q_2 = 4$	$q_3 = 0$	$q_4 = 6$	$q_5 = -1$	

Находим новые потенциалы, новые оценки. Наибольшую положительную оценку будет иметь свободная клетка (1, 4). Для нее строим цикл пересчета

(1, 4) — (1, 1) — (3, 1) — (3, 4),

производим перераспределение ($\rho_{\max} = 20$):

20	
21	30

20 − ρ	ρ
21 + ρ	30 − ρ

	20
41	10

и получаем третье базисное допустимое решение. Продолжаем процесс дальше (табл. 4.1.4—4.1.6).

Таблица 4.1.4

Потребление / Производство	$b_1 = 41$	$b_2 = 50$	$b_3 = 44$	$b_4 = 30$	$b_5 = 12$	
$a_1 = 54$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$ 34 −	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 20 +	$\boxed{0}$	$p_1 = 0$
$a_2 = 60$	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$ 16	$\boxed{2}$ 44	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$p_2 = 2$
$a_3 = 63$	$\boxed{2}$ 41	$\boxed{5}$ * +	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$ 10 −	$\boxed{0}$ 12	$p_3 = 5$
	$q_1 = -3$	$q_2 = 4$	$q_3 = 0$	$q_4 = 2$	$q_5 = -5$	

Таблица 4.1.5

Производство \ Потребление	$b_1 = 41$	$b_2 = 50$	$b_3 = 44$	$b_4 = 30$	$b_5 = 12$	
$a_1 = 54$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$ 24	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 30	$\boxed{0}$	$p_1 = 0$
$a_2 = 60$	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$ 16 −	$\boxed{2}$ 44	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$ * +	$p_2 = 2$
$a_3 = 63$	$\boxed{2}$ 41	$\boxed{5}$ 10 +	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{0}$ 12 −	$p_3 = 1$
	$q_1 = 0$	$q_2 = 4$	$q_3 = 0$	$q_4 = 2$	$q_5 = -1$	

Таблица 4.1.6

Производство \ Потребление	$b_1 = 41$	$b_2 = 50$	$b_3 = 44$	$b_4 = 30$	$b_5 = 12$	
$a_1 = 54$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$ 24	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 30	$\boxed{0}$	$p_1 = 0$
$a_2 = 60$	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{2}$ 44	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$ 12	$p_2 = 2$
$a_3 = 63$	$\boxed{2}$ 41	$\boxed{5}$ 22	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{0}$	$p_3 = 1$
	$q_1 = 1$	$q_2 = 4$	$q_3 = 0$	$q_4 = 2$	$q_5 = -2$	

В табл. 4.1.6 $\Delta_{11} = 0$, $\Delta_{13} = -3$, $\Delta_{15} = -2$, $\Delta_{21} = 0$, $\Delta_{24} = -1$, $\Delta_{33} = -5$, $\Delta_{34} = -4$, $\Delta_{35} = -2$. Поскольку все оценки неположительны, базисное допустимое решение

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 24 & 0 & 30 \\ 0 & 4 & 44 & 0 \\ 41 & 22 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является оптимальным. ❑

4.2. Задание практикума

Однородный продукт, сосредоточенный на трех складах фирмы в количествах a_1, a_2, a_3 единиц, необходимо распределить между четырьмя магазинами, которым необходимо соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 единиц продукта. Стоимость перевозки единицы продукта из i-го пункта отправления ($i = 1, 2, 3$) в j-й пункт назначения ($j = 1, 2, 3, 4$) равна c_{ij} и известна для всех маршрутов.

Вектор запасов продукта на складах

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

вектор запросов продукта магазинами

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

и матрица транспортных тарифов

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$

известны и для каждого варианта компактно записаны в табл. 4.2.1 в следующем виде.

$$\begin{array}{ccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ a_2 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ a_3 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{array}$$

Требуется определить оптимальный план перевозок, при котором запросы магазинов были бы удовлетворены в наибольшей степени за счет имеющегося на складах количества продукта, и при этом обязательно были бы удовлетворены запросы первого магазина, а общие транспортные расходы по доставке продукта были минимальны.

Для этого необходимо составить математическую модель транспортной задачи, преобразовать ее к закрытой форме путем введения фиктивного поставщика или потребителя и найти решение этой задачи с помощью метода потенциалов, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса.

Затем нужно найти решение транспортной задачи в случае, если от первого поставщика ко второму потребителю должна быть доставлена ровно одна единица продукции, а поставки от второго поставщика третьему потребителю запрещены.

После этого необходимо сравнить решения для двух рассмотренных случаев (с дополнительными ограничениями и без), указав оптимальные планы перевозок, минимальные транспортные расходы, потенциалы поставщиков и потребителей, оценки клеток и обсудить экономический смысл всех этих величин.

Таблица 4.2.1

№ вар.	Исходные данные					№ вар.	Исходные данные					№ вар.	Исходные данные				
1		45	60	21	24	2		30	11	45	36	3		35	41	52	32
	50	3	6	3	1		50	3	2	6	7		70	2	2	3	2
	70	6	2	1	6		70	7	8	3	5		80	4	1	5	2
	40	10	3	5	7		30	4	3	4	6		47	6	4	6	3

Окончание табл. 4.2.1

№ вар.	Исходные данные					№ вар.	Исходные данные					№ вар.	Исходные данные				
4		59	27	40	35	15		38	42	28	41	26		28	44	31	20
	45	1	3	2	2		60	3	2	4	3		50	4	2	2	6
	55	3	2	4	3		50	5	3	1	4		40	5	3	2	7
	70	4	2	3	1		48	4	3	6	1		42	2	1	4	2
5		34	32	4	36	16		30	58	32	43	27		60	32	44	57
	60	2	4	5	3		65	1	3	2	5		50	3	2	4	1
	50	3	7	4	1		40	4	6	5	9		90	4	6	5	2
	48	4	6	6	2		70	2	4	1	3		60	9	4	10	6
6		27	20	39	42	17		37	39	48	40	28		46	48	44	42
	35	3	5	3	6		70	2	1	6	5		70	4	3	7	6
	60	5	6	1	7		40	5	3	7	6		90	3	1	2	4
	40	1	4	2	3		60	3	2	4	2		33	1	2	4	3
7		30	55	44	42	18		31	40	44	20	29		24	20	31	40
	35	2	3	6	4		45	1	4	3	4		30	1	2	2	5
	55	4	1	5	7		50	3	4	2	2		45	3	1	3	2
	80	5	2	3	3		53	4	5	6	3		52	2	4	3	1
8		56	35	48	30	19		48	59	68	75	30		34	40	38	53
	60	2	5	1	4		90	3	2	6	3		80	2	7	2	3
	50	4	4	3	2		80	5	1	4	1		60	1	5	4	2
	70	6	5	4	3		92	5	4	5	4		30	3	4	6	1
9		31	40	41	49	20		44	28	78	23	31		50	27	34	54
	45	4	5	8	6		40	4	10	6	3		70	5	4	6	7
	60	3	2	5	1		60	7	3	1	2		50	7	3	4	2
	65	5	6	3	2		80	2	6	5	1		54	3	2	5	1
10		42	35	27	28	21		36	44	25	50	32		42	28	47	9
	58	3	5	3	2		55	4	3	4	5		50	5	2	9	8
	40	4	2	1	3		60	8	5	3	2		90	5	4	7	6
	45	6	3	2	4		48	9	8	2	5		35	6	3	8	7
11		26	48	25	22	22		59	33	34	20	33		48	33	56	22
	40	3	6	1	5		70	2	5	4	1		60	2	3	2	4
	45	2	4	3	1		30	7	3	2	7		70	3	4	3	5
	50	7	11	5	3		50	8	10	2	5		35	4	3	4	3
12		31	40	41	49	23		23	41	22	20	34		44	58	62	24
	45	4	5	8	6		30	4	2	5	9		90	3	4	5	1
	60	3	2	5	1		40	8	3	1	8		60	4	3	1	3
	65	5	6	3	2		45	7	3	7	6		50	3	5	2	2
13		36	32	40	53	24		36	44	25	50	35		21	43	46	59
	40	2	3	4	1		55	4	3	4	5		80	2	1	6	12
	60	4	2	1	2		60	8	5	3	2		50	9	3	5	4
	70	2	7	7	1		48	9	8	2	5		45	1	4	8	7
14		48	30	29	40	25		48	75	41	32						
	40	3	6	4	3		90	4	1	3	1						
	45	2	3	1	3		75	4	1	3	2						
	70	6	5	1	4		40	5	2	3	5						

5. Нелинейное программирование

5.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Функция $f(\mathbf{x})$ называется *выпуклой вверх* на множестве $\mathcal{X}$, если для любых $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathcal{X}$ и любых $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\lambda\mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2\right) \geqslant \lambda f(\mathbf{x}^1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}^2).$$

Функция $f(\mathbf{x})$ называется *выпуклой вниз* на множестве $\mathcal{X}$, если для любых $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathcal{X}$ и любых $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\lambda\mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2\right) \geqslant \lambda f(\mathbf{x}^1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}^2).$$

Задача выпуклого программирования формулируется так. Требуется найти вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, доставляющий выпуклой вверх дифференцируемой функции

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.1.1}$$

максимум на множестве допустимых решений, заданных ограничениями

$$\varphi_i(\mathbf{x}) \leqslant b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.1.2}$$

к которых все $\varphi_i(\mathbf{x})$ — выпуклые вниз дифференцируемые функции ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Приведем краткую сводку основных результатов теории выпуклого программирования.

Функцией Лагранжа задачи выпуклого программирования (5.1.1)—(5.1.2) называется функция

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \left(\mathbf{y}, \mathbf{b} - \varphi(\mathbf{x})\right) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i\left(b_i - \varphi_i(\mathbf{x})\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \tag{5.1.3}$$

при этом координаты $y_1, y_1, \ldots, y_m$ вектора

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

называется *множителями Лагранжа* для задачи выпуклого программирования (5.1.1)—(5.1.2).

Если в задаче (5.1.1)—(5.1.2) $f(\mathbf{x})$ выпукла вверх, а все $\varphi_i(\mathbf{x})$ выпуклы вниз ($i = 1, 2, \ldots, m$), то, очевидно, функция Лагранжа (5.1.3) выпукла вверх по $\mathbf{x}$, а по $\mathbf{y}$ она является и выпуклой вверх, и выпуклой вниз. Действительно, пусть $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0;1]$. Тогда

$$L(\lambda\mathbf{x}^1+(1-\lambda)\mathbf{x}^2,\mathbf{y})=\underbrace{f\left(\lambda\mathbf{x}^1+(1-\lambda)\mathbf{x}^2\right)}_{\geqslant\lambda f(\mathbf{x}^1)+(1-\lambda)f(\mathbf{x}^2)}+\sum_{i=1}^{m}\underbrace{y_i\left(b_i-\underbrace{\varphi_i(\lambda\mathbf{x}^1+(1-\lambda)\mathbf{x}^2)}_{\leqslant\lambda\varphi_i(\mathbf{x}^1)+(1-\lambda)\varphi_i(\mathbf{x}^2)}\right)}_{\geqslant y_i\left(b_i-\lambda\varphi_i(\mathbf{x}^1)-(1-\lambda)\varphi_i(\mathbf{x}^2)\right)}\geqslant$$

$$\geqslant\lambda f(\mathbf{x}^1)+(1-\lambda)f(\mathbf{x}^2)+\sum_{i=1}^{m}y_i\left(\underbrace{[\lambda+(1-\lambda)]}_{=1}b_i-\lambda\varphi_i(\mathbf{x}^1)-(1-\lambda)\varphi_i(\mathbf{x}^2)\right)=$$

$$=\lambda f(\mathbf{x}^1)+\lambda\sum_{i=1}^{m}y_i\left(b_i-\varphi_i(\mathbf{x}^1)\right)+(1-\lambda)f(\mathbf{x}^2)+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}y_i\left(b_i-\varphi_i(\mathbf{x}^2)\right)=$$

$$=\lambda L(\mathbf{x}^1,\mathbf{y})+(1-\lambda)L(\mathbf{x}^2,\mathbf{y})$$

Если теперь $\mathbf{y}^1,\mathbf{y}^2\in\mathbb{R}^m$, $\lambda\in[0;1]$, то

$$L(\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}^1+(1-\lambda)\mathbf{y}^2)=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda\mathbf{y}_i^1+(1-\lambda)y_i^2\right)\left(b_i-\varphi_i(\mathbf{x}^1)\right)=$$

$$=\underbrace{\left(\lambda+(1-\lambda)\right)}_{=1}f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda\mathbf{y}_i^1\left(b_i-\varphi_i(\mathbf{x}^1)\right)+\sum_{i=1}^{m}(1-\lambda)y_i^2\left(b_i-\varphi_i(\mathbf{x}^1)\right)=$$

$$=\lambda f(\mathbf{x})+\lambda\sum_{i=1}^{m}\mathbf{y}_i^1\left(b_i-\varphi_i(\mathbf{x}^1)\right)+(1-\lambda)f(\mathbf{x})+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}y_i^2\left(b_i-\varphi_i(\mathbf{x}^1)\right)=$$

$$=\lambda L(\mathbf{x},\mathbf{y}^1)+(1-\lambda)L(\mathbf{x},\mathbf{y}^2)$$

Говорят, что задача выпуклого программирования (5.1.1)—(5.1.2) удовлетворяет *условию регулярности*, если существует хотя бы одна *внутренняя точка* множества допустимых решений, определяемого неравенствами (5.1.2) [т. е. такая точка $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, что $\varphi_i(\mathbf{x})<b_i$ $(i=1, 2, ..., m)$].

Точка $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)\in\mathbb{R}^{n+m}$ $(\mathbf{x}^*\in\mathbb{R}^n,\mathbf{y}^*\in\mathbb{R}_+^m)$ называется *седловой точкой* функции $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$, если для всех $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\mathbf{y}\in\mathbb{R}_+^m$

$$L(\mathbf{x},\mathbf{y}^*)\leqslant L(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)\leqslant L(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}). \tag{5.1.4}$$

Теорема Куна — Таккера. *Если задача выпуклого программирования (5.1.1)—(5.1.2) удовлетворяет условию регулярности, то точка* $\mathbf{x}^*\in\mathbb{R}^n$ *является оптимальным решением этой задачи тогда и только тогда, когда существует такой вектор*

$$\mathbf{y}^*=\begin{pmatrix}y_1^*\\y_2^*\\\vdots\\y_m^*\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_+^m$$

с неотрицательными координатами, что точка $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)\in\mathbb{R}^{n+m}$ *является седловой точкой функции Лагранжа данной задачи.*

Условия Куна — Таккера в дифференциальной форме. *Если функция Лагранжа* $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *является выпуклой вверх по* $\mathbf{x}$, *выпуклой вниз по* $\mathbf{y}$ *и не-*

прерывно дифференцируемой по всем x_j $(j = 1, 2, ..., n)$ *и* y_i $(i = 1, 2, ..., m)$, *то для того чтобы пара* $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^m_+$ *была седловой точкой функции Лагранжа* $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$\left.\frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial x_j}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}^*}} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.1.5}$$

$$\left.\frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial y_i}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}^*}} \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.1.6}$$

$$y_i^* \left.\frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial y_i}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}^*}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.1.7}$$

$$y_i^* \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.1.8}$$

Пример 5.1.1. Для задачи квадратичного программирования

$$f(\mathbf{x}) = -(x_1 - 8)^2 - (x_2 - 8)^2 \to \max, \tag{5.1.9}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqslant 15, \\ \ x_1 + x_2 \leqslant 10, \end{cases} \tag{5.1.10}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \tag{5.1.11}$$

проверить выполнение условия регулярности, и если оно выполняется, составить функцию Лагранжа, записать условия Куна — Таккера в дифференциальной форме и найти оптимальное решение задачи как точку, удовлетворяющую условиям Куна — Таккера.

Решение. Очевидно, условие регулярности выполняется, поскольку, например, точка

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

является внутренней точкой множества допустимых решений — все ограничения в этой точке выполняются как строгие неравенства:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 8 < 15, \\ 1 + 8 < 10, \\ 1 > 0, \\ 8 > 0. \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа (5.1.3):

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(x_1 - 8)^2 - (x_2 - 8)^2 + y_1(15 - 3x_1 - x_2) + y_2(10 - x_1 - x_2) + y_3 x_1 + y_4 x_2.$$

Здесь мы учли, в том числе, и ограничения (5.1.11), которые преобразовали к такому виду: $-x_1 \leqslant 0, -x_2 \leqslant 0$.

Производные функции Лагранжа равны

$$\frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial x_1} = -2(x_1-8) - 3y_1 - y_2 + y_3, \qquad \frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial x_2} = -2(x_2-8) - y_1 - y_2 + y_4,$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial y_1} = 15 - 3x_1 - x_2, \quad \frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial y_2} = 10 - x_1 - x_2, \quad \frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial y_3} = x_1, \quad \frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial y_4} = x_2.$$

Условия Куна — Таккера в дифференциальной форме (5.1.5)—(5.1.8) запишутся в виде (5.1.5')—(5.1.8'):

$$\begin{cases} -2(x_1-8) - 3y_1 - y_2 + y_3 = 0, \\ -2(x_2-8) - y_1 - y_2 + y_4 = 0, \end{cases} \tag{5.1.5'}$$

$$\begin{cases} 15 - 3x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ 10 - x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0, \end{cases} \tag{5.1.6'}$$

$$\begin{cases} y_1(15 - 3x_1 - x_2) = 0, \\ y_2(10 - x_1 - x_2) = 0, \\ y_3 x_1 = 0, \\ y_4 x_2 = 0, \end{cases} \tag{5.1.7'}$$

$$\begin{cases} y_1 \geqslant 0, \\ y_2 \geqslant 0, \\ y_3 \geqslant 0, \\ y_4 \geqslant 0. \end{cases} \tag{5.1.8'}$$

Если ввести обозначения

$$p_1 = y_1, \quad p_2 = y_2, \quad q_1 = y_3, \quad q_2 = y_4, \quad r_1 = 15 - 3x_1 - x_2, \quad r_2 = 10 - x_1 - x_2,$$

раскрыть скобки и перенести все переменные в левые части ограничений (5.1.5')—(5.1.8'), а все константы — в правые части, то условия Куна — Таккера примут следующий вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3p_1 + p_2 - q_1 = 16, \\ 2x_2 + p_1 + p_2 - q_2 = 16, \\ 3x_1 + x_2 + r_1 = 15, \\ x_1 + x_2 + r_2 = 10, \\ p_1 r_1 = 0, \;\; p_2 r_2 = 0, \;\; q_1 x_1 = 0, \;\; q_2 x_2 = 0, \\ x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \; p_1 \geqslant 0, \; p_2 \geqslant 0, \; q_1 \geqslant 0, \; q_2 \geqslant 0, \; r_1 \geqslant 0, \; r_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{5.1.12}$$

Решение этой системы, если оно существует, можно найти с помощью **метода искусственного базиса.**

Введем неотрицательные переменные $s_1 \geqslant 0$, $s_2 \geqslant 0$ и поставим такую задачу линейного программирования:

$$t = -s_1 - s_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3p_1 + p_2 - q_1 = 16, \\ 2x_2 + p_1 + p_2 - q_2 = 16, \\ 3x_1 + x_2 + r_1 = 15, \\ x_1 + x_2 + r_2 = 10, \end{cases}$$

$$p_1 r_1 = 0, \quad p_2 r_2 = 0, \quad q_1 x_1 = 0, \quad q_2 x_2 = 0,$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ p_1 \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0,\ q_1 \geqslant 0,\ q_2 \geqslant 0,\ r_1 \geqslant 0,\ r_2 \geqslant 0,\ s_1 \geqslant 0,\ s_2 \geqslant 0.$$

Если в оптимальном решении этой задачи $s_1^* = s_2^* = 0$, то набор чисел $x_1^*,\ x_2^*,\ p_1^*,\ p_2^*,\ q_1^*,\ q_2^*,\ r_1^*,\ r_2^*$ будет удовлетворять условиям Куна — Таккера (5.1.12), значит, вектор

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$$

будет являться оптимальным решением задачи (5.1.9)—(5.1.11).

Чтобы решить данную задачу, можно воспользоваться симплексным методом, при этом для учета условий $p_1 r_1 = 0$, $p_2 r_2 = 0$, $q_1 x_1 = 0$, $q_2 x_2 = 0$ при вычислительной реализации симплексного метода необходимо следить за тем, чтобы не вводить в базис одновременно переменные p_i и r_i с одним и тем же индексом i и переменные q_j и x_j с одним и тем же индексом j.

Соответствующая симплексная таблица представлена в табл. 5.1.1.

На первом шаге симплексного метода наименьший из отрицательных оценочных коэффициентов $\Delta_{p_1} = -4$, однако переменную p_1 можно ввести в базис только одновременно с выводом из базиса переменной r_1. Это невозможно, поскольку коэффициент при свободной переменной p_1 в третьем уравнении, соответствующем базисной переменной r_1, равен нулю и не может быть выбран в качестве разрешающего.

Поэтому на первом шаге в базис вводится переменная x_1 (соответствующий оценочный коэффициент $\Delta_{x_1} = -2$). Итак, $x_1^* = 29/10$, $x_2^* = 63/10$, $y_1^* = 17/5$, $y_2^* = y_3^* = y_4^* = 0$. ❑

В общем случае система условий Куна — Таккера в дифференциальной форме представляет собой систему нелинейных уравнений, отыскание точных решений которой не всегда возможно, следовательно, невозможно найти точные решения задачи выпуклого программирования.

Поэтому для приближенного решения большинства задач выпуклого программирования необходимо использовать **численные методы.** Рассмотрим несколько таких методов.

Таблица 5.1.1

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	Примечания
			x_1	x_2	p_1	p_2	q_1	q_2	r_1	r_2	s_1	s_2	
−1	s_1	16	2	0	3	1	−1	0	0	0	1	0	Нельзя вводить в базис p_1, p_2 без вывода из базиса r_1, r_2 соответственно.
−1	s_2	16	0	2	1	1	0	−1	0	0	0	1	
0	r_1	15	3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	
0	r_2	10	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
	z_0-z	$-32-z$	−2	−2	−4	−2	1	1	0	0	0	0	
−1	s_1	6	0	−2/3	3	1	−1	0	−2/3	0	1	0	Нельзя вводить в базис p_2, q_1 без вывода из базиса r_2, x_1 соответственно.
−1	s_2	16	0	2	1	1	0	−1	0	0	0	1	
0	x_1	5	1	1/3	0	0	0	0	1/3	0	0	0	
0	r_2	5	0	2/3	0	0	0	0	−1/3	1	0	0	
	z_0-z	$-22-z$	0	−4/3	−4	−2	1	1	2/3	0	0	0	
0	p_1	2	0	−2/9	1	1/3	−1/3	0	−2/9	0	1/3	0	Нельзя вводить в базис p_2, q_1, r_1 без вывода из базиса r_2, x_1, p_1 соответственно.
−1	s_2	14	0	20/9	0	2/3	1/3	−1	2/9	0	−1/3	1	
0	x_1	5	1	1/3	0	0	0	0	1/3	0	0	0	
0	r_2	5	0	2/3	0	0	0	0	−1/3	1	0	0	
	z_0-z	$-14-z$	0	−20/9	0	−2/3	−1/3	1	−2/9	0	4/3	0	
0	p_1	17/5	0	0	1	2/5	−3/10	−1/10	−1/5	0	3/10	1/10	
0	x_2	63/10	0	1	0	3/10	3/20	−9/20	1/10	0	−3/20	9/20	
0	x_1	29/10	1	0	0	−1/10	−1/20	3/20	3/10	0	1/20	−3/20	
0	r_2	4/5	0	0	0	−1/5	−1/10	3/10	−4/10	1	1/10	−3/10	
	z_0-z	$0-z$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	

Основная идея **метода возможных направлений** такова. В качестве начального приближения к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (5.1.1)—(5.1.2) выбирается некоторая внутренняя точка $\mathbf{x}^{(0)}$ множества допустимых решений [т. е. все ограничения (5.1.2) в этой точке должны выполняться как строгие неравенства].

Далее строится последовательность

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + h^{(k)}\mathbf{e}^{(k)},\ k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.1.13}$$

приближений к точке максимума целевой функции $f(\mathbf{x})$ на множестве допустимых решений.

Вектор $\mathbf{e}^{(k)}$, определяющий направление перемещения из точки $\mathbf{x}^{(k)}$ в точку $\mathbf{x}^{(k+1)}$ (на k-м шаге метода) должен удовлетворять двум требованиям.

1. При достаточно малых $h^{(k)}$ точка $\mathbf{x}^{(k+1)}$, определяемая формулой (5.1.13), должна принадлежать множеству допустимых решений (т. е. вектор $\mathbf{e}^{(k)}$ должен задавать возможное направление). В частности, если точка $\mathbf{x}^{(k)}$ является граничной точкой множества допустимых решений, то вектор $\mathbf{e}^{(k)}$ должен быть направлен внутрь этого множества.

2. При достаточно малых $h^{(k)}$ точка $\mathbf{x}^{(k+1)}$, определяемая формулой (5.1.13), должна принадлежать множеству допустимых решений [т. е. вектор $\mathbf{e}^{(k)}$ должен задавать направление возрастания целевой функции $f(\mathbf{x})$].

Величина $h^{(k)}$ шага смещения в (5.1.13) выбирается из условия наибольшего роста целевой функции $f(\mathbf{x})$ при перемещении из точки $\mathbf{x}^{(k)}$ в точку $\mathbf{x}^{(k+1)}$ с учетом того, что новое приближение $\mathbf{x}^{(k+1)}$, определяемое формулой (5.1.13), должно оставаться во множестве допустимых решений.

Если очередное приближение $\mathbf{x}^{(k)}$ является внутренней точкой множества допустимых решений [т. е. в этой точке все ограничения (5.1.2) выполняются как строгие неравенства], то вектор $\mathbf{e}^{(k)}$ можно выбрать совпадающим с градиентом

$$\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)=\left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}$$

целевой функции $f(\mathbf{x})$ [тогда $\mathbf{e}^{(k)}=\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ будет указывать направление наискорейшего возрастания функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^{(k)}$].

Если же $\mathbf{x}^{(k)}$ является граничной точкой множества допустимых решений, то некоторые из неравенств (5.1.2) в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ обращаются в равенства. В этом случае движение в направлении градиента может вывести за пределы множества допустимых решений.

В этом случае возможное направление

$$\mathbf{e}^{(k)}=\begin{pmatrix} e_1^{(k)} \\ e_2^{(k)} \\ \vdots \\ e_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

возрастания целевой функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ выбирается так, чтобы выполнялись следующие условия.

1. Угол между вектором $\mathbf{e}^{(k)}$ и вектором $\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ должен быть как можно меньшим.

2. Для каждого из ограничений $i=i_1, i_2, \dots, i_q$, *активных* в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ (т. е. обращающихся в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ в строгие равенства), угол между вектором $\mathbf{e}^{(k)}$ и внешней нормалью к гиперплоскости

$$\pi_i=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}x_j=b_i\right\},$$

касательной к границе множества допустимых решений в точке $\mathbf{x}^{(k)}$, должен быть не меньше $\pi/2$ (т. е. вектор $\mathbf{e}^{(k)}$ должен быть направлен внутрь множества допустимых решений задачи).

3. Вектор $\mathbf{e}^{(1)}$ должен быть ограниченным — поскольку направление определяется с точностью до положительного множителя, данное условие обеспечивает однозначность выбора $\mathbf{e}^{(1)}$.

Эти условия приводят к постановке следующей задачи:

$$z = \left(\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \mathbf{e}^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)}{\partial x_j} e_j^{(k)} \to \max, \tag{5.1.14}$$

$$\begin{cases} \left(\operatorname{grad} \varphi_i\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \mathbf{e}^{(k)}\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_i\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)}{\partial x_j} e_j^{(k)} \leqslant 0, \; i = i_1, i_2, \ldots, i_q, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \left|e_j^{(k)}\right| \leqslant 1. \end{cases} \tag{5.1.15}$$

Данную задачу можно свести к задаче линейного программирования, для этого нужно представить переменные $e_j^{(k)}$ (которые по смыслу задачи (5.1.14)—(5.1.15) могут принимать значения произвольного знака) как разности $e_j^{(k)} = e_{j+}^{(k)} - e_{j-}^{(k)}$ новых неотрицательных переменных $e_{j+}^{(k)} \geqslant 0$, $e_{j-}^{(k)} \geqslant 0$ и добавить условия $e_{j+}^{(k)} e_{j-}^{(k)} = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$).

При этом

$$\left|e_1^{(1)}\right| = e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)}, \qquad \left|e_2^{(1)}\right| = e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)},$$

и задача (5.1.14)—(5.1.15) примет вид

$$z = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)}{\partial x_j} \left(e_{j+}^{(k)} - e_{j-}^{(k)}\right) \to \max, \tag{5.1.16}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_i\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)}{\partial x_j} \left(e_{j+}^{(k)} - e_{j-}^{(k)}\right) \leqslant 0, \; i = i_1, i_2, \ldots, i_q, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} e_{j+}^{(k)} + \sum\limits_{j=1}^{n} e_{j-}^{(k)} \leqslant 1, \end{cases} \tag{5.1.17}$$

$$e_{j+}^{(k)} e_{j-}^{(k)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.1.18}$$

$$e_{j+}^{(k)} \geqslant 0, \quad e_{j-}^{(k)} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.1.19}$$

Эту задачу после введения фиктивных переменных (для преобразования к предпочитаемому виду) можно решить симплексным методом. При этом для учета условий $e_{j+}^{(k)} e_{j-}^{(k)} = 0$ при вычислительной реализации симплексного метода необходимо следить за тем, чтобы не вводить в базис одновременно переменные $e_{j+}^{(1)}$ и $e_{j-}^{(1)}$ с одинаковым индексом j ($j = 1, 2, .., n$).

Пример 5.1.2. Требуется найти приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (5.1.9)—(5.1.11) из примера 5.1.1, для чего провести три первые итерации метода возможных направлений, выбрав в качестве начального приближения вектор

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Как было показано в примере 5.1.1, начальное приближение

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

является в н у т р е н н е й точкой множества допустимых решений.

Очередное приближение $\mathbf{x}^{(1)}$ к оптимальному решению задачи выберем в направлении наискорейшего возрастания целевой функции:

$$\mathbf{e}^{(0)} = \operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \left.\begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}} = \begin{pmatrix} -2(1-8) \\ -2(8-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем границы шага смещения h в направлении $\mathbf{e}^{(0)}$, при котором точка

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + h\mathbf{e}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+14h \\ 8 \end{pmatrix}$$

будет оставаться во множестве допустимых решений. Запишем условия допустимости:

$$\begin{cases} 3(1+14h)+8 \leqslant 15, \\ 1+14h+8 \leqslant 10, \\ 1+14h \geqslant 0, \\ 8 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решениями этой системы неравенств являются все $h \in [-1/14; 1/14]$. Выберем h из этого отрезка таким образом, чтобы значение целевой функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + h\mathbf{e}^{(0)}$ было максимальным.

Для этого найдем точку максимума функции

$$\Phi_0(h) = f\left(\mathbf{x}^{(0)} + h\mathbf{e}^{(0)}\right) = -(1+14h-8)^2 - (8-8)^2 = -(14h-7)^2 = -49(2h-1)^2$$

одной переменной h на отрезке $h \in -[1/14; 1/14]$.

Производная $\Phi_0'(h) = -49 \cdot 2(2h-1) = -98(2h-1)$ обращается в нуль в точке $h = 1/2$, положительна при $h < 1/2$ и отрицательна при $h > 1/2$, поэтому точка $h = 1/2$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_0(h)$, а максимум функции $\Phi_0(h)$ на отрезке $h \in -[1/14; 1/14]$ достигается в точке $h^{(0)} = 1/14$.

Таким образом, если выбрать шаг смещения $h^{(0)} = 1/14$ в направлении

$$\mathbf{e}^{(0)} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

наискорейшего роста целевой функции $f(\mathbf{x})$, то при движении от точки

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

к точке

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + h^{(0)}\mathbf{e}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1+14h^{(0)} \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

целевая функция возрастет наибольшим образом, а точка $\mathbf{x}^{(1)}$ останется во множестве допустимых решений.

Итак, получили новое приближение

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

к оптимальному решению задачи (5.1.9)—(5.1.11).

Переходим ко **втором у шагу** метода возможных направлений.

Точка $\mathbf{x}^{(1)}$ является *граничной* точкой множества допустимых решений; второе из ограничений (5.1.10) выполняется в этой точке как равенство, а первое ограничение (5.1.10) и оба ограничения (5.1.11) — как строгие неравенства:

$$\begin{cases} 3\cdot 2+8<15, \\ 2+8=10, \\ 2>0, \\ 8>0. \end{cases}$$

Поэтому если двигаться в направлении

$$\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -2(x_1-8) \\ -2(x_2-8) \end{pmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(1)}} = \begin{pmatrix} -2(2-8) \\ -2(8-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

наискорейшего возрастания целевой функции, то новое приближение может выйти за границы области допустимых решений, т. е. направление

$$\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

не является возможным в точке

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Возможное направление

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

возрастания целевой функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^{(1)}$ выберем так, чтобы оно являлось оптимальным решением задачи (5.1.14)—(5.1.15), которая в данном случае имеет вид

$$z = 12e_1^{(1)} + 0e_2^{(1)} \to \max, \qquad (5.1.20)$$

$$\begin{cases} e_1^{(1)} + \ e_2^{(1)} \leqslant 0, \\ \left|e_1^{(1)}\right| + \left|e_2^{(1)}\right| \leqslant 1. \end{cases} \qquad (5.1.21)$$

Чтобы свести эту задачу к задаче линейного программирования, представим переменные $e_1^{(1)}$ и $e_2^{(1)}$ как разности новых неотрицательных переменных $e_{1+}^{(1)} \geqslant 0$, $e_{1-}^{(1)} \geqslant 0$, $e_{2+}^{(1)} \geqslant 0$, $e_{2-}^{(1)} \geqslant 0$:

$$e_1^{(1)} = e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)}, \qquad e_2^{(1)} = e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)},$$

причем

$$e_{1+}^{(1)} e_{1-}^{(1)} = 0, \qquad e_{2+}^{(1)} e_{2-}^{(1)} = 0.$$

При этом

$$\left|e_1^{(1)}\right| = e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)}, \qquad \left|e_2^{(1)}\right| = e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)},$$

и задача (5.1.20)—(5.1.21) примет вид

$$z = 12e_{1+}^{(1)} - 12e_{1-}^{(1)} \to \max,$$

$$\begin{cases} e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)} \leqslant 0, \\ e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)} \leqslant 1, \end{cases}$$

$$e_{1+}^{(1)} e_{1-}^{(1)} = 0, \quad e_{2+}^{(1)} e_{2-}^{(1)} = 0,$$

$$e_{1+}^{(1)} \geqslant 0, \quad e_{1-}^{(1)} \geqslant 0, \quad e_{2+}^{(1)} \geqslant 0, \quad e_{2-}^{(1)} \geqslant 0.$$

Будем решать эту задачу симплексным методом, введя предварительно дополнительные переменные s_1 и s_2, чтобы преобразовать неравенства в равенства:

$$z = 12e_{1+}^{(1)} - 12e_{1-}^{(1)} \to \max,$$

$$\begin{cases} e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)} + s_1 \qquad = 0, \\ e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)} \qquad + s_2 = 1, \\ \qquad\qquad e_{1+}^{(1)} e_{1-}^{(1)} = 0, \\ \qquad\qquad e_{2+}^{(1)} e_{2-}^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$e_{1+}^{(1)} \geqslant 0, e_{1-}^{(1)} \geqslant 0, e_{2+}^{(1)} \geqslant 0, e_{2-}^{(1)} \geqslant 0.$$

Для учета условий $e_{1+}^{(1)} e_{1-}^{(1)} = 0$, $e_{2+}^{(1)} e_{2-}^{(1)} = 0$ при вычислительной реализации симплексного метода будем следить за тем, чтобы не вводить в базис одновременно переменные $e_{j+}^{(1)}$ и $e_{j-}^{(1)}$ ($j = 1, 2$).

Симплексная таблица представлена в табл. 5.1.2.

В результате мы получили оптимальное решение

$$e_{1+}^{(1)} = 1/2, \quad e_{1-}^{(1)} = 0, \quad e_{2+}^{(1)} = 0, \quad e_{2-}^{(1)} = 1/2.$$

задачи (5.1.22)—(5.1.25).

Таблица 5.1.2

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	12	−12	0	0	0	0
			$e_{1+}^{(1)}$	$e_{1-}^{(1)}$	$e_{2+}^{(1)}$	$e_{2-}^{(1)}$	s_1	s_2
0	s_1	0	1	−1	1	−1	1	0
0	s_2	1	1	1	1	1	1	0
	$z_0 - z$	$0 - z$	−12	12	0	0	0	0
12	$e_{1+}^{(1)}$	0	1	−1	1	−1	1	0
0	s_2	1	0	2	0	2	−1	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	0	0	12	−12	12	0
12	$e_{1+}^{(1)}$	1/2	1	0	1	0	1/2	1/2
0	$e_{2-}^{(1)}$	1/2	0	1	0	1	−1/2	1/2
	$z_0 - z$	$6 - z$	0	24	12	0	6	6

Теперь легко найти оптимальное решение задачи (5.1.20)—(5.1.21):

$$e_1^{(1)} = e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)} = 1/2, \quad e_2^{(1)} = e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)} = -1/2.$$

Тем самым, мы получили направление очередного шага:

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Найдем границы шага смещения h в направлении $\mathbf{e}^{(1)}$, при котором точка

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + h\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + h/2 \\ 8 - h/2 \end{pmatrix}$$

будет оставаться во множестве допустимых решений. Имеем:

$$\begin{cases} 3(2 + h/2) + 8 - h/2 \leqslant 15, \\ 2 + h/2 + 8 - h/2 \leqslant 10, \\ 2 + h/2 \geqslant 0, \\ 8 - h/2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Точка $\mathbf{x}^{(2)}$ остается во множестве допустимых решений при всех $h \in [-4; 1]$. Выберем h из этого отрезка таким образом, чтобы значение целевой функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^{(2)}$ было максимальным.

Для этого найдем точку максимума функции

$$\Phi_1(h) = f\left(\mathbf{x}^{(1)} + h\mathbf{e}^{(1)}\right) = -(2 + h/2 - 8)^2 - (8 - h/2 - 8)^2 =$$
$$= -(h/2 - 6)^2 - h^2/4 = -h^2/2 + 6h - 36$$

одной переменной h на отрезке $h \in -[4; 1]$.

Производная $\Phi_1'(h) = -h + 6$ обращается в нуль в точке $h = 6$, положительна при $h < 6$ и отрицательна при $h > 6$, поэтому точка $h = 6$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_1(h)$, а максимум функции $\Phi_1(h)$ на отрезке $h \in [-4; 1]$ достигается в точке $h^{(1)} = 1$.

Таким образом, если выбрать шаг смещения $h^{(1)} = 1$ в направлении

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

наискорейшего роста целевой функции $f(\mathbf{x})$, то при движении от точки

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

к точке

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + h^{(1)}\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 + h^{(1)}/2 \\ 8 - h^{(1)}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

целевая функция возрастет наибольшим образом, а точка $\mathbf{x}^{(2)}$ останется во множестве допустимых решений.

Итак, получили очередное приближение

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

к оптимальному решению задачи (5.1.9)—(5.1.11).

Начинаем третий шаг метода возможных направлений.

Точка $\mathbf{x}^{(2)}$ является граничной точкой множества допустимых решений; оба ограничения (5.1.10) выполняются в этой точке как равенства, а оба ограничения (5.1.11) — как строгие неравенства:

$$\begin{cases} 3 \cdot 5/2 + 15/2 = 15, \\ 5/2 + 15/2 = 10, \\ 5/2 > 0, \\ 15/2 > 0. \end{cases}$$

Поэтому если двигаться в направлении

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(2)}} = \begin{pmatrix} -2(5/2 - 8) \\ -2(15/2 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

наискорейшего возрастания целевой функции, то новое приближение может выйти за границы области допустимых решений, т. е. направление

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

не является возможным в точке

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}.$$

Составим задачу линейного программирования для определения возможного направления $\mathbf{e}^{(2)}$:

$$z = 11e_{1+}^{(2)} - 11e_{1-}^{(2)} + e_{2+}^{(2)} - e_{2-}^{(2)} \to \max,$$

$$\begin{cases} 3e_{1+}^{(2)} - 3e_{1-}^{(2)} + e_{2+}^{(2)} - e_{2-}^{(2)} \leqslant 0, \\ e_{1+}^{(2)} - e_{1-}^{(2)} + e_{2+}^{(2)} - e_{2-}^{(2)} \leqslant 0, \\ e_{1+}^{(2)} + e_{1-}^{(2)} + e_{2+}^{(2)} + e_{2-}^{(2)} \leqslant 1, \end{cases}$$

$$e_{1+}^{(2)}e_{1-}^{(2)} = 0, \quad e_{2+}^{(2)}e_{2-}^{(2)} = 0,$$

$$e_{1+}^{(2)} \geqslant 0, \quad e_{1-}^{(2)} \geqslant 0, \quad e_{2+}^{(2)} \geqslant 0, \quad e_{2-}^{(2)} \geqslant 0.$$

Оптимальное решение этой задачи равно

$$e_{1+}^{(2)} = 1/4, \; e_{1-}^{(2)} = 0, \; e_{2+}^{(2)} = 0, \; e_{2-}^{(2)} = 3/4$$

(симплексная таблица представлена в табл. 5.1.3), откуда находим направление очередного шага

$$\mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix}.$$

Найдем границы шага смещения h в направлении $\mathbf{e}^{(2)}$, при котором точка

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + h\mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 + h/4 \\ 15/2 - 3h/4 \end{pmatrix}$$

будет оставаться во множестве допустимых решений. Имеем:

$$\begin{cases} 3(5/2 + h/4) + 15/2 - 3h/4 \leqslant 15, \\ 5/2 + h/4 + 15/2 - 3h/4 \leqslant 10, \\ 5/2 + h/4 \geqslant 0, \\ 15/2 - 3h/4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Этой системе неравенств удовлетворяют все $h \in [0; 5]$. Выберем h из этого отрезка таким образом, чтобы значение целевой функции (5.1.2) в точке $\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + h\mathbf{e}^{(2)}$ было максимальным.

Для этого найдем точку максимума функции

$$\Phi_2(h) = f\left(\mathbf{x}^{(2)} + h\mathbf{e}^{(2)}\right) = -(5/2 + h/4 - 8)^2 - (15/2 - 3h/4 - 8)^2 =$$
$$= -(h/4 - 11/2)^2 - (3h/4 + 1/2)^2$$

одной переменной h на отрезке $h \in -[0; 5]$.

Т а б л и ц а 5.1.3

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	11	−11	1	−1	0	0	0
			$e_{1+}^{(2)}$	$e_{1-}^{(2)}$	$e_{2+}^{(2)}$	$e_{2-}^{(2)}$	s_1	s_3	s_2
0	s_1	0	3	−3	1	−1	1	0	0
0	s_2	0	1	−1	1	−1	0	1	0
0	s_3	1	1	1	1	1	0	0	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	−11	11	−1	1	0	0	0
0	s_1	0	0	0	−2	2	1	−3	0
11	$e_{1+}^{(2)}$	0	1	−1	1	−1	0	1	0
0	s_3	1	0	2	0	2	0	−1	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	0	0	10	−10	0	11	0
−1	$e_{2-}^{(2)}$	0	0	0	−1	1	1/2	−3/2	0
11	$e_{1+}^{(2)}$	0	1	−1	0	0	1/2	−1/2	0
0	s_3	1	0	2	2	0	−1	2	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	0	0	0	0	5	−4	0
−1	$e_{2-}^{(2)}$	3/4	0	3/2	1/2	1	−1/4	0	3/4
11	$e_{1+}^{(2)}$	1/4	1	−1/2	1/2	0	1/4	0	1/4
0	s_2	1/2	0	1	1	0	−1/2	1	1/2
	$z_0 - z$	$2 - z$	0	4	4	0	5/2	0	4

Производная $\Phi_2'(h) = (8 - 5h)/4$ обращается в нуль в точке $h = 8/5$, положительна при $h < 8/5$ и отрицательна при $h > 8/5$, поэтому точка $h = 8/5$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_2(h)$ и точкой локального максимума этой функции на отрезке $h \in [0; 5]$.

Получаем очередное приближение:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 5/2 + 2/5 \\ 15/2 - 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/10 \\ 63/10 \end{pmatrix}.$$

Итерационный процесс метода возможных направлений иллюстрируется рис. 5.1.1.

Заметим, что $\mathbf{x}^{(3)}$ — это точное решение задачи (5.1.9)—(5.1.11); оно было получено в примере 5.1.1. ❑

Опишем теперь **метод условного градиента**. Пусть $\mathbf{x}^{(k)}$ — очередное приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (5.1.1)—(5.1.2) — такая точка $\mathbf{x}^{(k)}$ множества допустимых решений, что

$$\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \neq \boldsymbol{\theta}.$$

Тогда в окрестности точки $\mathbf{x}^{(k)}$ целевая функция $f(\mathbf{x})$ может быть представлена в виде

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) + \left(\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\right) + o\left(\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\right\|\right).$$

Будем максимизировать на допустимом множестве линейную функцию

$$f_k(\mathbf{x}) = \left(\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\right), \tag{5.1.22}$$

которая является приближением разности $f(\mathbf{x}) - f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ с точностью до величины $o\left(\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\right\|\right)$.

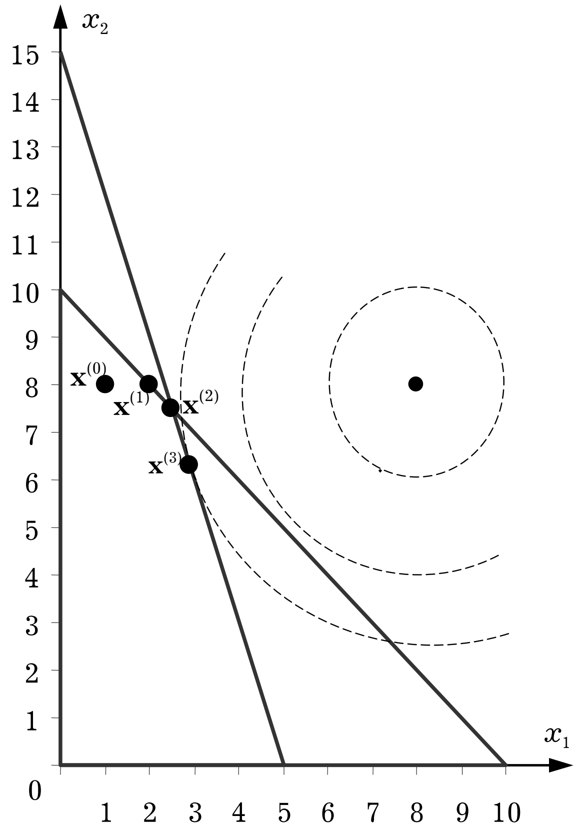


Рис. 5.1.1. *Итерационный процесс метода возможных направлений*

Пусть $\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}$ — решение вспомогательной задачи максимизации функции (5.1.22) при ограничениях (5.1.2).

Следующее приближение $\mathbf{x}^{(k+1)}$ к оптимальному решению исходной задачи (5.1.1)— (5.1.2) построим по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + h^{(k)}\left(\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)}\right), \tag{5.1.23}$$

в которой величину шага смещения $h^{(k)}$ выберем как

$$h^{(k)} = \min\left\{1; \tilde{h}^{(k)}\right\}, \tag{5.1.23}$$

где $\tilde{h}^{(k)}$ выбирается из условия наибольшего роста целевой функции $f(\mathbf{x})$ при перемещении из точки $\mathbf{x}^{(k)}$ в точку

$$\mathbf{x}^{(k)} + \tilde{h}^{(k)}\left(\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)}\right).$$

Тогда, поскольку множество допустимых решений выпукло, а $h^{(k)} \in [0; 1]$, точка $\mathbf{x}^{(k+1)}$ (5.1.23) останется допустимым решением.

Отметим, что вспомогательная задача максимизации функции (3.5.22) при ограничениях (5.1.2) является также задачей выпуклого программирования. Процесс ее решение оказывается, однако, достаточно простым в случае, когда ограничения (5.1.2) являются линейными.

Пример 5.1.3. Требуется найти приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (5.1.9)—(5.1.11) из примера 5.1.1, для чего провести три первые итерации метода условного градиента, выбрав в качестве начального приближения вектор

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Как было показано в примере 5.1.1, начальное приближение

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

является допустимым решением. При этом

$$\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}} = \begin{pmatrix} -2(1-8) \\ -2(8-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поставим вспомогательную задачу максимизации функции (5.1.22) при ограничениях (5.1.2):

$$f_0(\mathbf{x}) = \left(\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\right) = 14(x_1 - 1) + 0(x_2 - 8) = 14x_1 - 14 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqslant 15, \\ \;\; x_1 + x_2 \leqslant 10, \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Оптимальное решение этой задачи равно

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(симплексная таблица представлена в табл. 5.1.4).

Таблица 5.1.4

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	14	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	15	3	1	1	0
0	x_4	10	1	1	0	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	−14	0	0	0
14	x_1	5	1	1/3	1/3	0
0	x_4	5	0	2/3	−1/3	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	0	14/3	14/3	0

Выберем $\tilde{h}^{(0)}$ из условия наибольшего роста целевой функции $f(\mathbf{x})$ при перемещении из точки

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

в точку

$$\mathbf{x}^{(0)} + \tilde{h}^{(0)}\left(\tilde{\mathbf{x}}^{(0)} - \mathbf{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \tilde{h}^{(0)} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4\tilde{h}^{(0)} \\ 8-8\tilde{h}^{(0)} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_0(h) = f\begin{pmatrix} 1+4h \\ 8-8h \end{pmatrix} = -(1+4h-8)^2 - (8-8h-8)^2 =$$

$$= -16h^2 + 56h - 49 - 64h^2 = -80h^2 + 56h - 49.$$

Производная

$$\Phi_0'(h) = -160h + 56$$

обращается в нуль в точке $h = 56/160 = 7/20$, положительна при $h < 7/20$ и отрицательна при $h > 7/20$, поэтому точка $\tilde{h}^{(0)} = 7/20$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_0(h)$.

Величину шага смещения $h^{(0)}$ выберем как

$$h^{(k)} = \min\left\{1; \tilde{h}^{(k)}\right\} = \min\left\{1; 7/20\right\} = 7/20$$

и построим следующее приближение $\mathbf{x}^{(1)}$ к оптимальному решению исходной задачи:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + h^{(0)}\left(\tilde{\mathbf{x}}^{(0)} - \mathbf{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{7}{20}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4\cdot 7/20 \\ 8-8\cdot 7/20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 26/5 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = \left.\begin{pmatrix} -2(x_1-8) \\ -2(x_2-8) \end{pmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(1)}} = \begin{pmatrix} -2(12/5-8) \\ -2(26/5-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56/5 \\ 28/5 \end{pmatrix}.$$

Поставим вспомогательную задачу максимизации функции (3.5.22) при ограничениях (5.1.2):

$$f_1(\mathbf{x}) = \left(\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(1)}\right) = \frac{56}{5}\left(x_1 - \frac{12}{5}\right) + \frac{28}{5}\left(x_2 - \frac{26}{5}\right) = \frac{56}{5}x_1 + \frac{28}{5}x_2 - 56 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqslant 15, \\ \ \ x_1 + x_2 \leqslant 10, \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Оптимальное решение этой задачи равно

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

(симплексная таблица представлена в табл. 5.1.5).

Таблица 5.1.5

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	56/5	28/5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	15	3	1	1	0
0	x_4	10	1	1	0	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	$-56/5$	$-28/5$	0	0
56/5	x_1	5	1	1/3	1/3	0
0	x_4	5	0	2/3	$-1/3$	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	0	$-28/15$	56/15	0
56/5	x_1	5/2	1	0	1/2	$-1/2$
28/5	x_2	15/2	0	1	$-1/2$	3/2
	$z_0 - z$	$0 - z$	0	0	28/5	28/5

Выберем $\tilde{h}^{(1)}$ из условия наибольшего роста целевой функции $f(\mathbf{x})$ при перемещении из точки

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 26/5 \end{pmatrix}$$

в точку

$$\mathbf{x}^{(1)} + \tilde{h}^{(1)}\left(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} - \mathbf{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 26/5 \end{pmatrix} + \tilde{h}^{(1)} \begin{pmatrix} 5/2 - 12/5 \\ 15/2 - 26/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/5 + \tilde{h}^{(1)}/10 \\ 26/5 + 23\tilde{h}^{(1)}/10 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(h) = f\begin{pmatrix} 12/5 + h/10 \\ 26/5 + 23h/10 \end{pmatrix} = -(12/5 + h/10 - 8)^2 - (26/5 + 23h/10 - 8)^2 =$$

$$= -\left(\frac{h}{10} - \frac{28}{5}\right)^2 - \left(\frac{23h}{10} - \frac{14}{5}\right)^2.$$

Производная

$$\Phi_1'(h) = -2\left(\frac{h}{10} - \frac{28}{5}\right)\frac{1}{10} - 2\left(\frac{23h}{10} - \frac{14}{5}\right)\frac{23}{10} = -\frac{1}{5}(53h - 70)$$

обращается в нуль в точке $h = 70/53$, положительна при $h < 70/53$ и отрицательна при $h > 70/53$, поэтому точка $\tilde{h}^{(1)} = 70/53$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_1(h)$.

Величину шага смещения $h^{(1)}$ выберем как

$$h^{(1)} = \min\left\{1; \tilde{h}^{(1)}\right\} = \min\left\{1; 70/53\right\} = 1$$

и построим следующее приближение $\mathbf{x}^{(1)}$ к оптимальному решению исходной задачи:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + h^{(1)}\left(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} - \mathbf{x}^{(1)}\right) = \mathbf{x}^{(1)} + \tilde{\mathbf{x}}^{(1)} - \mathbf{x}^{(1)} = \tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right)=\begin{pmatrix}-2(x_1-8)\\-2(x_2-8)\end{pmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(2)}}=\begin{pmatrix}-2(5/2-8)\\-2(15/2-8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix}.$$

Поставим вспомогательную задачу максимизации функции (3.5.22) при ограничениях (5.1.2):

$$f_2(\mathbf{x})=\left(\operatorname{grad} f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right),\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(2)}\right)=11(x_1-5/2)+x_2-15/2\to\max,$$

$$\begin{cases}3x_1+x_2\leqslant 15,\\ \ \ x_1+x_2\leqslant 10,\end{cases}$$

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0.$$

Оптимальное решение этой задачи равно

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

(симплексная таблица представлена в табл. 5.1.6).

Выберем $\tilde{h}^{(2)}$ из условия наибольшего роста целевой функции $f(\mathbf{x})$ при перемещении из точки

$$\mathbf{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}5/2\\15/2\end{pmatrix}$$

в точку

$$\mathbf{x}^{(2)}+\tilde{h}^{(2)}\left(\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}-\mathbf{x}^{(2)}\right)=\begin{pmatrix}5/2\\15/2\end{pmatrix}+\tilde{h}^{(2)}\begin{pmatrix}5-5/2\\0-15/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2+5\tilde{h}^{(2)}/2\\15/2-15\tilde{h}^{(2)}/2\end{pmatrix}$$

Таблица 5.1.6

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	11	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	15	3	1	1	0
0	x_4	10	1	1	0	1
	z_0-z	$0-z$	−11	−1	0	0
11	x_1	5	1	1/3	1/3	0
0	x_4	5	0	2/3	−1/3	1
	z_0-z	$0-z$	0	8/3	11/3	0

Рассмотрим функцию

$$\Phi_2(h)=f\begin{pmatrix}5/2+5h/2\\15/2-15h/2\end{pmatrix}=-(5/2+5h/2-8)^2-(15/2-15h/2-8)^2=$$

$$=-\left(\frac{5h}{2}-\frac{11}{2}\right)^2-\left(-\frac{15h}{2}-\frac{1}{2}\right)^2=-\left(\frac{5h}{2}-\frac{11}{2}\right)^2-\left(\frac{15h}{2}+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Производная

$$\Phi_2'(h) = -2\left(\frac{5h}{2} - \frac{11}{2}\right)\frac{5}{2} - 2\left(\frac{15h}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{15}{2} = -\frac{5}{2}(50h - 8) = -5(25h - 4)$$

обращается в нуль в точке $h = 4/25$, положительна при $h < 4/25$ и отрицательна при $h > 4/25$, поэтому точка $\tilde{h}^{(2)} = 4/25$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_2(h)$.

Величина шага смещения

$$h^{(2)} = \min\{1; \tilde{h}^{(2)}\} = \min\{1; 4/25\} = 4/25$$

и построим следующее приближение к оптимальному решению исходной задачи:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + h^{(2)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(2)} - \mathbf{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} + \frac{4}{25}\begin{pmatrix} 5 - 5/2 \\ 0 - 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/10 \\ 63/10 \end{pmatrix}. \ \square$$

Перейдем к рассмотрению **метода штрафных функций**, идея которого состоит в переходе от задачи условной максимизации функции (5.1.1) при ограничениях (5.1.2) к последовательности задач безусловной максимизации

$$f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \varphi_k(\mathbf{x}) \to \max, \qquad k = 1, 2, 3, \dots, \tag{5.1.24}$$

где функции $\varphi_k(\mathbf{x})$ с ростом k все в большей степени учитывают ограничения (5.1.2). Для этого функции $\varphi_k(\mathbf{x})$ подбираются так, чтобы $f_k(\mathbf{x})$ при больших k мало отличались от $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}$, удовлетворяющих ограничениям (5.1.2), и быстро убывали при удалении $\mathbf{x}$ от множества допустимых решений. Более строго, последовательность функций $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^{\infty}$ называется *последовательностью штрафных функций* для задачи (5.1.1)—(5.1.2), если

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ \varphi_i(\mathbf{x}) \leqslant b_i, \ i = 1, 2, \dots, m, \\ -\infty, & \text{если хотя бы одно из неравенств } \varphi_i(\mathbf{x}) \leqslant b_i \text{ нарушается.} \end{cases}$$

Такую последовательность штрафных функций можно определить, например, так:

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = k\varphi(\mathbf{x}),$$

где

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{m}\left(g_i^+(\mathbf{x})\right)^2,$$

$$g_i^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ \varphi_i(\mathbf{x}) \leqslant b_i, \\ \varphi_i(\mathbf{x}) - b_i, & \text{если } \varphi_i(\mathbf{x}) > b_i. \end{cases}$$

При этом последовательность решений задач безусловной максимизации (5.1.24) сходится (при определенных условиях) к решению исходной задачи (5.1.1)— (5.1.2), поэтому в качестве приближенного решения задачи (5.1.1)— (5.1.2) полагают очередное решение задачи (5.1.24) при достаточно большом k: $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$.

Если целевая функция задачи выпуклого программирования является квадратичной, а ограничения — линейными, то решение вспомогательной задачи можно найти точно, после чего для определения оптимального решения исходной задачи перейти к пределу при $k \to \infty$.

Пример 3.5.4. Требуется найти оптимальное решение задачи выпуклого программирования (5.1.9)—(5.1.11) из примера 5.1.1 с помощью метода штрафных функций.

Решение. Предположим, что в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ максимума вспомогательной функции

$$f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \varphi_k(\mathbf{x})$$

все ограничения исходной задачи (5.1.10)—(5.1.11), которые мы представим в форме

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leqslant 15, \\ x_1 + x_2 &\leqslant 10, \\ -x_1 \qquad &\leqslant 0, \\ -x_2 &\leqslant 0, \end{aligned}$$

нарушаются, т. е.

$$\begin{aligned} 3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} &> 15, \\ x_1^{(k)} + x_2^{(k)} &> 10, \\ -x_1^{(k)} \qquad &> 0, \\ -x_2^{(k)} &> 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_k(\mathbf{x}) &= -k\Big(\big(3x_1 + x_2 - 15\big)^2 + \big(x_1 + x_2 - 10\big)^2 + \big(-x_1 - 0\big)^2 + \big(-x_2 - 0\big)^2\Big) = \\ &= -k\Big(\big(3x_1 + x_2 - 15\big)^2 + \big(x_1 + x_2 - 10\big)^2 + \big(x_1\big)^2 + \big(x_2\big)^2\Big), \end{aligned}$$

$$f_k(\mathbf{x}) = -\big(x_1 - 8\big)^2 - \big(x_2 - 8\big)^2 - k\Big(\big(3x_1 + x_2 - 15\big)^2 + \big(x_1 + x_2 - 10\big)^2 + \big(x_1\big)^2 + \big(x_2\big)^2\Big),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial x_1} &= -2\big(x_1 - 8\big) - 6k\big(3x_1 + x_2 - 15\big) - 2k\big(x_1 + x_2 - 10\big) - 2kx_1 = \\ &= -(22k + 2)x_1 - 8kx_2 + 110k + 16, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial x_1} &= -2\big(x_2 - 8\big) - 2k\big(3x_1 + x_2 - 15\big) - 2k\big(x_1 + x_2 - 10\big) - 2kx_2 = \\ &= -8kx_1 - (6k + 2)x_2 + 50k + 16. \end{aligned}$$

В точке максимума функции $f_k(\mathbf{x})$ частные производные по x_1 и x_2 должны быть равны нулю, откуда

$$\begin{cases} -(22k + 2)x_1 \qquad - 8kx_2 + 110k + 16 = 0, \\ \qquad -8kx_1 - (6k + 2)x_2 \quad + 50k + 16 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases}(11k+1)x_1 \qquad + 4kx_2 = 55k+8,\\ \qquad 4kx_1 + (3k+1)x_2 = 25k+8.\end{cases}$$

Выразим из первого уравнения

$$x_2 = \frac{55k+8-(11k+1)x_1}{4k}$$

и подставим во второе уравнение:

$$4kx_1 + (3k+1)\frac{55k+8-(11k+1)x_1}{4k} = 25k+8\,.$$

Отсюда

$$x_1^{(k)} = \frac{65k^2+47k+8}{17k^2+14k+1} > 0, \quad x_2^{(k)} = \frac{55k^2+81k+8}{17k^2+14k+1} > 0.$$

При этом

$$3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 15 = -\frac{5k^2-12k-17}{17k^2+14k+1}, \qquad x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 10 = -\frac{50k^2-268k-36}{17k^2+14k+1}\,.$$

Поскольку при любом k $x_1^{(k)} > 0,\ x_2^{(k)} > 0$, наше предположение о том, что все ограничения исходной задачи нарушаются, неверно.

Выдвинем другую гипотезу. Предположим, что в точке максимума функции $f_k(\mathbf{x})$ выполняются третье и четвертое ограничения исходной задачи (5.1.10)—(5.1.11), а первое и второе ограничения не выполняются, т. е.

$$\begin{aligned} 3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} &> 15,\\ x_1^{(k)} + x_2^{(k)} &> 10,\\ -x_1^{(k)} \qquad &\leqslant 0,\\ -x_2^{(k)} &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = -k\left(3x_1 + x_2 - 15\right)^2 - k\left(x_1 + x_2 - 10\right)^2,$$

$$f_k(\mathbf{x}) = -\left(x_1-8\right)^2 - \left(x_2-8\right)^2 - k\left(3x_1+x_2-15\right)^2 - k\left(x_1+x_2-10\right)^2,$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1} = -2\left(x_1-8\right) - 6k\left(3x_1+x_2-15\right) - 2k\left(x_1+x_2-10\right) = -(20k+2)x_1 - 8kx_2 + 110k + 16,$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1} = -2\left(x_2-8\right) - 2k\left(3x_1+x_2-15\right) - 2k\left(x_1+x_2-10\right) = -8kx_1 - (4k+2)x_2 + 50k + 16.$$

В точке максимума функции $f_k(\mathbf{x})$ частные производные по x_1 и x_2 должны быть равны нулю, откуда

$$\begin{cases} -(20k+2)x_1 - 8kx_2 + 110k + 16 = 0, \\ -8kx_1 - (4k+2)x_2 + 50k + 16 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (10k+1)x_1 \qquad + 4kx_2 = 55k + 8, \\ \qquad 4kx_1 + (2k+1)x_2 = 25k + 8. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения

$$x_2 = \frac{55k + 8 - (10k+1)x_1}{4k}$$

и подставим во второе уравнение:

$$4kx_1 + (2k+1)\frac{55k + 8 - (10k+1)x_1}{4k} = 25k + 8\,.$$

Отсюда

$$x_1^{(k)} = \frac{10k^2 + 39k + 8}{4k^2 + 12k + 1} > 0, \quad x_2^{(k)} = \frac{30k^2 + 73k + 8}{4k^2 + 12k + 1} > 0.$$

При этом

$$3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 15 = \frac{10k + 17}{4k^2 + 12k + 1} > 0, \qquad x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 10 = \frac{-8k + 6}{4k^2 + 12k + 1}.$$

Поскольку при любом k $x_1^{(k)} + x_2^{(k)} < 10$, наше предположение о том, что второе ограничение исходной задачи нарушаются, неверно.

Рассмотрим третью гипотезу относительно местоположения точки максимума. Предположим, что в точке максимума функции $f_k(\mathbf{x})$ выполняются все ограничения исходной задачи (5.1.10)—(5.1.11), кроме первого, т. е.

$$\begin{aligned} 3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} &> 15, \\ x_1^{(k)} + x_2^{(k)} &\leqslant 10, \\ -x_1^{(k)} \qquad &\leqslant 0, \\ -x_2^{(k)} &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = -k\left(3x_1 + x_2 - 15\right)^2,$$

$$f_k(\mathbf{x}) = -\left(x_1 - 8\right)^2 - \left(x_2 - 8\right)^2 - k\left(3x_1 + x_2 - 15\right)^2,$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1} = -2\left(x_1 - 8\right) - 6k\left(3x_1 + x_2 - 15\right) = -(18k+2)x_1 - 6kx_2 + 90k + 16,$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1} = -2\left(x_2 - 8\right) - 2k\left(3x_1 + x_2 - 15\right) = -6kx_1 - (2k+2)x_2 + 30k + 16.$$

В точке максимума функции $f_k(\mathbf{x})$ частные производные по x_1 и x_2 должны быть равны нулю, откуда

$$\begin{cases} -(18k+2)x_1 - 6kx_2 + 90k + 16 = 0, \\ -6kx_1 - (2k+2)x_2 + 30k + 16 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (9k+1)x_1 + 3kx_2 = 45k + 8, \\ 3kx_1 + (k+1)x_2 = 15k + 8. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения

$$x_2 = \frac{45k + 8 - (9k+1)x_1}{3k}$$

и подставим во второе уравнение:

$$3kx_1 + (k+1)\frac{45k + 8 - (9k+1)x_1}{3k} = 15k + 8.$$

Отсюда

$$x_1^{(k)} = \frac{29k+8}{10k+1} > 0, \qquad x_2^{(k)} = \frac{63k+8}{10k+1} > 0.$$

При этом

$$3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 15 = \frac{17}{10k+1} > 0, \qquad x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 10 = \frac{-8k + 6 - 100k}{10k+1} < 0,$$

$$x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 10 = \frac{-8k+6}{4k^2 + 12k + 1} < 0,$$

Значит, наше предположение о том, что

$$\begin{aligned} 3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} &> 15, \\ x_1^{(k)} + x_2^{(k)} &\leqslant 10, \\ -x_1^{(k)} \qquad &\leqslant 0, \\ -x_2^{(k)} &\leqslant 0, \end{aligned}$$

оказалось верным, и это означает, что точка безусловного максимума функции $f_k(\mathbf{x})$ равна

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} (29k+8)/(10k+1) \\ (63k+8)/(10k+1) \end{pmatrix}.$$

Поэтому оптимальное решение исходной задачи определим как

$$\mathbf{x}^* = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to\infty}\left((29k+8)/(10k+1)\right) \\ \lim\limits_{k\to\infty}\left((63k+8)/(10k+1)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/10 \\ 63/10 \end{pmatrix}. \ ❑$$

Пример 5.1.5. Требуется найти приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (5.1.9)—(5.1.11) из примера 5.1.1 с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel.

Решение. Введем в рабочий лист Microsoft Excel формулы, как показано на рис. 5.1.2. Ячейки B1 и B2 отведем под координаты вектора оптимального решения задачи. Запустим надстройку «Поиск решения».

	A	B
1	$x_1 =$	
2	$x_2 =$	
3	$f(x_1, x_2) =$	=–((B1–8)^2+(B2–8)^2)
4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	=3*B1+B2
5	$\varphi_2\, x_1, x_2) =$	=B1+B2
6	$b_1 =$	15
7	$b_2 =$	10

а) формулы Microsoft Excel

	A	B
1	$x_1 =$	
2	$x_2 =$	
3	$f(x_1, x_2) =$	0
4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	0
5	$\varphi_2\, x_1, x_2) =$	0
6	$b_1 =$	15
7	$b_2 =$	10

б) результат ввода формул

Рис. 5.1.2. *Исходные данные для решения задачи выпуклого программирования с помощью надстройки «Поиск решения»*

В появившемся окне ввода данных (рис. 5.1.3, *а*) укажем ячейку, в которую введена максимизируемая целевая функция, и ограничения (без учета ограничений неотрицательности, которые введем в окне ввода параметров надстройки «Поиск решения» — см. рис. 5.1.3, *б*).

Результаты работы надстройки «Поиск решения» представлены на рис. 5.1.4. Предлагаем студенту самостоятельно их интерпретировать. ❑

5.2. Задание практикума

Требуется найти максимальное значение функции $f(x_1;x_2) = nx_1^2 + 5x_2^2$ при ограничениях $x_1 + 2x_2 \leqslant 18$; $2x_1 + x_2 \leqslant 16$; $x_1 \geqslant 0$; $x_2 \geqslant 0$, где n — номер варианта.

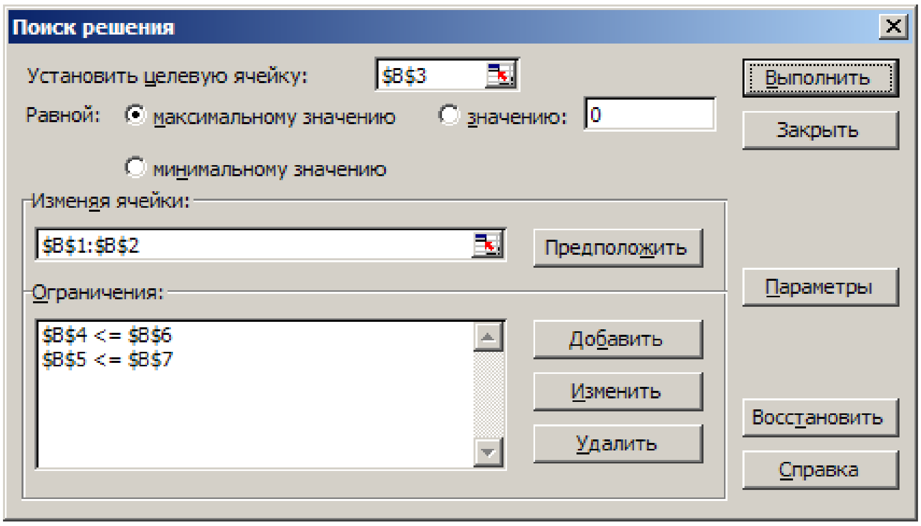
Вначале нужно проверить выполнение условия регулярности, и если оно выполняется, составить функцию Лагранжа, записать условия Куна — Таккера в дифференциальной форме и найти оптимальное решение задачи как точку, удовлетворяющую условиям Куна — Таккера.

Затем нужно найти приближение к оптимальному решению задачи, для чего провести три первые итерации метода возможных направлений, а затем три первые итерации метода условного градиента, выбрав (для обоих методов) в качестве начального приближения вектор

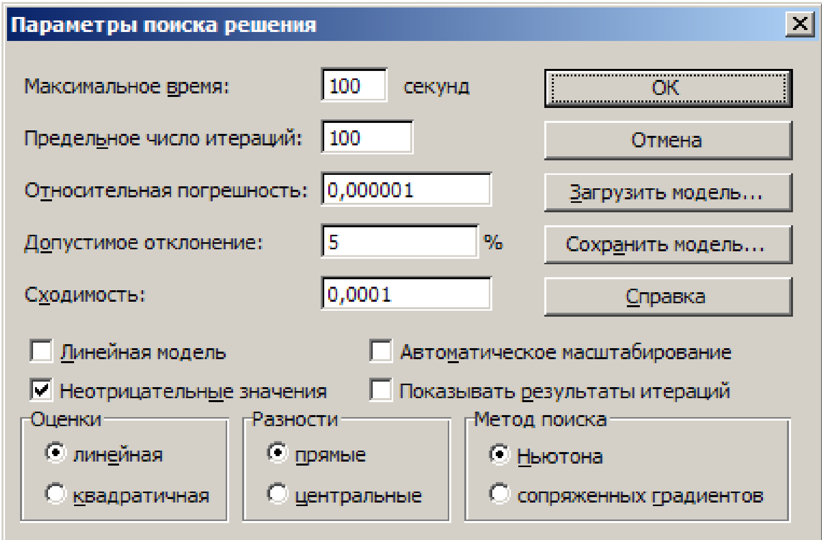
$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Потом нужно найти оптимальное решение рассматриваемой задачи с помощью метода штрафных функций.

После этого необходимо с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel проверить правильность решения задачи.



а) окно ввода данных



б) окно ввода параметров

Рис. 5.2.3. *Ввод данных в надстройку «Поиск решения»*

	A	B
1	$x_1 =$	2,9
2	$x_2 =$	6,3
3	$f(x_1, x_2) =$	−28,9
4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	15
5	$\varphi_2(x_1, x_2) =$	9,2
6	$b_1 =$	15
7	$b_2 =$	10

а) результаты на исходном рабочем листе

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$3	$f(x_1, x_2) =$	−128	−28,9

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$1	$x_1 =$	0	2,9
$B$2	$x_2 =$	0	6,3

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$B$4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	15	$B$4<=$B$6	связанное	0
$B$5	$\varphi_2(x_1, x_2) =$	9,2	$B$5<=$B$7	не связан.	0,8

б) отчет по результатам

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
$B$1	$x_1 =$	2,9	0
$B$2	$x_2 =$	6,3	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
$B$4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	15	3,4
$B$5	$\varphi_2(x_1, x_2) =$	9,2	0

в) отчет по устойчивости

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$B$3	$f(x_1, x_2) =$	−28,9

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$1	$x_1 =$	2,9	0	−66,89	2,9	−28,9
$B$2	$x_2 =$	6,3	0	−90,01	6,3	−28,9

г) отчет по пределам

Рис. 5.2.4. *Результаты решения задачи выпуклого программирования с помощью надстройки «Поиск решения»*

6. Динамическая задача распределения инвестиций

6.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, разработанный для решения некоторого класса задач математического программирования путем их разложения на относительно небольшие и, следовательно, менее сложные задачи. Специфика метода динамического программирования состоит в том, что для отыскания оптимального управления планируемая операция разделяется на ряд последовательных шагов или этапов. Соответственно и сам процесс планирования операции становится многошаговым и развивается последовательно, от этапа к этапу, причем каждый раз оптимизируется управление только на одном шаге.

Некоторые операции естественно распадаются на этапы, в других это деление приходится вводить искусственно. Примером «естественно многоэтапной» операции может служить планирование работы предприятия на некоторый период времени, состоящий из нескольких хозяйственных лет или кварталов.

Особо подчеркнем, что принцип динамического программирования отнюдь не предполагает, что, выбирая управление на одном отдельном шаге, можно забыть обо всех остальных. Напротив, управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем. Динамическое программирование — это планирование дальновидное, с учетом перспективы.

Однако из этого правила есть исключение. Среди всех шагов существует один, который может планироваться попросту, «без оглядки на будущее». Это — последний шаг. Спланировав оптимальным образом этот последний шаг, можно к нему «пристраивать» предпоследний, затем предпредпоследний и т. д. Поэтому процесс динамического программирования разворачивается от конца к началу. Сначала делаются различные предположения о том, чем кончился предпоследний шаг, и для каждого из них выбирается управление на последнем. Затем делаются различные предположения о том, чем кончился предпредпоследний шаг, т. е. рассматриваются различные состояния системы на третьем от конца шаге и выбирается управление на втором от концы шаге так, чтобы оно вместе в уже выбранным управлением на последнем шаге обеспечивало наилучший эффект на двух последних шагах, и так далее, вплоть до первого от начала шага, с которого начинался процесс.

Учтем, что в начале процесса состояние системы нам известно, и делать какие-то предположения не нужно. Поэтому, имея в виду, что все последующие шаги спланированы для различных состояний системы, остается выбрать управление на первом шаге так, чтобы оно было оптимальным с учетом всех управлений, уже принятых наилучшим образом на всех последующих шагах.

Принцип, положенный в основу построения такого решения (искать всегда оптимальное продолжение процесса относительно того состояния, которое достигнуто в данный момент), принято называть *принципом оптимальности*.

Состояние системы на каждом шаге характеризуется некоторой переменной величиной, которая называется *параметром состояния*. Наилучший эффект на данном этапе вместе с уже рассмотренными шагами характеризуется *функцией состояния*. Решение конкретной задачи методом динамического программирования сводится к выбору параметра состояния (что требует определенного навыка), составлению функции состояния и рекуррентных соотношений, связывающих функции состояния для двух соседних последовательных этапов, и их применению для выбора оптимального управления.

Знакомство с методом динамического программирования проще всего начать с рассмотрения нелинейной задачи распределения ресурсов между предприятиями одного производственного объединения или отрасли. Для определенности можно считать, что речь идет о распределении капитальных вложений.

Предположим, что указано n пунктов, где требуется построить или реконструировать предприятия одной отрасли, для чего выделено b рублей. Обозначим через $f_j(\xi)$ прирост мощности или прибыли на j-м предприятии, если оно получит ξ рублей капитальных вложений. В **динамической задаче распределения инвестиций** *требуется найти такое распределение*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост мощности или прибыли

$$z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n)$$

при ограничении по общей сумме инвестиций

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b.$$

Будем считать, что все переменные x_j принимают только целые неотрицательные значения

$$x_j = 0 \quad \text{или} \quad 1 \quad \text{или} \quad 2 \quad \text{или} \quad 3 \quad \text{и т. д.}$$

Функции $f_j(x_j)$ мы считаем заданными, заметив, что их определение — довольно трудоемкая экономическая задача.

Воспользуемся для решения этой задачи методом динамического программирования.

Введем параметр состояния и определим функцию состояния. За параметр состояния ξ примем денежную сумму, выделяемую нескольким предприятиям, а функцию состояния $F_k(\xi)$ определим как максимальную прибыль на первых k предприятиях, если они вместе получают ξ руб. Параметр ξ может изменяться от 0 до b.

Если из ξ руб. k-е предприятие получит x_k руб., то каково бы ни было это значение, остальные $(\xi - x_k)$ руб. естественно распределить между предприятиями от первого до $(k-1)$-го так, чтобы была получена максимальная прибыль $F_{k-1}(\xi - x_k)$.

Тогда прибыль k предприятий будет равна $f_k(x_k) + F_{k-1}(\xi - x_k)$. Надо выбрать такое значение x_k между 0 и ξ, чтобы эта сумма была максимальной, и мы приходим к рекуррентному соотношению

$$F_k(\xi) = \max_{0 \leqslant x_k \leqslant \xi} \{f_k(x_k) + F_{k-1}(\xi - x_k)\}$$

для $k = 2, 3, \ldots, n$. Если же $k = 1$, то

$$F_1(\xi) = f_1(\xi).$$

Пример 6.1.1. Производственное объединение состоит из четырех предприятий ($n = 4$). Общая сумма капитальных вложений равна 700 млн. руб. ($b = 700$), выделяемые предприятиям суммы кратны 100 млн. руб. Если j-е предприятие получает инвестиции в объеме ξ млн. руб., то прирост годовой прибыли на этом предприятии составит $f_j(\xi)$ млн. руб. в год. Значения функций $f_j(\xi)$ приведены в табл. 6.1.1. Требуется найти такое распределение

$$\mathbf{x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях вместе.

Таблица 6.1.1

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$f_1(\xi)$	0	20	34	46	53	55	60	60
$f_2(\xi)$	0	18	29	45	62	78	90	98
$f_3(\xi)$	0	25	41	52	74	82	88	90
$f_4(\xi)$	0	30	52	76	90	104	116	125

Решение. Прежде всего заполняем табл. 6.1.2. Значения $f_2(\xi)$ складываем со значениями $F_1(\xi - x_2) = f_1(\xi - x_2)$ и на каждой северо-восточной диагонали находим наибольшее число (которое выделяем жирным и обводим рамкой) и указываем соответствующее значение $x_2^*(\xi)$.

Затем заполняем табл. 6.1.3.

Таблица 6.1.2

	$\xi - x_2$	0	100	200	300	400	500	600	700
x_2	$f_2(x_2)$ \ $F_1(\xi - x_2)$	0	20	34	46	53	55	60	60
0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{\mathbf{20}}$	34	46	53	55	60	60
100	18	18	$\boxed{\mathbf{38}}$	$\boxed{\mathbf{52}}$	64	71	73	78	
200	29	29	49	63	75	82	84		
300	45	45	$\boxed{\mathbf{65}}$	79	91	98			
400	62	62	$\boxed{\mathbf{82}}$	96	108				
500	78	78	$\boxed{\mathbf{98}}$	$\boxed{\mathbf{112}}$					
600	90	90	110						
700	98	98							

Таблица 6.1.3

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$F_2(\xi)$	0	20	38	52	65	82	98	112
$x_2^*(\xi)$	0	0	100	100	300	400	500	500

Продолжая процесс, табулируем функции $F_3(\xi), x_3^*(\xi)$ и т. д. (табл. 6.1.4—6.1.5). В табл. 6.1.6 заполняем только одну диагональ для значения $\xi = 700$. Наибольшее число на этой диагонали

$$z_{\max} = 155 \text{ млн. руб.},$$

причем четвертому предприятию должно быть выделено

$$x_4^* = x_4^*(700) = 300 \text{ млн. руб.}$$

Таблица 6.1.4

	$\xi - x_3$	0	100	200	300	400	500	600	700
x_3	$f_3(x_3)$ \ $F_2(\xi - x_3)$	0	20	38	52	65	82	98	112
0	0	$\boxed{0}$	20	38	52	65	82	98	112
100	25	**25**	$\boxed{\mathbf{45}}$	$\boxed{\mathbf{63}}$	77	90	107	123	
200	41	41	61	$\boxed{\mathbf{79}}$	93	106	123		
300	52	52	72	94	112	126			
400	74	74	$\boxed{\mathbf{94}}$	$\boxed{\mathbf{112}}$	$\boxed{\mathbf{126}}$				
500	82	82	102	120					
600	88	88	106						
700	90	90							

Таблица 6.1.5

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$F_3(\xi)$	0	25	45	63	79	94	112	126
$x_3^*(\xi)$	0	100	100	100	200	400	400	400

Таблица 6.1.6

x_4	$\xi - x_4$	0	100	200	300	400	500	600	700
	$f_4(x_4)$ \ $F_3(\xi - x_4)$	0	25	45	63	79	94	112	126
0	0								126
100	30							142	
200	52						146		
300	76					$\boxed{\mathbf{155}}$			
400	90				153				
500	104			149					
600	116		141						
700	125	125							

На долю остальных трех предприятий остается 400 млн. руб. Из табл. 6.1.5 видно, что третьему предприятию должно быть выделено

$$x_3^* = x_3^*(700 - x_4^*) = x_3^*(400) = 200 \text{ млн. руб.}$$

Продолжая обратный процесс, находим

$$x_2^* = x_2^*(700 - x_4^* - x_3^*) = x_2^*(200) = 100 \text{ млн. руб.}$$

На долю первого предприятия остается

$$x_1^* = 700 - x_4^* - x_3^* - x_2^* = 100 \text{ млн. руб.}$$

Таким образом, наилучшим является следующее распределение капитальных вложений по предприятиям:

$$x_1^* = 100,\ x_2^* = 100,\ x_3^* = 200,\ x_4^* = 300.$$

Оно обеспечивает производственному объединению наибольший возможный прирост прибыли 155 млн. руб.

Студенту рекомендуется проверить выполнение равенства

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) = z_{\max}. \ \square$$

6.2. Задание практикума

Производственное объединение состоит из четырех предприятий ($n = 4$). Общая сумма капитальных вложений равна 700 млн. руб. ($b = 700$), выделяемые предприятиям суммы кратны 100 млн. руб. Если j-е предприятие получает инвестиции в объеме ξ млн. руб., то прирост годовой прибыли на этом предприятии составит $f_j(\xi)$ млн. руб. в год ($j = 1, 2, 3, 4$). Значения функций $f_j(\xi)$ известны и для каждого варианта компактно записаны в табл. 6.2.1 в следующем виде:

$$\begin{array}{cccccccc}
f_1(0) & f_1(100) & f_1(200) & f_1(300) & f_1(400) & f_1(500) & f_1(600) & f_1(700) \\
f_2(0) & f_2(100) & f_2(200) & f_2(300) & f_2(400) & f_2(500) & f_2(600) & f_2(700) \\
f_3(0) & f_3(100) & f_3(200) & f_3(300) & f_3(400) & f_3(500) & f_3(600) & f_3(700) \\
f_4(0) & f_4(100) & f_4(200) & f_4(300) & f_4(400) & f_4(500) & f_4(600) & f_4(700)
\end{array}$$

Требуется найти такое распределение инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях вместе. Для этого необходимо составить математическую модель динамической задачи распределения инвестиций и решить ее методом динамического программирования, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса.

Таблица 6.2.1

№ вар.	Исходные данные								№ вар.	Исходные данные							
1	0	20	44	55	63	67	70	70	11	0	15	26	38	45	52	58	63
	0	18	29	49	72	87	100	108		0	10	17	23	29	34	38	41
	0	25	41	52	74	82	88	90		0	11	19	26	30	33	35	36
	0	30	52	76	90	104	116	125		0	25	34	41	46	50	53	56
2	0	15	24	30	36	40	43	45	12	0	25	41	55	65	75	80	85
	0	18	26	34	39	42	44	46		0	30	52	76	90	104	116	125
	0	16	27	37	44	48	50	56		0	50	68	82	92	100	107	112
	0	10	17	23	29	34	38	41		0	61	80	93	100	106	112	116
3	0	42	58	71	80	89	95	100	13	0	20	33	42	48	53	56	58
	0	30	49	63	68	69	65	60		0	22	37	49	59	68	76	82
	0	22	37	49	59	68	76	82		0	10	29	42	52	60	65	69
	0	50	68	82	92	100	107	112		0	16	27	37	44	48	50	56
4	0	37	64	87	105	120	134	145	14	0	8	13	17	20	23	25	27
	0	48	75	98	120	132	144	156		0	10	17	23	29	34	38	41
	0	85	100	111	118	124	129	132		0	11	19	26	30	33	35	36
	0	47	70	80	86	91	94	98		0	10	20	30	38	43	49	52
5	0	10	20	30	38	43	49	52	15	0	75	90	100	108	113	115	117
	0	13	25	37	47	55	61	66		0	85	100	111	118	124	129	132
	0	6	13	20	27	33	38	41		0	42	58	71	80	89	95	100
	0	24	36	42	46	48	48	49		0	28	45	6	78	90	102	113
6	0	5	10	14	17	19	21	22	16	0	28	42	51	57	61	64	66
	0	8	13	18	21	23	21	17		0	5	20	29	36	41	45	47
	0	10	16	21	24	27	29	30		0	8	26	37	47	53	58	61
	0	11	19	26	30	33	35	36		0	22	37	49	59	68	76	82
7	0	28	45	65	78	90	102	113	17	0	70	93	104	110	114	117	119
	0	25	41	55	65	75	80	85		0	61	80	93	100	106	112	116
	0	15	25	40	50	62	73	82		0	83	105	114	119	121	126	130
	0	20	33	42	48	53	56	58		0	75	90	100	102	101	100	97
8	0	28	42	51	57	61	64	66	18	0	12	20	26	37	41	44	45
	0	20	27	30	31	32	32	33		0	16	27	37	44	48	50	56
	0	8	26	37	47	53	58	61		0	10	16	21	24	27	29	30
	0	5	20	29	36	41	45	47		0	11	19	25	29	30	28	21
9	0	5	10	14	17	19	21	22	19	0	14	22	3	39	45	51	56
	0	20	34	45	50	48	40	40		0	9	15	22	31	39	45	49
	0	15	24	30	38	46	52	53		0	15	25	35	40	45	50	50
	0	26	30	35	40	45	48	50		0	35	46	52	55	57	59	60
10	0	3	5	7	8	9	10	10	20	0	15	25	40	50	62	73	82
	0	5	8	10	12	13	14	15		0	30	49	63	69	68	62	55
	0	8	13	17	20	23	25	27		0	50	68	82	92	100	107	112
	0	6	10	13	15	16	16	16		0	83	105	114	116	115	110	105

Окончание табл. 6.2.1

№ вар.	Исходные данные							
21	0	15	26	37	46	53	59	63
	0	15	24	30	36	40	43	45
	0	9	30	33	31	39	45	49
	0	24	36	42	46	48	49	49
22	0	37	64	87	105	120	134	145
	0	70	93	104	110	114	117	119
	0	61	80	93	100	106	112	116
	0	28	45	65	78	90	102	113
23	0	10	20	30	38	43	49	52
	0	13	25	37	47	55	61	66
	0	16	27	37	44	48	50	49
	0	10	17	23	29	34	38	41
24	0	6	13	20	27	33	38	41
	0	24	36	42	46	48	49	49
	0	25	41	52	57	59	57	53
	0	18	28	37	45	51	56	59
25	0	30	49	63	75	84	91	97
	0	22	37	49	59	68	76	82
	0	18	26	34	39	42	44	46
	0	16	27	37	44	48	50	56
26	0	6	13	20	27	35	38	41
	0	24	36	44	46	47	49	49
	0	25	41	52	57	58	57	53
	0	18	28	37	45	51	56	59
27	0	30	49	63	75	84	91	97
	0	22	37	46	59	68	76	82
	0	18	26	34	39	42	44	46
	0	16	27	37	44	48	50	56
28	0	28	42	52	57	61	64	66
	0	5	20	29	37	41	45	47
	0	8	26	37	47	53	58	61
	0	22	37	49	59	68	76	82
29	0	10	16	21	24	27	29	30
	0	11	19	26	30	33	35	36
	0	8	15	23	29	34	38	41
	0	14	26	37	46	49	48	44
30	0	20	27	27	31	32	32	33
	0	8	26	37	47	53	58	61
	0	5	20	29	36	41	45	47
	0	20	33	42	48	53	56	58
31	0	16	26	39	42	46	50	54
	0	9	15	23	31	39	45	49
	0	18	26	34	39	42	44	46
	0	15	25	32	38	42	46	48
32	0	20	27	28	31	32	32	33
	0	8	26	37	47	53	58	61
	0	5	20	29	36	41	45	47
	0	20	33	42	48	53	56	58
33	0	5	8	10	12	13	14	15
	0	5	10	14	17	19	21	22
	0	8	13	18	21	23	25	27
	0	6	13	20	27	33	38	41
34	0	10	20	34	38	43	49	52
	0	13	25	37	47	55	61	66
	0	16	27	37	44	48	50	49
	0	10	17	23	29	34	38	41
35	0	10	16	21	23	27	29	30
	0	11	19	26	30	35	35	36
	0	8	15	23	29	36	38	41
	0	14	26	37	46	49	48	44

7. Динамическая задача управления производством и запасами

7.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Предприятие производит партиями некоторые изделия. Предположим, что оно получило заказы на n месяцев. Размеры заказов значительно меняются от месяца к месяцу. Поэтому иногда лучше выполнять одной партией заказы нескольких месяцев, а затем хранить изделия, пока они не потребуются, чем выполнять заказ в тот именно месяц, когда этот заказ должен быть отправлен. Необходимо составить план производства на указанные n месяцев с учетом затрат на производство и хранение изделий. Обозначим:

x_j — число изделий, производимых в j-й месяц;

y_j — величина запаса к началу j-го месяца (это число не содержит изделий, произведенных в j-м месяце);

d_j — число изделий, которые должны быть отгружены в j-й месяц;

$f_j(x_j, y_{j+1})$ — затраты на хранение и производство изделий в j-м месяце.

Будем считать, что величины запасов к началу первого месяца y_1 и к концу последнего y_{n+1} заданы.

Задача состоит в том, чтобы найти план производства

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{7.1.1}$$

компоненты которого удовлетворяют условиям материального баланса

$$x_j + y_j - d_j = y_{j+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{7.1.2}$$

и минимизируют суммарные затраты за весь планируемый период

$$z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j, y_{j+1}), \tag{7.1.3}$$

причем по смыслу задачи

$$x_j \geqslant 0, \qquad y_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.1.4}$$

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, заметим, что для любого месяца j величина y_{j+1} запаса к концу месяца должна удовлетворять ограничениям

$$0 \leqslant y_{j+1} \leqslant d_{j+1} + d_{j+2} + \cdots + d_n, \tag{7.1.5}$$

т. е. объем производимой продукции x_j на этапе j может быть настолько велик, что запас y_{j+1} удовлетворяет спрос на всех последующих этапах, но не имеет смысла иметь y_{j+1} больше суммарного спроса на всех последующих этапах. Кроме того, из соотношений (7.1.2) и (7.1.4) непосредственно следует, что переменная x_j должна удовлетворять ограничениям

$$0 \leqslant x_j \leqslant d_j + y_{j+1}. \tag{7.1.6}$$

Следует также заметить, что переменные x_j, y_j могут принимать только целые неотрицательные значения, т. е. мы получили задачу целочисленного нелинейного программирования.

Будем решать задачу (7.1.1)—(7.1.6) методом динамического программирования.

Введем параметр состояния и составим функцию состояния.

За параметр состояния ξ примем наличный запас в конце k-го месяца

$$\xi = y_{k+1},$$

а функцию состояния $F_k(x)$ определим как минимальные затраты за первые k месяцев при выполнении условия (7.1.5):

$$F_k(\xi) = \min_{x_1, x_2, \dots, x_k} \sum_{j=1}^{k} f_j(x_j, y_{j+1}),$$

где минимум берется по неотрицательным целым значениям $x_1, x_2, \dots, x_k$, удовлетворяющим условиям

$$x_j + y_j - d_j = y_{j+1}, \qquad j = 1, 2, \dots, k-1,$$

$$x_k + y_k - d_k = \xi. \tag{7.1.7}$$

Учитывая, что

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_k} \sum_{j=1}^{k} (x_j, y_{j+1}) = \min_{x_k} \left\{ f_k(x_k, y_{k+1}) + \min_{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} f_j(x_j, y_{j+1}) \right\},$$

и величина запаса y_k к концу $(k-1)$-го периода, как видно из уравнения (7.1.7), равна

$$y_k = \xi + d_k - x_k,$$

приходим к рекуррентному соотношению

$$F_k(\xi) = \min_{x_k} \left\{ f_k(x_k, \xi) + F_{k-1}(\xi + d_k - x_k) \right\},$$

где минимум берется по единственной переменной x_k, которая, согласно (7.1.6), может изменяться в пределах

$$0 \leqslant x_k \leqslant d_k + \xi,$$

принимая целые значения, причем верхняя граница зависит от значений параметра состояния, изменяющегося в пределах

$$0 \leqslant \xi \leqslant d_{k+1} + d_{k+1}2 + \cdots + d_n\,, \tag{7.1.8}$$

а индекс k может принимать значения

$$k = 2, 3, 4, \ldots, n.$$

Если $k = 1$, то

$$F_1(\xi = y_2) = \min_{x_1} f_1(x_1, \xi),$$

где

$$x_1 = \xi + d_1 - y_1\,,$$

$$0 \leqslant \xi \leqslant d_2 + d_3 + \cdots + d_n\,,$$

т. е. на начальном этапе при фиксированном уровне y_1 исходного запаса каждому значению параметра ξ отвечает только одно значение переменной x_1, что несколько уменьшает объем вычислений.

Применив известную вычислительную процедуру динамического программирования, на последнем шаге (при $k = n$) находим значение последней компоненты x_n^* оптимального решения, а остальные компоненты определяем как

$$x_k^* = x_k^*\left(y_{n+1} + \sum_{j=k+1}^{n} \left(d_j - x_j^* \right) \right), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Рассмотрим более подробно функции затрат $f_j(x_j, y_{j+1})$ и рекуррентные соотношения. Пусть

$$\varphi_j(x_j) = ax_j^2 + bx_j + c\,,$$

$\varphi_j(x_j)$ — затраты на производство (закупку) x_j единиц продукции на этапе j;

h_j — затраты на хранение единицы запаса, переходящей из этапа j в этап $j + 1$.

Тогда затраты на производство и хранение на этапе j равны

$$f_j(x_j, y_{j+1}) = \varphi_j(x_j) + h_j y_{j+1} = ax_j^2 + bx_j + c + h_j y_{j+1}\,.$$

Выведенные ранее рекуррентные соотношения динамического программирования для решения задачи управления производством и запасами в нашем случае принимают вид

$$F_k(\xi = y_{k+1}) = \min_{x_k} \left\{ ax_k^2 + bx_k + c + h_k y_{k+1} + F_{k-1}(y_k) \right\}, \tag{7.1.9}$$

где

$$k = 2, 3, 4, \ldots, n,$$

$$0 \leqslant y_{k+1} \leqslant d_{k+1} + d_{k+2} + \cdots + d_n ,$$

$$0 \leqslant x_k \leqslant d_k + y_{k+1} , \qquad (7.1.10)$$

$$y_k = y_{k+1} + d_k - x_k .$$

Если же $k = 1$, то

$$F_1(\xi = y_2) = \min_{x_1}\left\{ax_1^2 + bx_1 + h_1y_2\right\} , \qquad (7.1.11)$$

$$0 \leqslant y_2 \leqslant d_2 + d_3 + \cdots + d_n , \qquad (7.1.12)$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant d_1 + y_2 \qquad (7.1.13)$$

$$x_1 + y_1 - d_1 = y_2$$

Остается заметить, что полезно обозначить выражение в фигурных скобках в (7.1.9) через

$$\Omega_k(x_k, y_{k+1}) = ax_k^2 + bx_k + c + h_ky_{k+1} + F_{k-1}(y_k)$$

и записать рекуррентное соотношение (7.1.9) в виде

$$F_k(\xi = y_{k+1}) = \min_{x_k} \Omega_k(x_k, y_{k+1}), \qquad (7.1.14)$$

где минимум берется по целочисленной переменной x_k, удовлетворяющей условию (7.1.10).

Пример 7.1.1. Рассмотрим трехэтапную систему управления запасами с дискретной продукцией и динамическим детерминированным спросом.

Пусть спрос (заявки) потребителей на нашу продукцию составляют: на первый этап $d_1 = 3$ единицы, на второй — $d_2 = 2$, на третий — $d_3 = 4$ единицы. К началу первого этапа на складе имеется только 2 единицы продукции, т. е. начальный уровень запаса равен $y_1 = 2$. Затраты на хранение единицы продукции на разных этапах различны и составляют соответственно $h_1 = 1, h_2 = 3, h_3 = 2$. Затраты на производство x_j единиц продукции на j-м этапе определяются функцией

$$\varphi_j(x_j) = x_j^2 + 5x_j + 2, \qquad j = 1, 2, 3 ,$$

т. е. $a = 1$, $b = 5$, $c = 2$. Требуется указать, сколько единиц продукции на отдельных этапах следует производить, чтобы заявки потребителей были удовлетворены, а наши общие затраты на производство и хранение за все три этапа были наименьшими.

Исходные данные задачи можно кратко записать следующим образом:

d_1	d_2	d_3	a	b	c	h_1	h_2	h_3	y_1
1	2	4	1	5	3	1	3	2	2

Решение. Воспользовавшись рекуррентными соотношениями, последовательно вычисляем $F_1(\xi = y_2), F_2(\xi = y_3), F_3(\xi = y_4)$ и соответственно находим $x_1^*(\xi = y_2)$, $x_2^*(\xi = y_3)$, $x_3^*(\xi = y_2)$.

Положим $k = 1$. Согласно (7.1.11) имеем

$$F_1(\xi = y_2) = \min_{x_1}\left\{x_1^2 + 5x_1 + 2 + y_2\right\}.$$

Учтем, что согласно (7.1.12) параметр состояния $\xi = y_2$ может принимать целые значения на отрезке

$$0 \leqslant y_2 \leqslant d_2 + d_3,$$
$$0 \leqslant y_2 \leqslant 2 + 4,$$

т. е.

$$y_2 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

При этом, вообще говоря, каждому значению параметра состояния должна отвечать определенная область изменения переменной x_1, характеризуемая условием (7.1.13)

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 3 + y_2.$$

Однако на первом этапе объем производства x_1 не может быть меньше единицы, так как спрос $d_1 = 3$, а исходный запас $y_1 = 2$. Более того, из балансового уравнения

$$x_1 + y_1 - d_1 = y_2$$

непосредственно следует, что объем производства связан со значением параметра состояния $\xi = y_2$ соотношением

$$x_1 = y_2 + d_1 - y_1 = y_2 + 3 - 2 = y_2 + 1. \tag{7.1.15}$$

В этом и состоит особенность первого этапа. Если задан уровень запаса к началу первого этапа, то каждому значению y_2 отвечает единственное значение x_1, и потому

$$F_1(\xi = y_2) = \Omega_1(x_1, y_2).$$

Придавая y_2 различные целые значения от 0 до 6 и учитывая (7.1.15), находим:

$$y_2 = 0,\quad x_1 = 0 + 1 = 1,\quad \Omega_1(1,0) = 1^2 + 5\cdot 1 + 2 + 1\cdot 0 = 8,$$
$$y_2 = 1,\quad x_1 = 1 + 1 = 2,\quad \Omega_1(2,1) = 2^2 + 5\cdot 2 + 2 + 1\cdot 1 = 17$$

и т.д. Значения функции состояния $F_1(\xi)$ представлены в табл. 7.1.1.

Таблица 7.1.1

$\xi = y_2$	0	1	2	3	4	5	6
$F_1(\xi = y_2)$	8	17	28	41	56	73	92
$x_1^*(\xi = y_2)$	1	2	3	4	5	6	7

Переходим ко второму этапу. Полагаем $k = 2$ и табулируем функцию $F_2(\xi = y_3)$ с помощью соотношения (7.1.14):

$$\begin{aligned} F_2(\xi = y_3) &= \min_{x_2}\Omega_2(x_2, y_3) = \min_{x_2}\left\{ax_2^2 + bx_2 + c + h_2 y_3 + F_1(y_2)\right\} = \\ &= \min_{x_2}\left\{x_2^2 + 5x_2 + 2 + 3y_3 + F_1(y_2)\right\}. \end{aligned} \tag{7.1.16}$$

Здесь минимум берется по единственной переменной x_2, которая может изменяться, согласно (3.7.10), в пределах

$$0 \leqslant x_2 \leqslant d_2 + y_3 \quad \text{или} \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 2 + y_3 \tag{7.1.17}$$

где верхняя граница зависит от параметра состояния $\xi = y_3$, который, согласно (3.7.8), принимает значения на отрезке

$$0 \leqslant y_3 \leqslant d_3, \quad \text{т. е.} \quad 0 \leqslant y_3 \leqslant 4,$$

а аргумент y_2 в последнем слагаемом справа в соотношении (7.1.16) связан с x_2 и y_3 балансовым уравнением

$$x_2 + y_2 - d_2 = y_3,$$

откуда следует, что

$$y_2 = y_3 + d_2 - x_2 = y_3 + 2 - x_2. \tag{7.1.18}$$

Придавая параметру состояния различные значения от 0 до 4, будем последовательно вычислять $\Omega_2(x_2, \xi)$, а затем определять $F_2(\xi)$ и $\tilde{x}_2(\xi)$.

Положим, например, $\xi = y_3 = 2$. Тогда, согласно (7.1.17),

$$0 \leqslant x_2 \leqslant 4,$$

т. е. переменная x_2 может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, а каждому значению x_2 отвечает определенное значение y_2, вычисляемое по формуле (7.1.18):

$$y_2 = 4 - x_2.$$

Последовательно вычисляем:

если $x_2 = 0$, то $y_2 = 4 - 0 = 4$, $\Omega_2(0, 2) = 0^2 + 5 \cdot 0 + 2 + 3 \cdot 2 + F_1(4) = 8 + 56 = 64$,

$x_2 = 1$, $y_2 = 4 - 1 = 3$, $\Omega_2(1, 2) = 1^2 + 5 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 2 + F_1(3) = 14 + 41 = 55$,

$x_2 = 2$, $y_2 = 4 - 2 = 2$, $\Omega_2(2, 2) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 2 + F_1(2) = 22 + 28 = 50$,

$x_2 = 3$, $y_2 = 4 - 3 = 1$, $\Omega_2(3, 2) = 3^2 + 5 \cdot 3 + 2 + 3 \cdot 2 + F_1(1) = 32 + 17 = \boxed{\mathbf{49}}$,

$x_2 = 4$, $y_2 = 4 - 4 = 0$, $\Omega_2(4, 2) = 4^2 + 5 \cdot 4 + 2 + 3 \cdot 2 + F_1(0) = 44 + 8 = 52$.

Наименьшее из полученных значений Ω_2 — это $F_2(2)$, т. е.

$$F_2(\xi = y_3 = 2) = \min_{x_2} \Omega_2(x_2, 2) = \min\{64,\ 55,\ 50,\ 49,\ 52\} = 49,$$

причем минимум достигается при значении x_2, равном

$$x_2^*(\xi = y_3 = 2) = 3.$$

Аналогично для значения параметра $\xi = y_3 = 3$, проведя необходимые вычисления, найдем

$$F_2(\xi = y_3 = 3) = 63, \quad x_2^*(\xi = y_3 = 3) = 3.$$

Процесс табулирования функции $F_2(\xi = y_3)$ приведен в табл. 7.1.2, а результаты табулирования сведены в табл. 7.1.3.

Переходим к следующему этапу. Полагаем $k = 3$ и табулируем функцию $F_3(\xi = y_4)$:

$$F_3(\xi = y_4) = \min_{x_3} \left\{ a x_3^2 + b x_3 + c + h_3 y_4 + F_2(y_3) \right\}.$$

Вычисляем значение функции состояния только для одного значения аргумента $\xi = y_4 = 0$, так как не хотим оставлять продукцию в запас в конце исследуемого периода. Процесс вычислений приведен в табл. 7.1.4. Получаем

$$F_3(\xi = y_4) = \min_{x_3} \Omega_3(x_3, 0) = \min\{80, 71, 65, 62, 62\} = 62,$$

причем минимум достигается при двух значениях переменной x_3, равных

$$x_3^*(\xi = y_4 = 0) = 3 \quad \text{или} \quad x_3^{**}(\xi = y_4 = 0) = 4.$$

Таким образом, мы получили не только минимальные общие затраты на производство и хранение продукции, но и последнюю компоненту оптимального решения. Она равна $x_3^* = 3$ или $x_3^{**} = 4$.

Рассмотрим случай, когда на последнем этапе планируется выпускать три единицы продукции:

$$x_3^* = 3.$$

Остальные компоненты оптимального решения найдем по обычным правилам метода динамического программирования. Чтобы найти предпоследнюю компоненту, учтем, что

$$x_3 + y_3 - d_3 = y_4 \quad \text{или} \quad 3 + y_3 - 4 = 0,$$

откуда

$$y_3 = 1.$$

Из табл. 7.1.3 значений $x_2^*(\xi)$ находим

$$x_2^* = x_2^*(\xi = y_3 = 1) = 2.$$

Аналогично, продолжая двигаться в обратном направлении и учитывая, что

$$x_2 + y_2 - d_2 = y_3 \quad \text{или} \quad 2 + y_2 - 2 = 1,$$

получаем

$$y_2 = 1;$$

из табл. 7.1.2 значений $x_1^*(\xi)$ находим

$$x_1^* = x_1^*(\xi = y_2 = 1) = 2.$$

Таблица 7.1.2

$0\leqslant y_{k+1}\leqslant \sum\limits_{j=k+1}^{n} d_j$	$\xi = y_{k+1}$	$0 \leqslant x_k \leqslant d_k + y_{k+1}$	x_k	$y_k = y_{k+1} + d_k - x_k$	$\Omega_k(x_k, y_{k+1}) = \varphi_k(x_k) + h_k y_{k+1} + F_{k-1}(y_k)$
$0\leqslant y_3\leqslant d_3$	$\xi = y_3$	$0 \leqslant x_2 \leqslant d_2 + y_3$	x_2	$y_2 = y_3 + d_2 - x_2$	$\Omega_2(x_2, y_3) = ax_2^2 + bx_2 + c + h_2 y_3 + F_1(y_2)$
$0\leqslant y_3\leqslant 4$	$\xi = y_3$	$0 \leqslant x_2 \leqslant 2 + y_3$	x_2	$y_2 = y_3 + 2 - x_2$	$\Omega_2(x_2, y_3) = x_2^2 + 5x_2 + 2 + 3y_3 + F_1(y_2)$
	$y_3 = 0$	$0 \leqslant x_2 \leqslant 2$	$x_2 = 0$ $x_2 = 1$ $x_2 = 2$	$y_2 = 2 - 0 = 2$ $y_2 = 2 - 1 = 1$ $y_2 = 2 - 2 = 0$	$\Omega_2(0,0) = 0^2 + 5\cdot 0 + 2 + 3\cdot 0 + F_1(2) = 2 + 28 = 30$ $\Omega_2(1,0) = 1^2 + 5\cdot 1 + 2 + 3\cdot 0 + F_1(1) = 8 + 17 = 25$ $\Omega_2(2,0) = 2^2 + 5\cdot 2 + 2 + 3\cdot 0 + F_1(0) = 16 + 8 = \boxed{\mathbf{24}}$
	$y_3 = 1$	$0 \leqslant x_2 \leqslant 3$	$x_2 = 0$ $x_2 = 1$ $x_2 = 2$ $x_2 = 3$	$y_2 = 3 - 0 = 3$ $y_2 = 3 - 1 = 2$ $y_2 = 3 - 2 = 1$ $y_2 = 3 - 3 = 0$	$\Omega_2(0,1) = 0^2 + 5\cdot 0 + 2 + 3\cdot 1 + F_1(3) = 5 + 41 = 46$ $\Omega_2(1,1) = 1^2 + 5\cdot 1 + 2 + 3\cdot 1 + F_1(2) = 11 + 28 = 39$ $\Omega_2(2,1) = 2^2 + 5\cdot 2 + 2 + 3\cdot 1 + F_1(1) = 19 + 17 = \boxed{\mathbf{36}}$ $\Omega_2(3,1) = 3^2 + 5\cdot 3 + 2 + 3\cdot 1 + F_1(0) = 29 + 8 = 37$
	$y_3 = 2$	…	…	…	…
	$y_3 = 3$	$0 \leqslant x_2 \leqslant 5$	$x_2 = 0$ $x_2 = 1$ $x_2 = 2$ $x_2 = 3$ $x_2 = 4$ $x_2 = 5$	$y_2 = 5 - 0 = 5$ $y_2 = 5 - 1 = 4$ $y_2 = 5 - 2 = 3$ $y_2 = 5 - 3 = 2$ $y_2 = 5 - 4 = 1$ $y_2 = 5 - 5 = 0$	$\Omega_2(0,3) = 0^2 + 5\cdot 0 + 2 + 3\cdot 3 + F_1(5) = 11 + 73 = 84$ $\Omega_2(1,3) = 1^2 + 5\cdot 1 + 2 + 3\cdot 3 + F_1(4) = 17 + 56 = 73$ $\Omega_2(2,3) = 2^2 + 5\cdot 2 + 2 + 3\cdot 3 + F_1(3) = 25 + 41 = 66$ $\Omega_2(3,3) = 3^2 + 5\cdot 3 + 2 + 3\cdot 3 + F_1(2) = 35 + 28 = \boxed{\mathbf{63}}$ $\Omega_2(4,3) = 4^2 + 5\cdot 4 + 2 + 3\cdot 3 + F_1(1) = 47 + 17 = 64$ $\Omega_2(5,3) = 5^2 + 5\cdot 5 + 2 + 3\cdot 3 + F_1(0) = 61 + 8 = 69$
	$y_3 = 4$	$0 \leqslant x_2 \leqslant 6$	$x_2 = 0$ $x_2 = 1$ $x_2 = 2$ $x_2 = 3$ $x_2 = 4$ $x_2 = 5$ $x_2 = 6$	$y_2 = 6 - 0 = 6$ $y_2 = 6 - 1 = 5$ $y_2 = 6 - 2 = 4$ $y_2 = 6 - 3 = 3$ $y_2 = 6 - 4 = 2$ $y_2 = 6 - 5 = 1$ $y_2 = 6 - 6 = 0$	$\Omega_2(0,4) = 0^2 + 5\cdot 0 + 2 + 3\cdot 4 + F_1(6) = 14 + 92 = 106$ $\Omega_2(1,4) = 1^2 + 5\cdot 1 + 2 + 3\cdot 4 + F_1(5) = 20 + 73 = 93$ $\Omega_2(2,4) = 2^2 + 5\cdot 2 + 2 + 3\cdot 4 + F_1(4) = 28 + 56 = 84$ $\Omega_2(3,4) = 3^2 + 5\cdot 3 + 2 + 3\cdot 4 + F_1(3) = 38 + 41 = 79$ $\Omega_2(4,4) = 4^2 + 5\cdot 4 + 2 + 3\cdot 4 + F_1(2) = 50 + 28 = \boxed{\mathbf{78}}$ $\Omega_2(5,4) = 5^2 + 5\cdot 5 + 2 + 3\cdot 4 + F_1(1) = 64 + 17 = 81$ $\Omega_2(6,4) = 6^2 + 5\cdot 6 + 2 + 3\cdot 4 + F_1(0) = 80 + 8 = 88$

Таблица 7.1.3

$\xi = y_3$	0	1	2	3	4
$F_2(\xi = y_3)$	24	36	49	63	78
$x_2^*(\xi = y_3)$	2	2	3	3	4

Таблица 7.1.4

$0 \leqslant y_{k+1} \leqslant \sum\limits_{j=k+1}^{n} d_j$	$\xi = y_{k+1}$	$0 \leqslant x_k \leqslant d_k + y_{k+1}$	x_k	$y_k = y_{k+1} + d_k - x_k$	$\Omega_k(x_k, y_{k+1}) = \varphi_k(x_k) + h_k y_{k+1} + F_{k-1}(y_k)$
$0 \leqslant y_4 \leqslant 0$	$\xi = y_4$	$0 \leqslant x_3 \leqslant d_3 + y_4$	x_3	$y_3 = y_4 + d_3 - x_3$	$\Omega_3(x_3, y_4) = a x_3^2 + b x_3 + c + h_3 y_4 + F_2(y_3)$
$y_4 = 0$	$\xi = y_4$	$0 \leqslant x_3 \leqslant 4$	x_3	$y_3 = y_4 + d_3 - x_3$	$\Omega_3(x_3, y_4) = a x_3^2 + b x_3 + c + h_3 y_4 + F_2(y_3)$
	$y_4 = 0$	$0 \leqslant x_3 \leqslant 4$	$x_3 = 0$ $x_3 = 1$ $x_3 = 2$ $x_3 = 3$ $x_3 = 4$	$y_3 = 4 - 0 = 4$ $y_3 = 4 - 1 = 3$ $y_3 = 4 - 2 = 3$ $y_3 = 4 - 3 = 1$ $y_3 = 4 - 4 = 0$	$\Omega_3(0,0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + 2 + 3 \cdot 0 + F_2(4) = 2 + 78 = 80$ $\Omega_3(1,0) = 1^2 + 5 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 0 + F_2(3) = 8 + 63 = 71$ $\Omega_3(2,0) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 0 + F_2(2) = 16 + 49 = 65$ $\Omega_3(3,0) = 3^2 + 5 \cdot 3 + 2 + 3 \cdot 0 + F_2(1) = 26 + 36 = \boxed{\mathbf{62}}$ $\Omega_3(4,0) = 4^2 + 5 \cdot 4 + 2 + 3 \cdot 0 + F_2(0) = 38 + 24 = \boxed{\mathbf{62}}$

Таблица 7.1.5

Самопроверка результатов

Этап	Январь	Февраль	Март	Итого за 3 месяца
Имеем продукции к началу месяца, шт.	$y_1 = 2$	$y_2 = 1$	$y_3 = 1$	$y_1 = 2$
Производим в течение месяца, шт.	$x_1 = 2$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_1 + x_2 + x_3 = 7$
Отпускаем заказчикам, шт.	$d_1 = 3$	$d_2 = 2$	$d_3 = 4$	$d_1 + d_2 + d_3 = 9$
Остаток к концу месяца (храним в течение текущего месяца), шт.	$y_2 = 1$	$y_3 = 1$	$y_4 = 0$	—
Затраты на производство, руб.	$\varphi(x_1) = 16$	$\varphi(x_2) = 16$	$\varphi(x_3) = 26$	$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) = 58$
Затраты на хранение, руб.	$h_1 y_2 = 1$	$h_2 y_3 = 3$	0	$h_1 y_2 + h_2 y_3 = 4$

Итак, оптимальный план производства имеет вид

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 3,$$

а минимальные общие затраты составляют 62 единицы.

Полезна с а м о п р о в е р к а полученного результата. Для этого по исходным данным и найденному плану производства заполняем табл. 7.1.5 и убеждаемся, что заявки потребителей на каждом этапе выполняются

$$\begin{aligned} &y_1 + x_1 \geqslant d_1, \quad &y_2 + x_2 \geqslant d_2, \quad &y_3 + x_3 \geqslant d_3, \\ &2 + 2 \geqslant 3, &1 + 2 \geqslant 2, &1 + 3 \geqslant 4, \end{aligned}$$

и что суммарный объем производства и имевшегося к началу первого этапа запаса продукции равен суммарной потребности

$$\begin{aligned} &y_1 + x_1 + x_2 + x_3 = d_1 + d_2 + d_3, \\ &2 + 2 + 2 + 3 = 3 + 2 + 4, \end{aligned}$$

причем это достигается при наименьших возможных затратах на производство и хранение продукции:

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + h_1 y_2 + h_2 y_3 = F_3(y_4 = 0), \\ &16 + 16 + 26 + 1 + 4 = 62. \end{aligned}$$

Студенту рекомендуется найти другой вариант оптимальной производственной программы, когда на последнем этапе предполагается произвести четыре единицы продукции, и выполнить самопроверку. ❑

7.2. Задание практикума

Рассматривается трехэтапная система управления запасами с дискретной продукцией и динамическим детерминированным спросом.

Заявки потребителей на продукцию составляют на этапе j равен d_j единиц ($j = 1, 2, 3$).

К началу первого этапа на складе имеется только y_1 единицы продукции.

Затраты на хранение единицы продукции на этапе j равны h_j.

Затраты на производство x_j единиц продукции на j-м этапе определяются функцией $\varphi_j(x_j) = ax_j^2 + bx_j + c, \quad j = 1, 2, 3$.

Требуется указать, сколько единиц продукции на отдельных этапах следует производить, чтобы заявки потребителей были удовлетворены, а общие затраты на производство и хранение за все три этапа были наименьшими.

Для этого необходимо составить математическую модель динамической задачи управления производством и запасами и решить ее методом динамического программирования, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса.

Исходные данные приведены для каждого варианта в табл. 7.2.1.

Таблица 7.2.1

№ вар.	Исходные данные									
	d_1	d_2	d_3	a	b	c	h_1	h_2	h_3	y_1
1	5	6	7	2	3	4	4	3	2	2
2	3	2	3	1	2	2	4	3	2	3
3	5	2	3	2	2	2	4	5	6	4
4	2	3	3	2	3	4	3	2	2	2
5	3	2	3	1	3	2	4	3	2	1
6	3	2	4	5	1	0	3	3	3	2
7	3	2	4	8	1	1	1	0	1	0
8	6	2	4	3	4	3	2	1	3	1
9	5	4	3	4	4	4	5	0	4	2
10	7	3	4	2	1	3	2	5	7	4
11	3	3	4	2	3	4	2	3	1	3
12	3	2	3	2	2	1	2	3	4	3
13	1	2	3	2	3	1	1	2	3	1
14	2	3	2	5	1	1	3	2	1	2
15	4	2	2	1	1	2	6	4	1	0
16	7	0	4	3	4	0	3	3	3	2
17	2	2	2	1	1	5	1	2	4	2
18	5	1	2	2	0	6	2	1	1	4
19	3	1	2	4	1	2	6	3	5	0
20	6	0	3	1	3	3	5	3	1	4
21	4	5	2	3	3	3	4	0	5	2
22	4	5	1	5	0	2	4	7	0	4
23	5	3	1	2	4	3	5	4	3	1
24	6	2	1	4	0	5	3	4	1	5
25	3	2	1	4	5	0	5	4	0	2
26	7	6	0	1	0	5	4	5	3	4
27	5	5	2	1	0	1	3	4	4	4
28	4	5	2	5	0	4	4	4	4	4
29	6	5	1	4	1	1	3	7	0	3
30	4	3	3	4	3	2	1	3	2	3
31	6	5	1	2	4	1	4	4	4	4
32	3	0	4	4	4	4	1	3	4	3
33	5	0	3	6	0	4	1	1	1	2
34	4	6	2	6	0	4	4	4	4	4
35	6	5	2	2	3	1	4	4	4	3

8. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ

8.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Широкое распространение в задачах управления получили модели в виде графов благодаря дополнительным возможностям, которые появляются при геометрическом подходе к описанию и трактовке процессов управления. Среди графовых моделей особую роль играют потоковые модели, часто называемые транспортными сетями только из-за того, что первоначально они возникли при решении транспортной задачи. К транспортным сетям сводятся многие практические задачи управления, например, задача об оптимальном назначении, о складе, о поставщике, о спросе и предложении, о кратчайшем пути, об оптимальном использовании дорог, об оптимальном по стоимости (или по времени) сетевом графике инвестиционного проекта и другие.

Графом называется пара объектов, состоящая из множества точек и множества отрезков, соединяющих некоторые из этих точек (может быть, все). Упомянутые точки называются *вершинами графа*. Если отрезки, соединяющие вершины графа, имеют направления, то граф называется *ориентированным*, а сами отрезки — *дугами*. Если же отрезки не имеют направления, то граф называется *неориентированным*, и в этом случае говорят, что вершины графа соединены *ребрами*. *Смешанным* называется граф, в котором содержатся как ориентированные, так и неориентированные отрезки. Ориентированный граф часто называют *сетью*.

Обозначим вершины графа $X_1, X_2, \dots, X_n$, а дугу, соединяющую вершину X_i с X_j в направлении от X_i к X_j — u_{ij}. Граф Γ, образованный множеством вершин $\mathcal{X}$ и множеством дуг $\mathcal{U}$, обозначают $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{U})$.

Например, план города можно рассматривать как смешанный граф, в котором дуги и ребра представляют улицы, а вершины — перекрестки, при этом улица с односторонним движением изображается дугой, а с двусторонним — отрезком без ориентации.

Две дуги графа (два ребра) называются *смежными*, если они различны и имеют общую вершину. Две вершины графа называются *смежными*, если существует дуга (ребро), соединяющая их.

Говорят, что дуга *исходит из вершины* X_i, если X_i является ее началом. Дуга *заходит в вершину* X_j, если X_j является ее концом. Такую дугу мы обозначим через u_{ij}.

Говорят, что в графе данная дуга *инцидентна* данной вершине, если эта вершина является началом или концом данной дуги.

Обозначим $U^+_{X_i}$ множество дуг, исходящих их данной вершины X_i, а $U^-_{X_i}$ — множество дуг, входящих в X_i. Их объединение есть множество дуг U_{X_i}, инцидентных данной вершине.

$$U_{X_i} = U^+_{X_i} \cup U^-_{X_i}.$$

Путь в ориентированном графе — это последовательность дуг, в которой конец предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Обозначим

$$\mu = \left\{X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}\right\}$$

путь, последовательность вершин которого $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$.

Путь, в котором ни одна вершина не встречается дважды, называется *элементарным*. Путь, в котором ни одна дуга не встречается дважды, называется *простым*, в противном случае — *составным*. Конечный путь, у которого конечная вершина совпадает с начальной, называется *контуром*. Контур, образованный одной дугой, называется *петлей*.

Ориентированный граф называется *симметрическим*, если любые две смежные вершины его соединены двумя противоположно ориентированными дугами. Ориентированный граф называется *антисимметрическим*, если каждая пара смежных вершин соединена только в одном направлении и петли отсутствуют.

Для неориентированных графов вводятся понятия, аналогичные понятиям пути, контура и др. Меняются только названия: вместо дуги говорим *ребро*, вместо пути — *цепь*, вместо контура — *цикл* и т. д.

Неориентированный граф называется *связным*, если две любые вершины его можно соединить цепью. Конечный связный неориентированный граф, не имеющий циклов, называется *деревом*. Граф, представляющий объединение деревьев, называется *лесом*.

Рассмотрим **задачу о максимальном потоке в сети**.

Пусть нам дана некоторая совокупность географических пунктов или железнодорожных станций, связанных между собой автомобильными или железными дорогами. При планировании перевозок часто возникает задача об организации максимального потока грузов (т. е. перевозки максимального количества грузов в единицу времени) из одного пункта в другой с учетом того обстоятельства, что пропускная способность каждой дороги ограничена. Сформулируем эту задачу математически.

Каждая совокупность пунктов вместе с соединяющими их дорогами схематически может быть изображена в виде некоторой сети, в которой линии соответствуют дорогам, а пересечения — отдельным пунктам или станциям. Поэтому рассмотрим ориентированный граф с $(n+1)$ вершиной $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$, где некоторые упорядоченные пары точек X_i, X_j соединены дугами u_{ij}, причем каждой такой дуге поставлено в соответствие неотрицательное число $c_{ij} = c(u_{ij})$, называемое ее *пропускной способностью*.

Зафиксируем какие-нибудь две вершины графа, например, X_0 и X_n. По путям $\mu\{X_0, X_i, X_j, \ldots, X_k, X_n\}$ составленным из дуг $(X_0, X_i), (X_i, X_j), \ldots, (X_k, X_n)$ сети и не образующих контуров, направляется жидкость, газ или транспорт из точки X_0 сети в точку X_n. Назовем X_0 *входом сети*, X_n — *выходом*. Пропускная способность c_{ij} дуги (X_i, X_j) определяет максимальное количество вещества, которое может пропустить эта дуга за единицу времени. Если какая-то пара точек X_k, X_l не соединена дугой, то будем считать $c_{kl}=0$. Кроме того, будем считать рассматриваемый граф симметрическим, т. е. если в сеть входит дуга (X_i, X_j), то в нее входит и симметричная дуга (X_j, X_i), причем пропускные способности этих дуг могут быть различными: $c_{ij} \neq c_{ji}$.

Потоком z_{ij} *по дуге* (X_i, X_j) называется количество вещества, проходящее через эту дугу в единицу времени. *Потоком по сети*, или просто *потоком*, назовем совокупность $\{z_{ij}\}$ потоков по всем дугам сети. Будем считать, что потоки удовлетворяют следующим ограничениям:

$$0 \leqslant z_{ij} \leqslant c_{ij}, \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots, n, \qquad i \neq j, \tag{8.1.1}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_{ik} - \sum_{j=1}^{n} z_{kj} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{8.1.2}$$

Ограничения (8.1.1) означают, что поток по любой дуге неотрицателен и не превышает пропускной способности дуги.

В уравнениях (8.1.2) уменьшаемая сумма $z_{0k} + z_{1k} + \cdots + z_{n-1,k}$ представляет количество вещества, притекающего в вершину X_k по всем входящим в эту вершину дугам (если из X_l в X_k не входит дуга, то $z_{lk}=0$), а вычитаемая сумма $z_{k1} + z_{k2} + \cdots + z_{kn}$ представляет количество вещества, вытекающего из вершины X_k по всем выходящим из этой вершины дугам (также $z_{kl}=0$, если нет дуги (X_k, X_l).

Таким образом, ограничения (3.8.2) означают, что количество вещества, притекающего в произвольную точку сети (кроме X_0 и X_n), равно количеству вещества, вытекающего из этой точки. Поток, удовлетворяющий ограничениям (8.1.1) и (8.1.2), будем называть *допустимым*.

Из ограничений (8.1.2) также следует, что общее количество вещества $\sum\limits_{j=1}^{n} z_{0j}$, вытекающего из вершины X_0 (входа сети), совпадает с общим количеством вещества $\sum\limits_{i=0}^{n-1} z_{in}$, притекающего в вершину X_n (выход сети), т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} z_{0j} = \sum_{i=0}^{n-1} z_{in} = w. \tag{8.1.3}$$

Линейная форма w называется *величиной потока в сети*.

Таким образом, задача о максимальном потоке в сети представляет собой задачу линейного программирования: среди всех решений системы линейных ограничений (8.1.1)—(8.1.2) следует найти такое решение, которое максимизирует линейную форму (8.1.3). Это решение z_{ij}^* называется *максимальным потоком в сети*.

Как и любая задача линейного программирования, она может быть решена одним из известных методов линейного программирования. Но в силу специфики задачи ее легче решить специальными методами.

Введем некоторые дополнительные понятия. Разобьем множество всех вершин сети на два непересекающихся подмножества $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ так, чтобы $X_0 \in \mathcal{P}$, а $X_n \in \mathcal{Q}$. Сечением $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ сети назовем совокупность всех дуг (X_i, X_j), концы которых принадлежат разным подмножествам. Каждому сечению $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ поставим в соответствие число $C(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ — *пропускную способность сечения*, — равное сумме пропускных способностей всех дуг сети, начинающихся в $\mathcal{P}$ и кончающихся в $\mathcal{Q}$, т. е.

$$C(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \sum_{\substack{X_i \in \mathcal{P} \\ X_j \in \mathcal{Q}}} c_{ij}.$$

Любой путь из X_0 в X_n обязательно содержит хотя бы одну дугу сечения $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, которая начинается в $\mathcal{P}$ и кончается в $\mathcal{Q}$. Но пропускная способность пути не превышает пропускной способности каждой его дуги. Поэтому величина любого потока из X_0 в X_n, являющаяся суммарной пропускной способностью всех путей из X_0 в X_n, не может превысить пропускной способности любого сечения $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, т. е. всегда

$$w \leqslant C(\mathcal{P}, \mathcal{Q}).$$

Отсюда заключаем, что если удается построить такой поток $\{z_{ij}^*\}$, при котором величина его w^* окажется равной пропускной способности некоторого сечения $\left(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*\right)$, т. е. $w^* = C\left(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*\right)$, то этот поток будет максимальным, а $\left(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*\right)$ — сечением с минимальной пропускной способностью.

Введем еще одно понятие. Пусть задан некоторый поток $\{z_{ij}\}$. Будем говорить, что дуга u_{ij} с началом в X_i и концом в вершине X_j является *насыщенной*, если $z_{ij} = c_{ij}$, т. е. величина потока по этой дуге равна пропускной способности дуги. Если же величина потока по дуге меньше пропускной способности дуги $z_{ij} < c_{ij}$, то такую дугу называют *ненасыщенной*.

Алгоритм определения максимального потока (алгоритм Форда — Фалкерсона).

1. Построить какой-нибудь начальный поток $\{z_{ij}^0\}$.

2. Проверить, можно ли построить путь из X_0 в X_n, состоящий только из ненасыщенных дуг. Если нет, то построенный ранее поток максимален. Если да, то перейти к п. 3.

3. Выделить какой-нибудь путь, ведущий из X_0 в X_n по ненасыщенным дугам, найти минимальную пропускную способность дуг этого пути θ и увеличить поток через каждую дугу этого пути на θ. Построить новый поток. Перейти к п. 2.

Алгоритм может остановиться в том случае, если не удается построить путь из X_0 в X_n по ненасыщенным дугам. В противном случае алгоритм может быть продолжен. При этом на каждом шаге образуется по крайней мере одна новая насыщенная дуга. Так как число дуг в сети конечно, то п. 3 может выполняться лишь конечное число раз, поэтому указанный алгоритм обязательно построит максимальный поток, и притом за конечное число шагов.

Следует обратить особое внимание на выполнение п. 3. Если по некоторому пути μ мы пропустили поток величиной θ, то пропускные способности всех дуг этого пути следует уменьшить на θ, т. е. новая пропускная способность дуги (X_i, X_j) пути будет равна $c'_{ij} = c_{ij} - \theta$. Эта дуга может участвовать в последующем выборе нового пути, но с уменьшенной пропускной способностью. Поэтому вычисление новых пропускных способностей всех звеньев найденного пути совершенно необходимо. Кроме того, надо также учесть возможность существования вместо найденного пути другого, в котором участвует некоторая дуга, симметричная одной из дуг предыдущего пути. Для этого пропускные способности всех дуг, симметричных дугам старого пути ν, следует увеличить на θ, т. е. пропускную способность дуги (X_i, X_j), симметричной использованной в предшествующем пути дуге (X_i, X_j), надо считать равной $c'_{ji} = c_{ji} + \theta$. Это следует из того, что дуга (X_j, X_i) не препятствует доставке в X_i количества c_{ji} вещества по новому пути с использованием этой дуги плюс количества θ по части старого пути от X_0 до X_i без использования этой дуги (так как пропускная способность всех дуг старого пути не меньше θ). Мы учитываем, что X_i теперь соединена с X_0 двумя путями, т. е. получается, что дуга (X_j, X_i) как бы заменена новой дугой с увеличенной пропускной способностью $c_{ji} + \theta$.

Таким образом, процесс отыскания максимального потока в сети сводится к следующим действиям.

1. Построить произвольный путь μ из X_0 в X_n, идущий по *ненасыщенным* дугам.

2. Определить пропускную способность θ^μ найденного пути как наименьшую из пропускных способностей дуг этого пути

$$\theta^\mu = \min\{c_{ij}^\mu\}; \tag{8.1.4}$$

3. Вычислить новые пропускные способности всех дуг данного пути:

$$c_{ij}^\mu = c_{ij}^\mu - \theta^\mu; \tag{8.1.5}$$

4. Вычислить новые пропускные способности всех тех дуг, которые симметричны дугам данного пути

$$c_{ij}^\mu = c_{ij}^\mu + \theta^\mu; \tag{8.1.6}$$

5. Процесс, описанный в пп. 2—4, продолжается до тех пор, пока удается построить путь из X_0 в X_n, идущий по ненасыщенным дугам. Если такой путь построить нельзя, то это означает, что из источника X_0 в сток X_n пропущен максимальный поток. Затем следует вычесть пропускную способность соответствующей дуги исходной сети. *Положительные* значения найденных разностей определяют величины потоков по дугам в максимальном потоке данной сети, а величина максимального потока в сети равна

$$w^* = \sum_{j=1}^{n} z_{oj}^* = \sum_{i=0}^{n-1} z_{in}^* .$$

В заключение подчеркнем еще раз, что процесс преобразований прекращается, как только будет получена сеть, в которой нельзя построить ни одного пути из X_0 в X_n, идущего по ненасыщенным дугам.

Покажем, что полученный таким образом поток является максимальным. Для этого построим в последней сети сечение $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ следующим образом. Ко множеству $\mathcal{P}$ отнесем источник X_0 и все те вершины, которые достижимы из X_0 по какому-нибудь пути, составленному из ненасыщенных дуг, а все остальные вершины сети (недостижимые) отнесем к множеству $\mathcal{Q}$. Очевидно, $X_n \in \mathcal{Q}$, так как не существует никакого ненасыщенного пути из X_0 в X_n.

Все дуги сечения $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, направленные из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{Q}$, загружены полностью до пропускных способностей [т. е. для величины потока z_{ij} по дуге (X_i, X_j) при $X_i \in \mathcal{P}, X_j \in \mathcal{Q}$ имеем $z_{ij} = c_{ij}$], а дуги (X_j, X_i) противоположного направления, идущие из $\mathcal{Q}$ в $\mathcal{P}$, в построенном потоке не используются (т. е. $z_{ji} = 0$ при $X_j \in \mathcal{Q}, X_i \in \mathcal{P}$), так что величина потока равна

$$w = \sum_{\substack{X_i \in \mathcal{P} \\ X_j \in \mathcal{Q}}} z_{ij} - \sum_{\substack{X_i \in \mathcal{P} \\ X_j \in \mathcal{Q}}} z_{ji} = \sum_{\substack{X_i \in \mathcal{P} \\ X_j \in \mathcal{Q}}} c_{ij} = C(\mathcal{P}, \mathcal{Q}),$$

т. е. построенный поток максимален, а $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ — сечение с минимальной пропускной способностью (*минимальное сечение*).

Пример 8.1.1. Требуется определить максимальный поток в сети, изображенной на рис. 8.1.1, из вершины X_0 в вершину X_8, где числа на дугах, снабженные стрелками, означают пропускные способности этих дуг в указанных направлениях.

Решение. В качестве начального возьмем нулевой поток, когда все $z_{ij} = 0$.

Найдем какой-нибудь путь из X_0 в X_8, например, $\mu_1 = \{X_0, X_5, X_8\}$.

По этому пути можно пропустить поток величиной не более

$$\theta_1 = \min\{c_{05}, c_{58}\} = \min\{5,\ 2\} = 2 .$$

Предположим, что поток такой величины 2 по указанному пути мы пропустили. Получили новый поток $\{z'_{ij}\}$. При этом пропускные способности дуг пути и симметричных им дуг изменяются. Согласно (8.1.5) и (8.1.6) пропускные способности дуг пути уменьшаются на 2 единицы:

$$c'_{05} = c_{05} - \theta_1 = 5 - 2 = 3, \quad c'_{58} = c_{58} - \theta_1 = 2 - 2 = 0 ,$$

т. е. дуга (X_5, X_8) становится насыщенной, а пропускные способности дуг, симметричных дугам пути, увеличиваются на 2 единицы:

$$c'_{50} = c_{50} + \theta_1 = 4 + 2 = 6, \ c'_{85} = c_{85} + \theta_1 = 2 + 2 = 0 .$$

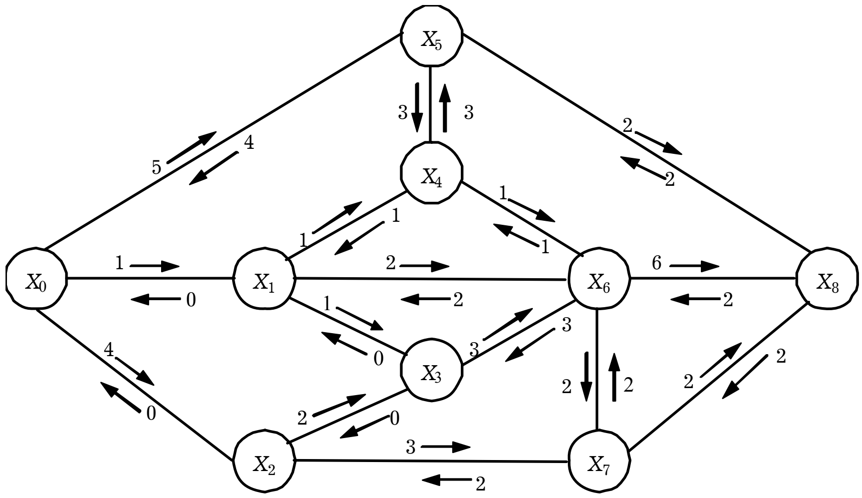


Рис. 8.1.1. *Сеть в примере 8.1.1*

Сеть с новыми пропускными способностями дуг приведена на рис. 8.1.2, *а*.

Теперь находим новый путь из X_0 в X_8, проходящий по ненасыщенным дугам, например, $\mu_2 = \{X_0, X_5, X_4, X_6, X_8\}$, определяем

$$\theta_2 = \min\{c_{05}, c_{54}, c_{46}, c_{68}\} = \min\{3, 3, 1, 6\} = 1$$

и пропускаем по этому пути поток величиной в одну единицу. Меняем пропускные способности дуг этого пути и симметричных им дуг:

$$\begin{aligned}
c''_{05} &= c'_{05} - \theta_2 = 3 - 1 = 2, \ c''_{50} = c'_{50} + \theta_2 = 6 + 1 = 7,\\
c''_{54} &= c'_{54} - \theta_2 = 3 - 1 = 2, \ c''_{45} = c'_{45} + \theta_2 = 3 + 1 = 4,\\
c''_{46} &= c'_{46} - \theta_2 = 1 - 1 = 0, \ c''_{64} = c'_{64} + \theta_2 = 1 + 1 = 2,\\
c''_{68} &= c'_{68} - \theta_2 = 6 - 1 = 5, \ c''_{86} = c'_{86} + \theta_2 = 2 + 1 = 3.
\end{aligned}$$

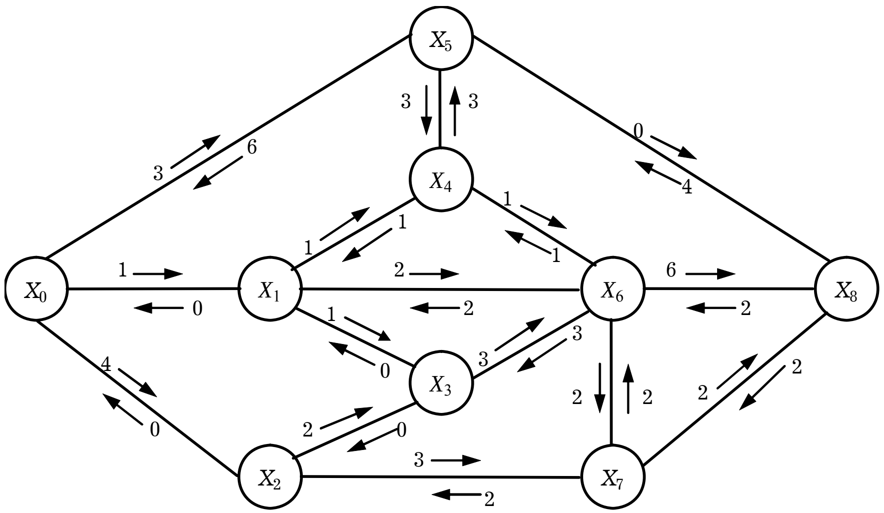
Дуга (X_4, X_6) становится насыщенной. Сеть с измененными пропускными способностями приведена на рис. 8.1.2, *б*.

Далее последовательно находим пути $\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ и по ним пропускаем потоки величиной $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ соответственно:

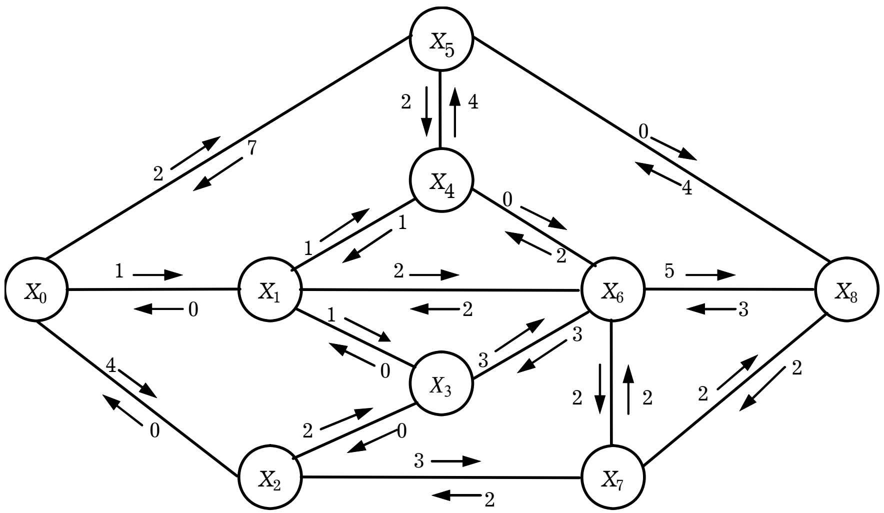
$$\mu_3 = \{X_0, X_5, X_4, X_1, X_6, X_8\}, \ \ \theta_3 = \min\{2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 5\} = 1 \ \ (\text{рис. } 8.1.2,\ \textit{в}),$$
$$\mu_4 = \{X_0, X_1, X_6, X_8\}, \ \ \theta_4 = \min\{1,\ 1,\ 4\} = 1 \ \ (\text{рис. } 8.1.2,\ \textit{г}),$$
$$\mu_5 = \{X_0, X_2, X_7, X_8\}, \ \theta_5 = \min\{4,\ 3,\ 2\} = 2 \ \ (\text{рис. } 8.1.2,\ \textit{д}),$$
$$\mu_6 = \{X_0, X_2, X_3, X_6, X_8\}, \ \ \theta_6 = \min\{2,\ 2,\ 3,\ 3\} = 2 \ \ (\text{рис. } 8.1.2,\ \textit{е}).$$

На указанных в скобках рисунках приведены сети, полученные после соответствующих преобразований на каждом шаге. В сети, изображенной на рис. 8.1.2, *е*, уже нельзя указать ни одного пути, идущего из X_0 в X_8 по ненасыщенным дугам. Следовательно, процесс преобразований закончен.

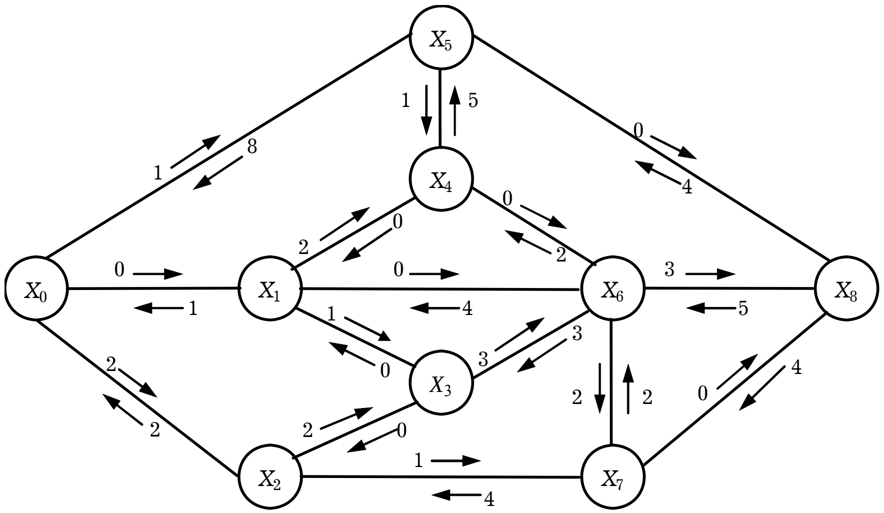
Чтобы определить максимальный поток, вычитаем от пропускных способностей дуг исходной сети (рис. 8.1.1) измененные пропускные способности тех же дуг последней сети (рис. 8.1.2, *е*). Результат приведен на рис. 8.1.2, *ж*.


X_0 X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8

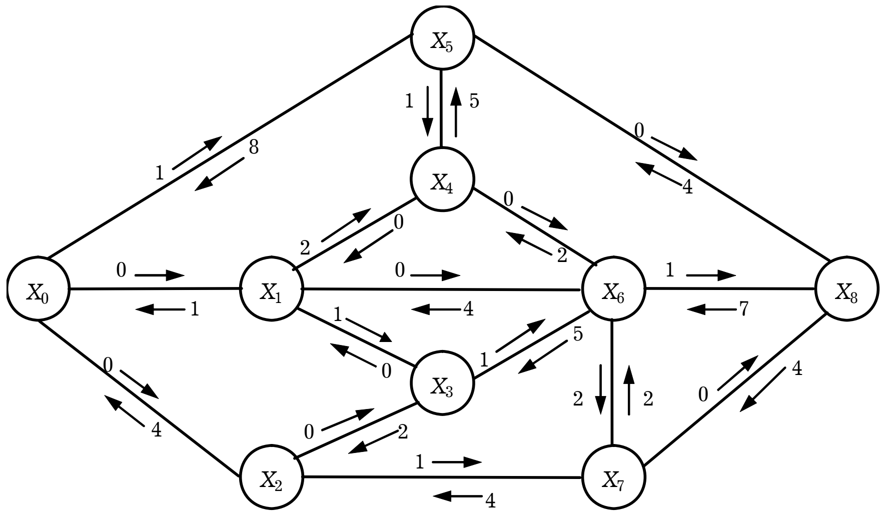
а)


X_0 X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8

б)


X_0 X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8

д)


X_0 X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8

е)

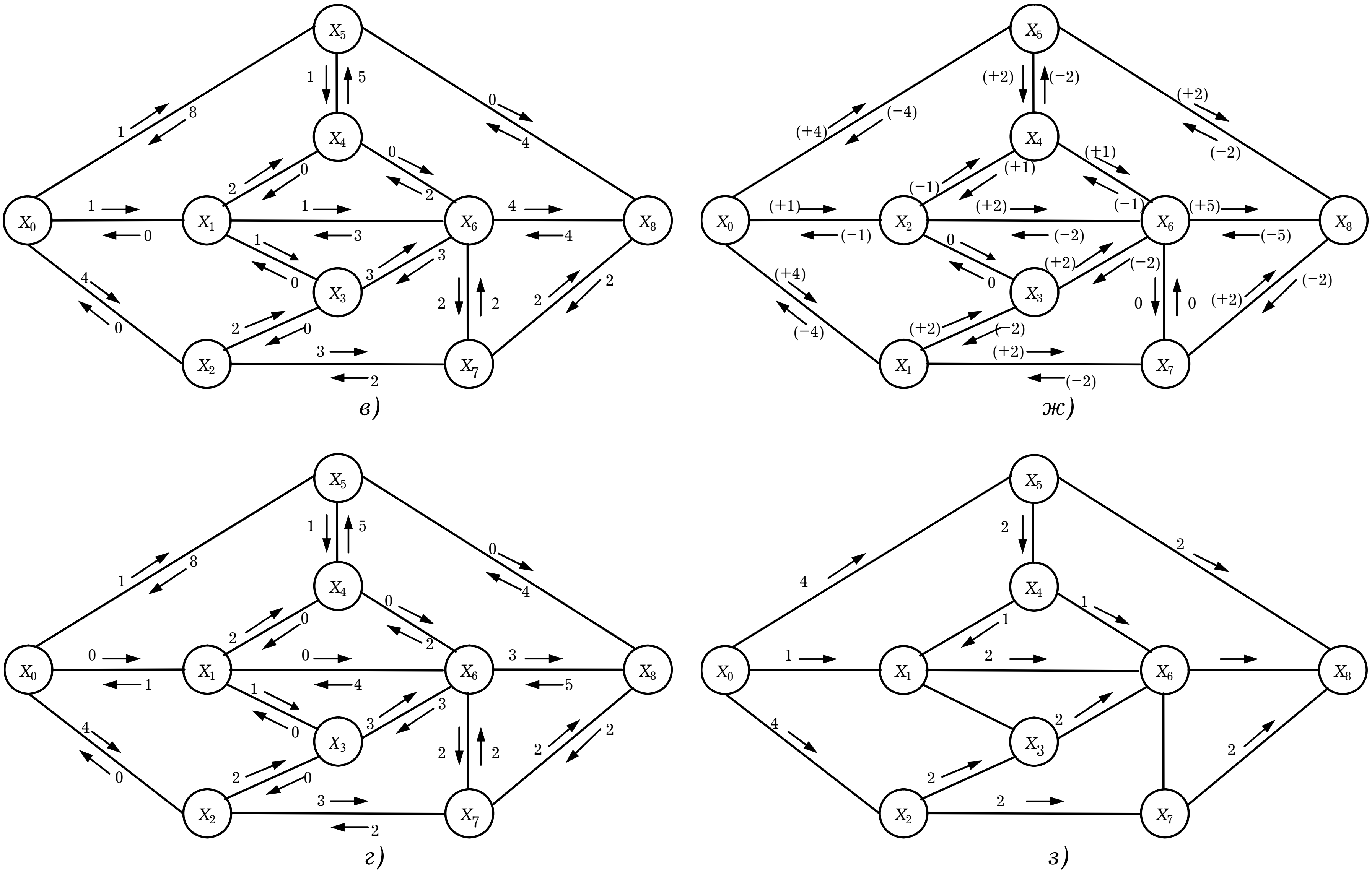


Рис. 8.1.2. *Определение максимального потока в сети*

Положительные значения найденных разностей дают нам величины z_{ij} потоков по соответствующим дугам (X_i, X_j) в максимальном потоке из источника X_0 в сток X_8. Искомый максимальной поток приведен на рис. 8.1.2, *з*, где числа, стоящие у каждой дуги, показывают величину потока по данной дуге, а стрелки — направление потока по этой дуге. Величина максимального потока равна

$$w_{\max} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 9$$

или, как видно из рис. 8.1.2, *з*,

$$w_{\max} = z_{05} + z_{01} + z_{02} = 4 + 1 + 4 = 9,$$
$$w_{\max} = z_{58} + z_{68} + z_{78} = 2 + 5 + 2 = 9.$$

Обычно процесс решения задачи записывают в виде последовательности матриц изменяющихся пропускных способностей дуг сети. Чтобы не писать нулевые элементы этих матриц, удобно для каждого шага чертить соответствующую таблицу, оставляя пустыми те клетки, где должны стоять нули. Для исходной сети, приведенной на рис. 8.1.1, матрица пропускных способностей дуг будет иметь вид табл. 8.1.1.

Таблица 8.1.1

$X_i \backslash X_j$	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_0		1	4			5^-			
X_1				1	1		2		
X_2				2				3	
X_3							3		
X_4		1				3	1		
X_5	4^+				3				2^-
X_6		2		3	1			2	6
X_7			2				2		2
X_8						2^+	2	2	

Таблица 8.1.2

$X_i \backslash X_j$	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_0		1	4			3^-			
X_1				1	1		2		
X_2				2				3	
X_3							3		
X_4						3^+	1^-		
X_5	6^+				3^-				
X_6		2		3	1^+			2	6^-
X_7			2				2		2
X_8						4	2^+	2	

Чтобы по таблице пропускных способностей дуг сети, не имея рисунка сети, найти какой-нибудь путь из источника в сток, идущий по ненасыщенным дугам, можно поступить следующим образом.

В нулевой строке таблицы выберем какой-нибудь элемент c_{0j}, отличный от нуля, например, c_{05}, стоящий в пятом столбце. Из вершины X_0 можно перейти в X_5. Для наглядности дугу (X_0, X_5) проведем прямо в нулевой строке таблицы из нулевого столбца в пятый, выделив начало дуги кружочком, конец — стрелкой. Теперь мы находимся в вершине X_5. Чтобы зафиксировать это, сместимся по пятому столбцу до строки с тем же пятым номером и отметим эту клетку кружочком, а переход по вертикали — пунктиром. В пятой строке имеются три ненулевых элемента соответственно в нулевом, четвертом и восьмом столбцах. Это означает, что из X_5 можно перейти или в X_0 или в X_4 или в X_8. Возвращаться в X_0 нет смысла, лучше всего идти в сток X_8. Этот переход изображен стрелкой в пятой строке с началом в пятом столбце и концом — в восьмом.

Таким образом, по таблице мы нашли путь, ведущий по ненасыщенным дугам из источника в сток:

$$X_0 \to X_5 \to X_6.$$

Теперь по таблице надо указать пропускную способность найденного пути и изменить пропускные способности дуг этого пути и симметричных им дуг. Для этого отмечаем знаком «минус» числа в тех клетках, где находятся концы дуг, а числа в клетках, симметричных указанным относительно главной диагонали, отмечаем знаком «плюс».

Пропускная способность найденного пути равна, очевидно, наименьшему среди чисел, отмеченных знаком «минус»:

$$\theta = \min\{c_{ij}^{-}\}.$$

В данном случае $\theta_1 = 2$.

Чтобы вычислить новые пропускные способности дуг найденного пути и симметричных им дуг, достаточно, согласно (8.1.5) и (8.1.6), из всех чисел, отмеченных знаком «минус», вычесть наименьшую пропускную способность θ_1, а ко всем числам, отмеченным знаком «плюс», прибавить θ_1. Получаем табл. 8.1.2 с измененными пропускными способностями дуг сети. Она соответствует рис. 8.1.1, *а*. По таблице находим путь

$$X_0 \to X_5 \to X_4 \to X_6 \to X_8,$$

отмечаем знаком «минус» пропускные способности дуг этого пути (они записаны в клетках на концах стрелок), знаком «плюс» — пропускные способности симметричных дуг. Находим θ_2 как наименьшее среди c_{ij}^{-}. Прибавляя θ_2 к c_{ij}^{+} и вычитая из c_{ij}^{-}, переходим к табл. 8.1.3 и т. д.

Таблица 8.1.3

X_i \ X_j	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_0		1	4			2^-			
X_1				1	1^+		2^-		
X_2				2				3	
X_3							3		
X_4		1^+				4			
X_5	7^+				2^-				
X_6		2^+		3	2			2	5^-
X_7			2				2		2
X_8						4	3^+	2	

Таблица 8.1.4

X_i \ X_j	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_0						1			
X_1	1			1	2				
X_2	4							1	
X_3			2				1		
X_4						5			
X_5	8				1				
X_6		4		5	2			2	1
X_7			4				2		
X_8						4	7	4	

Выполнив еще четыре шага, придем к табл. 8.1.4. Из этой таблицы видно, что не существует ни одного пути из источника в сток. Действительно, из X_0 можно перейти в X_5. Далее, так как в пятой строке только два ненулевых элемента c_{50} и c_{54}, можно перейти либо в X_0 (вернуться, что бессмысленно), либо в X_4. Но в четвертой строке только один элемент c_{45}, отличный от нуля. Поэтому из вершины X_4 можно перейти только в X_5, т. е. опять появляется контур. Никаких других возможностей нет. Следовательно, увеличить поток нельзя.

Для определения полученного максимального потока вычитаем из элементов первой таблицы (см. табл. 8.1.1) соответствующие элементы последней (см. табл. 8.1.4). Записывая только положительные из найденных разностей, получаем табл. 8.1.5, указывающую максимальный поток в заданной сети с величиной

$$w^* = z_{58} + z_{68} + z_{78} = 2 + 5 + 2 = 9\,. \ \square$$

Таблица 8.1.5

$X_i \backslash X_j$	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_0		1	4			4			
X_1							2		
X_2				2				2	
X_3							2		
X_4		1					1		
X_5					2				2^-
X_6									5
X_7									2
X_8									

Пусть дан граф $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{U})$. Каждой дуге графа поставим в соответствие положительное число $l(u)$. Это число можно назвать *длиной дуги*. Тогда за *длину пути* μ принимается сумма дуг, входящих в μ,

$$L(\mu) = \sum_{u \in \mu} l(u).$$

В **задаче о кратчайшем пути** требуется на графе Γ найти *кратчайший путь* —путь наименьшей длины из вершины X_0 в вершину X_n.

Алгоритм определения кратчайшего пути (алгоритм Дейкстры).

1. Присвоить каждой вершине X_i метку λ_i так, чтобы $\lambda_0 = 0$, $\lambda_i = +\infty$ $(i > 0)$.

2. Найти дугу $u = u_{ij} = (X_i, X_j)$, для которой выполняется неравенство $\lambda_j - \lambda_i > l(u_{ij})$ (полагая, что $\infty - \infty = 0$). Заменить метку вершины x_j на новую, меньшую метку $\lambda_j = \lambda_i + l(u_{ij})$.

3. П. 2 применять до тех пор, пока для каждой дуги u_{ij} не станет справедливым неравенство $\lambda_j - \lambda_i \leqslant l(u_{ij})$.

4. Найти вершину X_k, из которой выходит дуга, приходящая в X_n, и для которой $\lambda_n = \lambda_k + l(u_{kn})$, затем вершину X_m, из которой выходит дуга, приходящая в X_k, и для которой $\lambda_k = \lambda_m + l(u_{mk})$ и т. д. На некотором шаге X_p

совпадет с вершиной X_0. Путь $\mu = (X_p, ..., X_m, X_k, X_n)$ будет кратчайшим, а его длина будет равна λ_n.

В некоторых моделях возникает задача о нахождении не самого короткого, а наоборот, самого длинного пути между двумя заданными вершинами графа.

В **задаче о критическом пути** требуется на графе Г найти *критический путь* — путь наибольшей длины из вершины X_0 в вершину X_n.

Если рассмотреть *сетевой график*, дуги которого соответствуют работам, запланированным по некоторому проекту, а метка каждой дуги равна запланированному времени выполнения соответствующей работы, то критический путь состоит из работ, замедление каждой из которых влияет на время выполнение всего проекта. Менеджер проекта должен особое внимание обращать на своевременное выполнение работ критического пути.

Предлагаем студенту самостоятельно построить алгоритм определения критического пути по аналогии с алгоритмом определения кратчайшего пути.

Пример 8.1.2. Требуется определить кратчайший путь из вершины X_0 в вершину X_8 в графе, изображенном на рис. 8.1.3, *а*, где числа на дугах означают длины этих дуг.

Решение. Решение задачи по приведенному алгоритму иллюстрируется табл. 8.1.6 и рис. 8.1.3, *б* — *е*.

Таблица 8.1.6

Шаг / Вершина	1		2		3		4		5		6	
	λ	X_{i-1}	λ	X_{i-1}	λ	X_{i-1}	λ	X_{i-1}	λ	X_{i-1}	λ	X_{i-1}
X_0	0	X_0	0	X_0	0	X_0	0	X_0	0	X_0	0	X_0
X_1	+	—	1	X_0	1	X_0	1	X_0	1	X_0	1	X_0
X_2	+	—	4	X_0	4	X_0	4	X_0	4	X_0	4	X_0
X_3	+	—	+	—	2	X_1	2	X_1	2	X_1	2	X_1
X_4	+	—	+	—	2	X_1	2	X_1	2	X_1	2	X_1
X_5	+	—	5	X_0	5	X_0	5	X_0	5	X_0	5	X_0
X_6	+	—	+	—	+	—	3	X_3	3	X_3	3	X_3
X_7	+	—	+	—	7	X_2	7	X_2	5	X_6	5	X_6
X_8	+	—	+	—	8	X_5	8	X_5	8	X_5	7	X_7

На этих рисунках пунктиром отмечены проверенные, но не перспективные пути (имеющие длину большую, чем кратчайший путь из вершины X_0 в данную вершину, а рядом с дугами, приходящими в вершины, написаны метки соответствующих вершин (т. е. длины самых кротких путей из X_0 в данную вершину).

На последнем шаге (рис. 8.1.3, *е*) получены кратчайшие пути из вершины X_0 во все остальные, в том числе, и кратчайший путь из X_0 в X_8:

$$X_0 \to X_1 \to X_4 \to X_6 \to X_7 \to X_8 .$$

Длина этого пути равна

$$1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7. \square$$

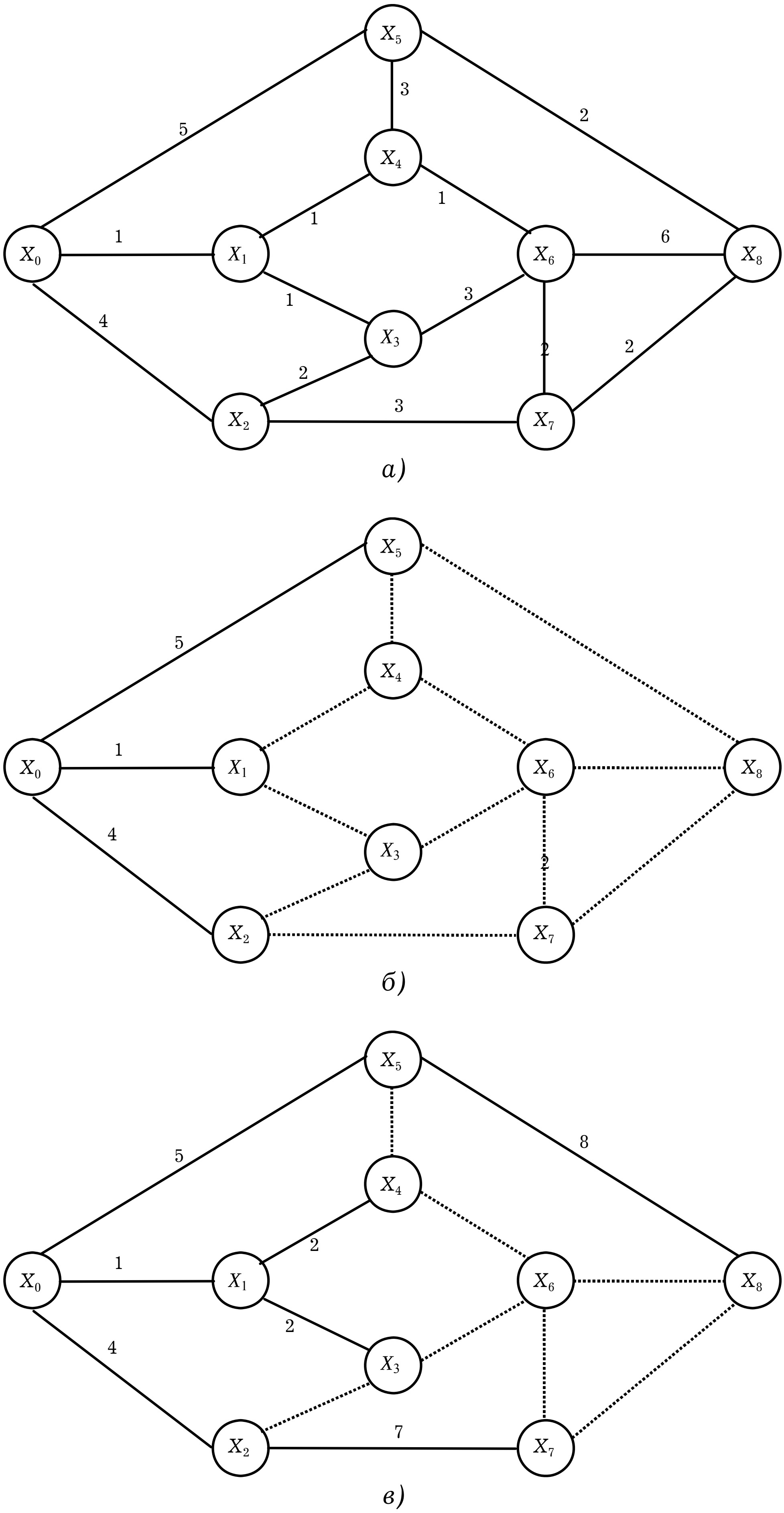
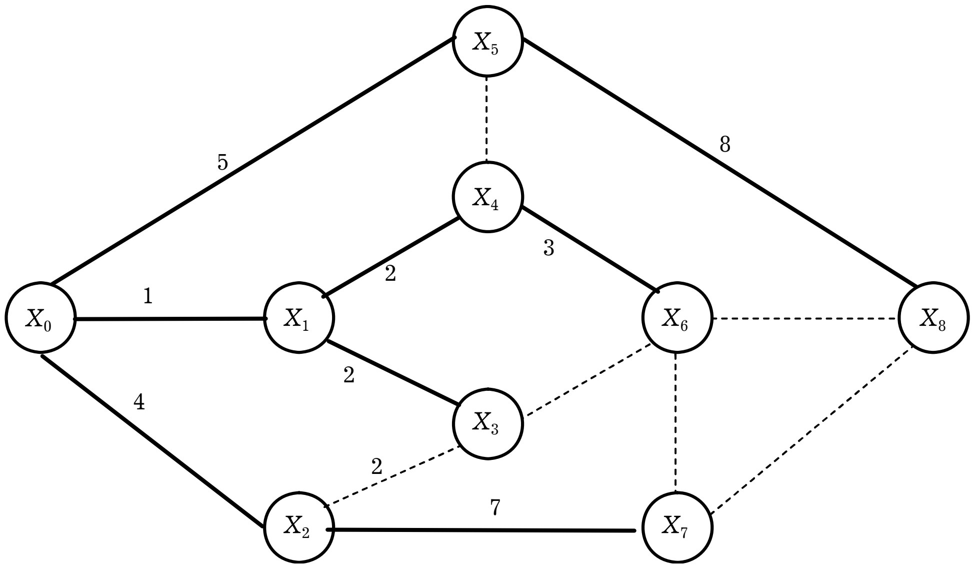
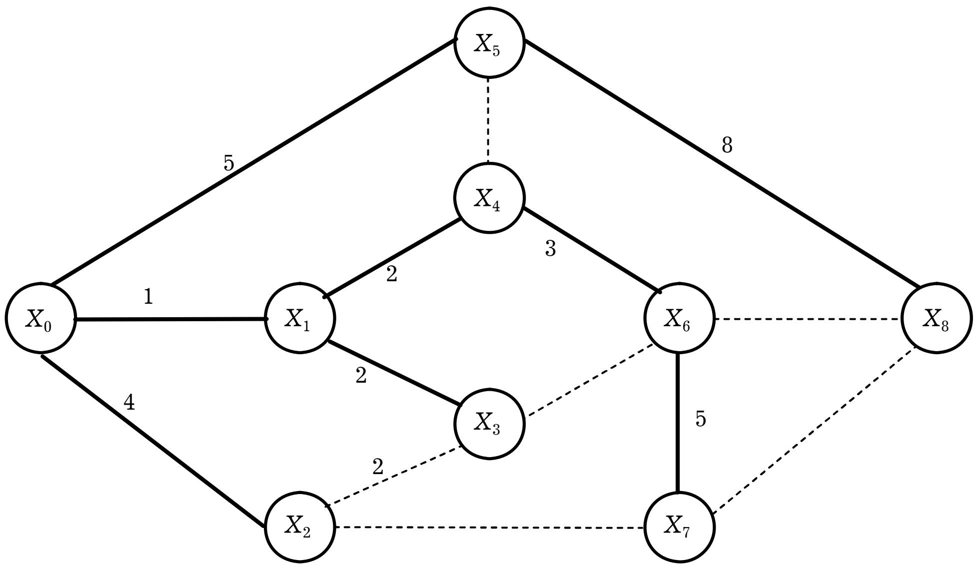


Рис. 8.1.3. *Определение кратчайшего пути*



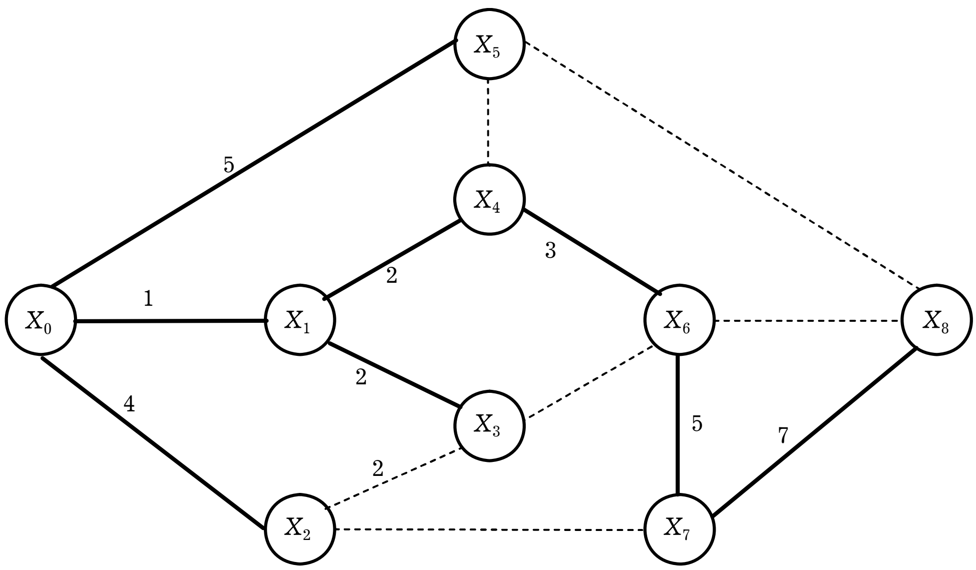
X_5
5
8
X_4
3
2
1
X_0
X_1
X_6
X_8
2
4
X_3
2
7
X_2
X_7

г)



X_5
5
8
X_4
3
2
1
X_0
X_1
X_6
X_8
2
4
X_3
5
2
X_2
X_7

д)



X_5
5
X_4
3
2
1
X_0
X_1
X_6
X_8
2
4
X_3
5
7
2
X_2
X_7

е)

8.2. Задания практикума

1. Задача о максимальном потоке в сети. Требуется определить максимальный поток в сети, приведенной на рис. 8.2.1, из вершины X_i в вершину X_j, где числа на дугах, снабженные стрелками, означают пропускные способности этих дуг в указанных направлениях. Номера вершин i и j для каждого варианта приведены в табл. 8.2.1.

2. Задача о кратчайшем пути. Требуется определить кратчайший путь из вершины X_i в вершину X_j в графе, приведенном на рис. 8.2.2, где числа на дугах означают длины этих дуг. Номера вершин i и j для каждого варианта приведены в табл. 8.2.1.

3. Задача о критическом пути. Требуется определить критический путь из вершины X_i в вершину X_j в сетевом графике, приведенном на рис. 8.2.3, где числа на дугах равны продолжительностям соответствующих этим дугам работ инвестиционного проекта. Номера вершин i и j для каждого варианта приведены в табл. 8.2.1.

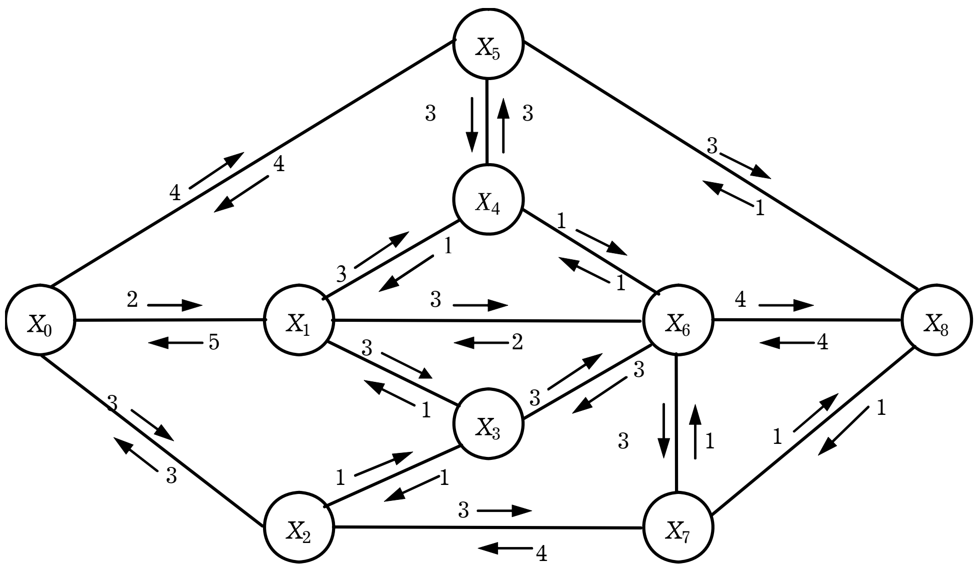


Рис. 8.2.1. *Сеть для определения максимального потока*

Таблица 8.2.1

№ вар.	Начальная вершина i	Конечная вершина j	№ вар.	Начальная вершина i	Конечная вершина j	№ вар.	Начальная вершина i	Конечная вершина j
1	0	2	13	1	7	25	4	8
2	0	3	14	1	8	26	6	5
3	0	4	15	2	4	27	6	8
4	0	5	16	2	5	28	7	4
5	0	6	17	2	6	29	7	5
6	0	7	18	2	7	30	7	8
7	0	8	19	2	8	31	7	6
8	1	2	20	3	2	32	3	6
9	1	3	21	3	4	33	4	5
10	1	4	22	3	5	34	6	4
11	1	5	23	3	7	35	7	6
12	1	6	24	3	8			

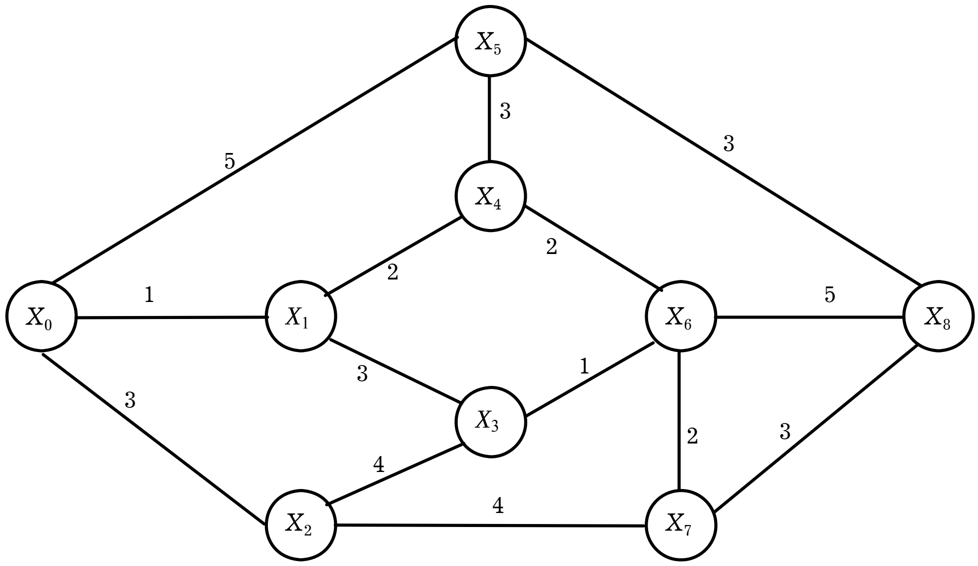


Рис. 8.2.2. *Граф для определения кратчайшего пути*

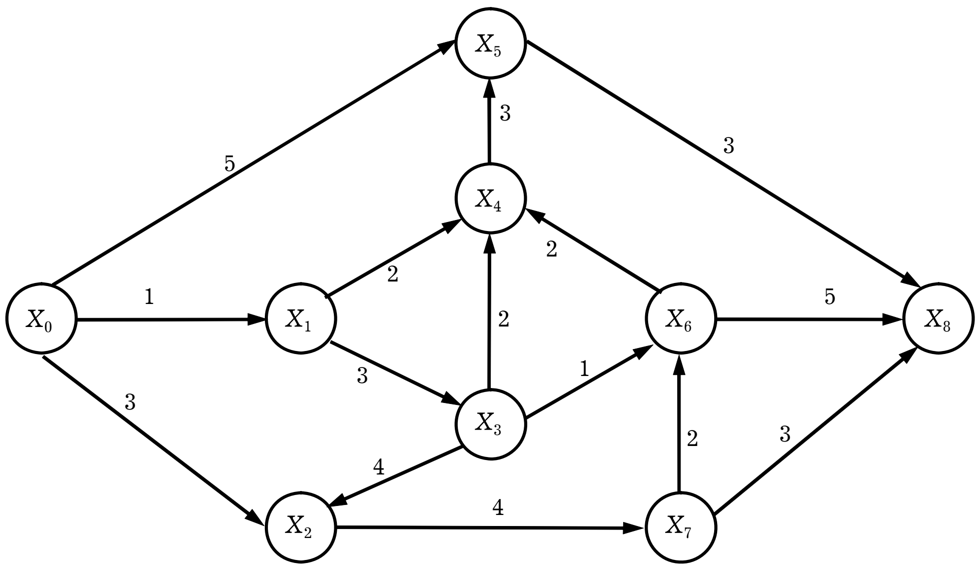


Рис. 8.2.2. *Сетевой график для определения критического пути*

9. Оптимальность по Парето

9.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Обозначим буквой E некоторую обобщенную характеристику произвольной инвестиционной операции, которую назовем *эффективностью* операции (в качестве E можно взять доход, доходность в процентах от вложенной суммы, доходность в процентах годовых, внутреннюю норму доходности и т. п.). Часто невозможно заранее точно предсказать эффективность той или иной операции, и такие операции рассматривают как случайные величины. При этом в качестве *ожидаемой эффективности* такой инвестиционной операции используют математическое ожидание $\mathbf{M}E$ случайной величины E.

Под *риском* инвестиционных операций мы понимаем отклонение реальных значений эффективности инвестиционной операции от прогнозируемой эффективности (как в меньшую сторону, так и в бо́льшую).

Если E — случайная эффективность инвестиционной операции, и в качестве ожидаемой эффективности операции мы выбрали математическое ожидание $\mathbf{M}E$ случайной величины E, то в качестве измерителя *риска* операции естественно взять среднее квадратичное отклонение

$$\sigma_E = \sqrt{\mathbf{D}E}$$

(здесь $\mathbf{D}E$ — дисперсия случайной величины E).

Знание только математических ожиданий и средних квадратичных отклонений случайных величин довольно-таки важно при анализе группы случайных величин, оно помогает выбрать из множества случайных величин оптимальные по Парето, отбросив заведомо «плохие».

Пусть на финансовом рынке существует возможность осуществить несколько инвестиционных операций, ожидаемые эффективности и риски которых известны и равны соответственно $\mathbf{M}E_1, \mathbf{M}E_2, \ldots, \mathbf{M}E_n$ и $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Говорят, что i-я операция *доминирует* j-ю, если

$$\begin{cases} \mathbf{M}E_i \geqslant \mathbf{M}E_j, \\ \sigma_i < \sigma_j \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{M}E_i > \mathbf{M}E_j, \\ \sigma_i \leqslant \sigma_j. \end{cases}$$

Операция называется *оптимальной по Парето*, если не существует операций, которые бы ее доминировали.

Пример 9.1.1. Инвестор рассматривает четыре инвестиционные операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами E_1, E_2, E_3, E_4 с рядами распределения

E_1	2	5	8	4
p	1/6	1/2	1/6	1/6

,

E_2	2	3	4	12
p	1/2	1/6	1/6	1/6

,

E_3	3	5	8	10
p	1/6	1/6	1/2	1/6

,

E_4	1	2	4	8
p	1/2	1/6	1/6	1/6

.

Требуется определить, какие из этих операций оптимальны по Парето.

Решение. Ожидаемые эффективности и риски равны соответственно $\mathbf{M}E_1 = 4{,}81$, $\sigma_1 = 1{,}77$, $\mathbf{M}E_2 = 4{,}16$, $\sigma_2 = 3{,}57$, $\mathbf{M}E_3 = 7{,}00$, $\sigma_3 = 2{,}30$, $\mathbf{M}E_4 = 2{,}81$, $\sigma_4 = 2{,}54$. Нанесем точки ($\mathbf{M}E_i$; σ_i) на единый график (рис. 9.1.1). i-я операция доминирует j-ю, если точка, соответствующая i-й операции, находится на графике правее и ниже точки, соответствующей j-й операции.

Видно, что первая операция доминирует вторую и четвертую, третья операция также доминирует вторую и четвертую. При этом первая операция не доминирует третью, а третья не доминирует первую. Первая и третья операции, таким образом, оптимальны по Парето. ❑

Отметим, что операции, оптимальные по Парето, не обязательно являются «самыми лучшими» (и даже просто «хорошими») — эти операции не являются худшими. Выбор операций среди оптимальных по Парето осуществляется на основе склонности лица, принимающего соответствующее решение, к риску.

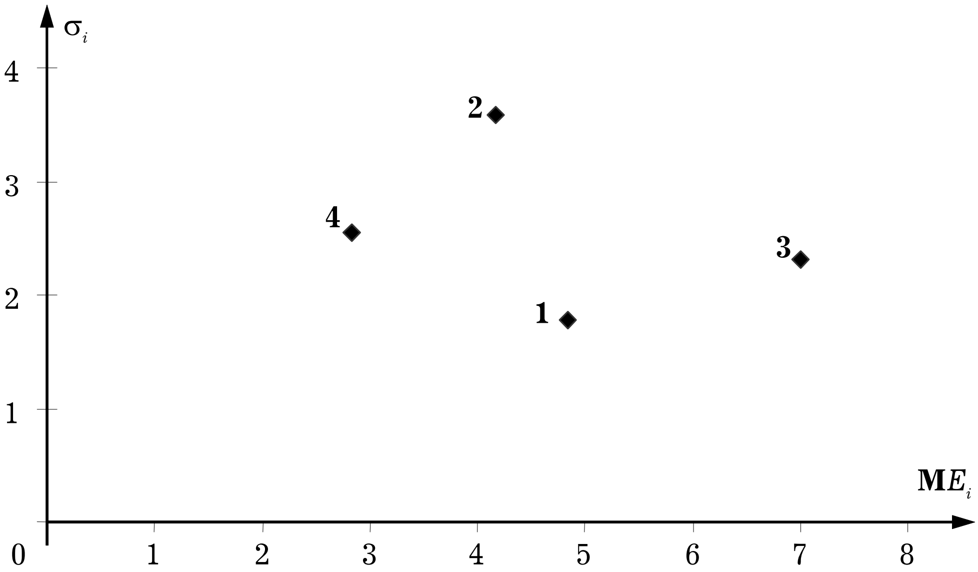


Рис. 9.1.1. *График «риск — доходность»*

В некоторых ситуациях предпочтительной оказывается операция, в которой ожидаемая эффективность вообще отрицательна. Например, если перед нами стоит выбор из двух операций:

- потерять 1 руб.;
- с вероятностью 0,5 получить 1 000 000 руб. и с вероятностью 0,5 потерять 100 000 руб.,

то обе эти операции окажутся оптимальными по Парето ($\mathbf{M}E_1 = -1$, $\sigma_1 = 0$, $\mathbf{M}E_2 = 550\,000$, $\sigma_2 = 450\,000$), но, скорее всего, мы склонимся к выбору первой операции, несмотря на то, что ожидаемый доход по ней составляет отрицательное число (-1 руб.), тогда как ожидаемый доход от исполнения второй операции составляет 550 000 руб. — слишком велик риск у второй операции, слишком велика вероятность потерь.

Рассмотренный подход может быть применен и при анализе других задач многокритериальной оптимизации.

В произвольной задаче выбора операции по нескольким критериям операция i *доминирует* операцию j, если операция i по каждому из критериев не хуже операции j и хотя бы по одному из критериев — строго лучше.

Операция i называется *оптимальной по Парето*, если не существует операций, которые бы ее доминировали.

Например, в ситуации с частичной неопределенностью можно рассмотреть в качестве критериев ожидаемый доход $\mathbf{M}Q$ (операция i не хуже операции j по этому критерию, если $\mathbf{M}Q_i \geqslant \mathbf{M}Q_j$, и лучше операции j по этому критерию, если $\mathbf{M}Q_i > \mathbf{M}Q_j$) и ожидаемые сожаления $\mathbf{M}R$ (операция i не хуже операции j по этому критерию, если $\mathbf{M}R_i \leqslant \mathbf{M}R_j$, и лучше операции j по этому критерию, если $\mathbf{M}R_i < \mathbf{M}R_j$).

9.2. Задание практикума

Инвестор рассматривает четыре инвестиционные операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами E_n, E_{n+1}, E_{n+2} и E_{n+3} (где n —номер варианта) с рядами распределения, приведенными в табл. 9.2.1. Требуется определить, какие из этих операций оптимальны по Парето.

Таблица 9.2.1

№ операции	Ряд распределения эффективности					№ операции	Ряд распределения эффективности				
1	E_1	0	2	4	16	12	E_{12}	2	4	6	18
	p	1/2	1/4	1/8	1/8		p	1/2	1/4	1/8	1/8
2	E_2	0	4	6	12	13	E_{13}	2	6	8	14
	p	1/4	1/4	1/3	1/6		p	1/4	1/4	1/3	1/6
3	E_3	0	1	2	8	14	E_{14}	2	3	4	10
	p	1/3	1/3	1/6	1/6		p	1/3	1/3	1/6	1/6
4	E_4	0	4	6	10	15	E_{15}	2	6	8	12
	p	1/5	1/5	1/5	2/5		p	1/5	1/5	1/5	2/5
5	E_5	0	1	5	14	16	E_{16}	2	4	6	18
	p	1/5	2/5	1/5	1/5		p	1/5	2/5	1/5	1/5
6	E_6	0	8	16	20	17	E_{17}	2	12	18	22
	p	1/2	1/8	1/8	1/4		p	1/2	1/8	1/8	1/4
7	E_7	0	4	10	14	18	E_{18}	2	6	12	20
	p	1/4	1/4	1/4	1/4		p	1/4	1/4	1/4	1/4
8	E_8	0	4	5	20	19	E_{19}	2	6	8	12
	p	1/2	1/4	1/5	1/20		p	1/2	1/4	1/5	1/20
9	E_9	0	4	8	32	20	E_{20}	−6	−4	−2	10
	p	1/2	1/4	1/8	1/8		p	1/2	1/4	1/8	1/8
10	E_{10}	0	8	12	24	21	E_{21}	−6	−2	0	−6
	p	1/4	1/4	1/3	1/6		p	1/4	1/4	1/3	1/6
11	E_{11}	0	2	4	16	22	E_{22}	−6	−5	−4	3
	p	1/3	1/3	1/6	1/6		p	1/3	1/3	1/6	1/6

Окончание табл. 9.2.1

№ операции	Ряд распределения эффективности				
23	E_{23}	0	8	12	20
	p	1/5	1/5	1/5	2/5
24	E_{24}	0	2	10	28
	p	1/5	2/5	1/5	1/5
25	E_{25}	0	16	32	40
	p	1/2	1/8	1/8	1/4
26	E_{4}	0	8	20	28
	p	1/4	1/4	1/4	1/4
27	E_{26}	0	8	10	40
	p	1/2	1/4	1/5	1/20
28	E_{27}	0	2	4	16
	p	1/3	1/3	1/6	1/6
29	E_{28}	0	8	12	20
	p	1/5	1/5	1/5	2/5
30	E_{29}	0	3	6	12
	p	1/3	1/3	1/6	1/6
31	E_{30}	0	8	15	20
	p	1/2	1/4	1/5	1/20

№ операции	Ряд распределения эффективности				
31	E_{31}	−6	−2	0	4
	p	1/5	1/5	1/5	2/5
32	E_{32}	−6	−5	−1	8
	p	1/5	2/5	1/5	1/5
33	E_{33}	−6	2	10	14
	p	1/2	1/8	1/8	1/4
34	E_{34}	−6	−2	4	8
	p	1/4	1/4	1/4	1/4
35	E_{35}	−6	−2	−1	14
	p	1/2	1/4	1/5	1/20
36	E_{36}	−6	−5	−4	3
	p	1/3	1/3	1/6	1/6
37	E_{37}	−6	−4	−2	10
	p	1/2	1/4	1/8	1/8
38	E_{38}	−6	−3	−2	6
	p	1/3	1/3	1/6	1/6

10. Многокритериальная оптимизация

10.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Задачи *многокритериальной*, или *векторной, оптимизации* возникают в тех случаях, когда имеется несколько целей, которые не могут быть отражены одним критерием (например, стоимость, надежность и т. п.). Требуется найти точку области допустимых решений, которая минимизирует или максимизирует все эти критерии. Обозначим i-й частный критерий через $z_i(\mathbf{x})$, а область допустимых решений через Q. Учтем, что изменением знака функции всегда можно свести задачу минимизации к задаче максимизации, и наоборот, мы можем сформулировать кратко задачу векторной оптимизации следующим образом:

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} z_1(\mathbf{x}) \\ z_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ z_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \to \max, \tag{10.1.1}$$

$$\mathbf{x} \in Q. \tag{10.1.2}$$

В идеальном случае в задаче (10.1.1)—(10.1.2) можно вести поиск такого решения, которое принадлежит пересечению множеств оптимальных решений всех однокритериальных задач. Но указанное пересечение обычно оказывается пустым множеством, и потому приходится рассматривать *переговорное множество* — множество допустимых решений [т. е. удовлетворяющих требованию (10.1.2)], оптимальных по Парето.

Метод последовательных уступок решения многокритериальных задач применяется в случае, когда частные критерии могут быть упорядочены в порядке убывающей важности. Предположим, что все критерии максимизируются и пронумерованы в порядке убывания их важности. Находим максимальное значение z_1^*, первого по важности критерия в области допустимых решений, решив задачу

$$z_1(\mathbf{x}) \to \max,$$
$$\mathbf{x} \in Q.$$

Затем назначается, исходя из практических соображений и принятой точности, величина допустимого отклонения $\delta_1 > 0$ (экономически оправданной уступки) критерия z_1 и отыскивается максимальное значение второго критерия z_2 при условии, что значение первого должно отклоняться от максимального не более чем на величину допустимой уступки, т. е. решается задача

$$z_2(\mathbf{x}) \to \max,$$
$$z_1(\mathbf{x}) \geqslant z_1^* - \delta_1,$$
$$\mathbf{x} \in Q.$$

Снова назначается величина уступки $\delta_2 > 0$ по второму критерию, которая вместе с первой используется при нахождении условного экстремума третьего частного критерия, и т. д. Наконец, выявляется экстремальное значение последнего по важности критерия z_2 при условии, что значение каждого из первых $m - 1$ частных критериев отличается от экстремального не более чем на величину допустимой уступки. Получаемое на последнем этапе решение считается оптимальным. Остается заметить, что этот метод не всегда приводит к эффективному решению.

Пример 3.10.1. Дана задача векторной оптимизации:

$$z_1 = -x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$z_2 = 2x_1 + x_2 \to \max, \tag{10.1.3}$$

$$z_1 = -x_1 + 2x_2 \to \max, \tag{10.1.4}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ 1 \leqslant x_1 \leqslant 3, \\ 1 \leqslant x_2 \leqslant 4. \end{cases} \tag{10.1.5}$$

Требуется определить переговорное множество, а затем решить данную задачу методом последовательных уступок (допустимые уступки по первым двум критериям принять равными $\delta_1 = 3$ и $\delta_2 = 5/3$).

Решение. Очевидно, в данной задаче переговорное множество совпадает с областью допустимых решений (т. е. точек, удовлетворяющих условиям (10.1.5), они соответствуют пятиугольнику $ABCDE$ на рис. 10.1.1, *а*). Действительно, возьмем любую точку множества допустимых решений. Если мы от нее сдвинемся вправо, то значения критериев z_2 и z_3 увеличатся, но значение критерия z_1 уменьшится. Если мы сдвинемся левее, то значения критериев z_2 и z_3 уменьшатся, но значение критерия z_1 увеличится. Если мы сдвинемся ниже, то значения критериев z_1 и z_2 увеличатся, но значение критерия z_3 уменьшится. Если мы сдвинемся выше, то значения критериев z_1 и z_2 уменьшатся, но значение критерия z_3 увеличится. Таким образом, ни одна из точек множества допустимs[решений не доминируется другими, т. е. все допустимые точки оптимальны по Парето.

Максимизируем функцию z_1 при условиях (10.1.5). Это легко сделать графически (рис. 10.1.1, *а*). Получаем:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad z_1^* = z_1^{\max} = z_1(A) = 7.$$

Переходим к максимизации функции z_2 при условиях (10.1.5) и дополнительном ограничении, позволяющем учесть, что по критерию z_1 нельзя уступать более чем на δ_1. Так как $z_1^* - \delta_1 = 4$, то дополнительное ограничение будет иметь вид

$$-x_1 + 2x_2 \geqslant 4. \tag{10.1.6}$$

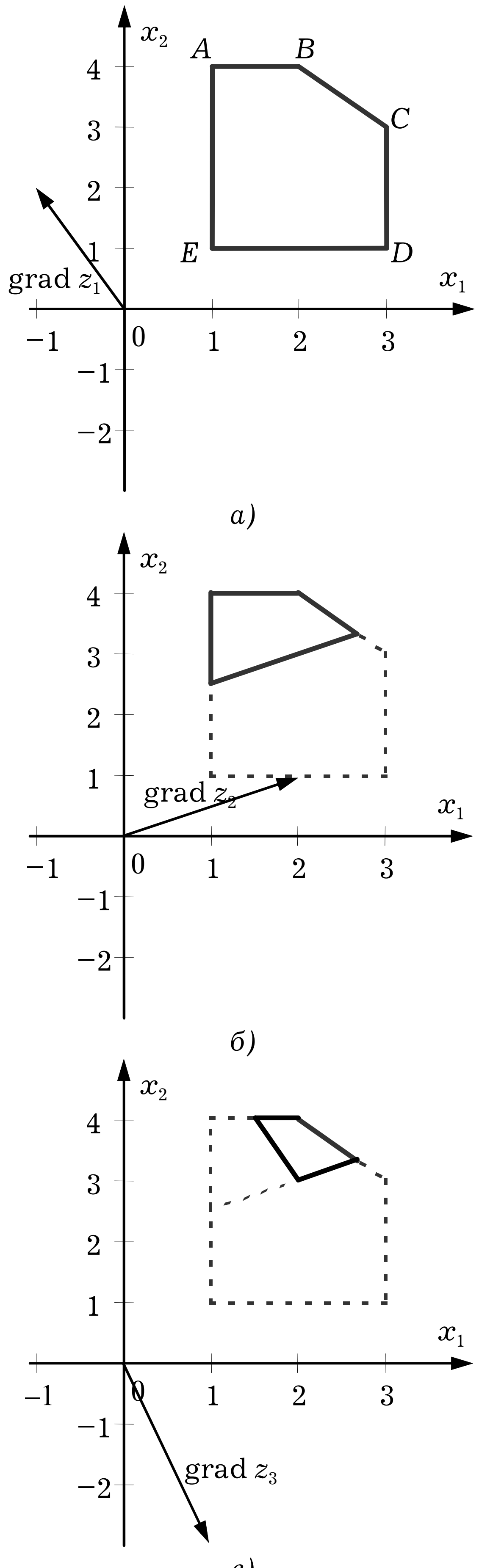


Рис. 10.1.1. *Графическое решение задачи векторной оптимизации*

Задачу (10.1.3), (10.1.5), (10.1.6) решим графически (рис. 10.1.1, *б*):

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}, \qquad z_2^{\max} = z_2^* = z_2(B) = \frac{26}{3}$$

Теперь уступаем по критерию z_2 на δ_2 и получаем второе дополнительное ограничение:

$$2x_1 + x_2 \geqslant 7 \tag{10.1.7}$$

Максимизируем z_3 при условиях (10.1.5), (10.1.6), (10.1.7) графически (рис. 3.10.1, *в*). Получаем оптимальное решение трехкритериальной задачи:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$z_1 = 4, \quad z_2 = 7, \quad z_3 = -7.. \ \square$$

10.2. Задание практикума

Дана задача векторной оптимизации:

$$z_1 = (3-n)x_1 + (n-6)x_2 \to \max,$$
$$z_2 = (5-n)x_1 + (n-7)x_2 \to \max,$$
$$z_3 = (n-5)x_1 + (8-n)x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 18, \\ 1 \leqslant x_1 \leqslant n+2, \\ 1 \leqslant x_2 \leqslant 9, \end{cases}$$

где n — номер варианта. Требуется определить переговорное множество, а затем решить данную задачу методом последовательных уступок (допустимые уступки по первым двум критериям принять равными $\delta_1 = 3$ и $\delta_2 = 2$).

11. Принятие решений в условиях неопределенности

11.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Предположим, что лицо, принимающее решение, может выбрать одну из возможных альтернатив, обозначенных номерами $i = 1, 2, \ldots, m$. Ситуация является *полностью неопределенной*, т. е. известен лишь набор возможных вариантов состояний внешней (по отношению к лицу, принимающему решение) среды, обозначенных номерами $j = 1, 2, \ldots, n$.

Если будет принято i-е решение, а состояние внешней среды соответствует j-й ситуации, то лицо, принимающее решение, получит доход q_{ij}. Матрица

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

называется *матрицей последствий* (от реализации возможных решений).

В **ситуации с полной неопределенностью** могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера относительно того, какое решение нужно принять. Эти рекомендации не обязательно будут приняты. Многое будет зависеть, например, от склонности к риску лица, принимающего решение. Но как оценить риск в данной схеме?

Допустим, мы хотим оценить риск, который несет i-е решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы мы знали, что осуществляется j-е состояние внешней среды, то выбрали бы наилучшее решение, т. е. приносящее наибольший доход

$$q_j = \max_{k=1,2,\ldots,m} q_{kj}.$$

Значит, принимая i-е решение, мы рискуем получить не q_j, а только q_{ij}, т. е. если мы примем i-е решение, а во внешней среде реализуется j-е состояние, то мы будем сожалеть о недополученном доходе в размере

$$r_{ij} = q_j - q_{ij} = \max_{k=1,2,\ldots,m} q_{kj} - q_{ij} \tag{11.1.1}$$

(по сравнению с тем, как если бы мы знали точно, что реализуется j-е состояние внешней среды, и выбрали бы решение, приносящее наибольший доход $q_j = \max\limits_{i=1,2,\ldots,m} q_{ij}$). Матрица

$$\mathbf{R} = (r_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

где сожаления r_{ij} рассчитаны по формуле (11.1.1), называется *матрицей сожалений* (или *матрицей рисков*).

Не все случайное можно «измерить» вероятностью. Неопределенность — более широкое понятие. Неопределенность того, какой цифрой вверх ляжет игральный кубик, отличается от неопределенности того, каково будет состояние российской экономики через 15 лет. Кратко говоря, уникальные единичные случайные явления связаны с неопределенностью, а массовые случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера.

Ситуация с полной неопределенностью характеризуется отсутствием какой бы то ни было дополнительной информации. Существуют следующие правила — рекомендации по принятию решений в таких ситуациях.

Правило Вальда (правило крайнего пессимизма). Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация, наихудшая с нашей точки зрения (т. е. приносящая наименьший доход $a_i = \min\limits_{j=1,2,\ldots,n} q_{ij}$) и выберем решение i_0 с наибольшим a_i. Итак, *правило Вальда рекомендует принять такое решение i_0, что*

$$a_{i_0} = \max_{i=1,2,\ldots,m} a_i = \max_{i=1,2,\ldots,m}\left(\min_{j=1,2,\ldots,n} q_{ij}\right).$$

Правило Сэвиджа (правило минимальных сожалений). При применении этого правила анализируется матрица сожалений $\mathbf{R}$. Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимальных сожалений $b_i = \max\limits_{j=1,2,\ldots,n} r_{ij}$, и выберем решение i_0 с наименьшим b_i. Итак, *правило Сэвиджа рекомендует принять такое решение i_0, что*

$$b_{i_0} = \min_{i=1,2,\ldots,m} b_i = \min_{i=1,2,\ldots,m}\left(\max_{j=1,2,\ldots,n} r_{ij}\right).$$

Правило Гурвица взвешивает пессимистический и оптимистический подходы к анализу неопределенной ситуации. По правилу Гурвица, *принимается решение i_0, на котором достигается максимум выражения*

$$\lambda \min_{j=1,2,\ldots,n} q_{ij} + (1-\lambda) \max_{j=1,2,\ldots,n} q_{ij},$$

где $\lambda \in [0; 1]$. Значение λ выбирается из субъективных соображений. Если λ приближается к единице, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, при приближении λ к нулю правило Гурвица приближается к правилу розового оптимизма.

Пример 11.1.1. Сидя в отправляющемся на курорт поезде, перед самым отправлением Петя вдруг вспомнил, что, кажется, забыл выключить дома утюг. Можно еще успеть сойти с поезда и исправить ошибку, но тогда пропадет путевка (100 000 руб.). Если же уехать, утюг, если он действительно включен, может стать причиной пожара, и тогда придется ремонтировать квартиру (1 500 000 руб.). Петя не уверен, включен утюг или выключен. Составить матрицу последствий и матрицу сожалений. Определить решения, рекомендуемые критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

Решение. У Пети есть две стратегии: поехать отдыхать или вернуться домой. У внешней среды также есть два состояния: утюг выключен либо утюг включен.

Матрица последствий имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1\,500\,000 \\ -100\,000 & -100\,000 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу сожалений. Максимум по первому столбцу равен

$$q_1 = \max_{i=1,2} q_{i1} = 0,$$

по второму —

$$q_2 = \max_{i=1,2} q_{i2} = -100\,000,$$

поэтому матрица сожалений

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1\,400\,000 \\ 100\,000 & 0 \end{pmatrix}.$$

Минимальные элементы строк матрицы последствий $a_1 = -1\,500\,000$, $a_2 = -100\,000$. Теперь из двух чисел (−1 500 000), (−100 000) находим наибольшее. Это (−100 000). Значит, правило Вальда рекомендует принять второе решение, т. е. вернуться домой.

Максимальные элементы строк матрицы сожалений $b_1 = 1\,400\,000$, $b_2 = 100\,000$. Из чисел 1 400 000, 100 000 находим наименьшее. Это 100 000. Значит, правило Сэвиджа также, как и правило Вальда, рекомендует принять второе решение, т. е. вернуться домой.

Читатель может убедиться, что правило Гурвица при $\lambda = 0{,}5$ также, как правила Вальда и Сэвиджа, рекомендует принять второе решение, т. е. вернуться домой. ❑

Предположим, что в рассмотренной схеме известны вероятности p_j того, что реальная ситуация развивается по варианту j. Именно такое положение называется **частичной неопределенностью**. При принятии решений в таких ситуациях можно выбрать одно из следующих правил.

Правило максимизации ожидаемого дохода. Доход, получаемый при принятии i-го решения, является случайной величиной Q_i с рядом распределения

$$\begin{array}{c|cccc} Q_i & q_{i1} & q_{i2} & \cdots & q_{in} \\ \hline p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}.$$

Ожидаемый доход при принятии i-го решения оценивается математическим ожиданием $\mathbf{M}Q_i$ соответствующей случайной величины Q_i. *Правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять решение, приносящее максимальный ожидаемый доход.*

Правило минимизации ожидаемых сожалений. Сожаления при реализации i-го решения представляются случайной величиной R_i с рядом распределения

$$\begin{array}{c|cccc} R_i & r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{in} \\ \hline p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}.$$

Ожидаемые сожаления оценивается математическим ожиданием $\mathbf{M}R_i$ соответствующей случайной величины R_i. *Правило минимизации ожидаемых сожалений рекомендует принять решение, влекущее минимальные ожидаемые сожаления.*

Особым видом инвестиционных операций являются проекты, связанные с реальными инвестициями (т. е. не в финансовые инструменты, а в основные производственные фонды), когда в течение достаточно длительного периода в проект производятся крупные вложения, и лишь по прошествии определенного срока и при успешном ходе проекта он начинает приносить доход, причем величину дохода до того, как проект закончится, точно назвать невозможно.

Реализация проекта основывается на принимаемых решениях и должна осуществляться по заранее намеченному и четко сформулированному плану, однако объективно существующая и принципиально неустранимая неопределенность внешней (по отношению к проекту) среды оказывает возмущающее воздействие на движение к намеченной цели, изменяя время (а иногда и принципиальную возможность) осуществления запланированных событий, содержание этих событий и их количественную (денежную) оценку, что может привести к нежелательному развитию событий и повлиять на конечный результат.

Предположим, что банк рассматривает возможность инвестиций в m проектов: $i = 1, 2, ..., m$.

При анализе эффективности инвестиционного проекта все издержки c_t и денежные поступления b_t приводятся к одному и тому же моменту времени (как правило, начальному) и суммируются, в результате получается характеристика инвестиционного проекта, называемая его чистым дисконтированным доходом *NPV* (*Net Present Value*):

$$NPV = \sum_t \frac{b_t - c_t}{(1+i)^t},$$

где i — процентная ставка.

При анализе рисков проекта можно классифицировать состояния внешней среды в зависимости от рисков: макроэкономических, экологических, социально-опасных, связанных с непредвиденными срывами и др. В результате будет получен набор из таких состояний $j = 1, 2, ..., n$.

Теперь можно составить матрицу последствий $\mathbf{Q}$ (каждый элемент которой q_{ij} будет представлять собой эффективность *NPV* i-го проекта при j-м состоянии внешних условий) и выбрать проекты, используя описанные критерии.

Пример 11.1.2. Владелец груза должен выбрать одну из двух альтернатив: страховать груз или не страховать. Риск заключается в том, что с вероятностью 0,1 возможна катастрофа, в результате которой груз будет утрачен. Если груз застрахован, то в случае его утраты владелец теряет стоимость груза (95 000 руб.), но получает компенсацию 100 000 руб., если же катастрофы не произошло, он теряет 5000 руб, потраченные на страховой полис. Если груз не застрахован, в случае катастрофы теряется его стоимость, при благополучном же исходе владелец не несет никаких расходов. Какое решение принять?

Решение. У владельца груза есть две стратегии: страховать груз или не страховать его. У внешней среды также есть два состояния: катастрофа произойдет либо не произойдет.

Матрица последствий имеет вид

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 0 & -5000 \\ -95\,000 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вероятности состояний внешней среды известны ($p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}9$), поэтому ряды распределения дохода при выборе первой и второй стратегии таковы:

$$\begin{array}{c|cc} Q_1 & 0 & -5000 \\ \hline p & 0{,}1 & 0{,}9 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cc} Q_2 & -95\,000 & 0 \\ \hline p & 0{,}1 & 0{,}9 \end{array}.$$

При этом

$$\mathbf{M}Q_1 = 0\cdot 0{,}1 + (-5000)\cdot 0{,}9 = -4500,$$

аналогично

$$\mathbf{M}Q_2 = -9500.$$

Таким образом, правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять первое решение, т. е. застраховать груз.

Составим матрицу сожалений. Максимум по первому столбцу равен $q_1 = \max\limits_{i=1,2} q_{i1} = 0$, по второму — $q_2 = \max\limits_{i=1,2} q_{i2} = 0$, поэтому матрица сожалений

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} 0 & 5000 \\ 95\,000 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ожидаемые сожаления при указанных выше вероятностях. Получаем $\mathbf{M}R_1 = 4500$, $\mathbf{M}R_2 = 9500$. Минимальные ожидаемые сожаления равны 4500, они соответствуют первому решению — застраховать груз. ❑

Пример 11.1.3. Исследуем ситуацию принятия решений в условиях неопределенности в случае, когда матрица последствий

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим матрицу сожалений. Имеем:

$$q_1 = \max_{k=1,2,\ldots,m} q_{k1} = 8, \qquad q_2 = 5, \qquad q_3 = 8, \qquad q_4 = 12,$$

поэтому матрица сожалений

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

По правилу Вальда (правилу крайнего пессимизма) будем полагать, что при принятии i-го решения на самом деле складывается самая плохая ситуация, т. е. приносящая наименьший доход $a_i = \min_j q_{ij}$, и выберем решение i_0 с наибольшим a_{i_0}. Имеем:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 1.$$

Из этих чисел 2, 2, 3, 1 находим максимальное: это 3. Значит, правило Вальда рекомендует принять третье решение.

Правило Сэвиджа аналогично правилу Вальда, только анализируется матрица сожалений: рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимальных сожалений $b_i = \max_j r_{ij}$., и выберем решение i_0 с наименьшим b_{i_0}. Имеем:

$$b_1 = 8, \quad b_2 = 6, \quad b_3 = 5, \quad b_4 = 7.$$

Из этих чисел 8, 6, 5, 7 находим минимальное. Это 5. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять третье решение.

Если известны вероятности состояний внешней среды:

$$1/2, \quad 1/6, \quad 1/6, \quad 1/6,$$

то правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять решение, соответствующее наибольшему из ожидаемых доходов:

$$\mathbf{M}Q_1 = 23/6, \quad \mathbf{M}Q_2 = 25/6, \quad \mathbf{M}Q_3 = 7 \quad \mathbf{M}Q_4 = 17/6.$$

Максимальный ожидаемый доход равен 7, что соответствует третьему решению.

Правило минимизации ожидаемых сожалений рекомендует принять решение, соответствующее наименьшему из ожидаемых сожалений:

$$\mathbf{M}R_1 = 20/6, \quad \mathbf{M}R_2 = 4, \quad \mathbf{M}R_3 = 7/6, \quad \mathbf{M}R_4 = 32/5,$$

т. е. опять третье решение. ❑

11.2. Задание практикума

Возможные значения курса базовой валюты в течение ближайшего года представлены четырьмя интервалами. Банк рассматривает четыре инвестиционных проекта, каждый из которых связан с международным бизнесом. Последствия от принятия банком i-го инвестиционного проекта при условии, что курс валюты окажется в j-м интервале, приведены в табл. 11.2.1. В табл. 11.2.2 приведены прогнозируемые экспертами вероятности возможных интервалов курса базовой валюты.

Требуется построить матрицу сожалений, найти решения, рекомендуемые правилами Вальда, Сэвиджа, максимального ожидаемого дохода и минимального ожидаемого риска, а также определить проекты, оптимальные по Парето.

Таблица 11.2.1

№ проекта	Вариант обменного курса			
	1	2	3	4
1	0	2	4	16
2	0	4	6	12
3	0	1	2	8
4	0	4	6	10
5	0	1	5	14
6	0	8	16	20
7	0	4	10	14
8	0	4	5	20
9	0	4	8	32
10	0	8	12	24
11	−6	−2	4	8
12	−6	−2	−1	14
13	−4	−2	0	8
14	0	2	4	16
15	0	8	12	20
16	0	2	10	28
17	0	16	32	40
18	0	8	20	28
19	0	8	10	40
20	2	4	6	18
21	2	6	8	14
22	2	3	4	10
23	2	6	8	2
24	−6	−2	4	8
25	−6	−2	4	8
26	−3	−1	0	8
27	−6	−5	−4	3
28	−6	−2	0	4
29	−6	−5	−1	8
30	−6	2	10	14
31	2	4	6	18
32	2	12	18	22
33	2	6	12	20
34	2	6	8	22
35	−6	−4	−2	10
36	−6	−2	0	−6
37	2	12	18	22
38	−6	2	14	60

Таблица 11.2.2

№ вар.	Вероятности вариантов обменного курса			
	1	2	3	4
1	1/2	1/4	1/8	1/8
2	1/4	1/4	1/3	1/6
3	1/3	1/3	1/6	1/6
4	1/5	1/5	1/5	2/5
5	1/5	2/5	1/5	1/5
6	1/2	1/8	1/8	1/4
7	1/4	1/4	1/4	1/4
8	1/2	1/4	1/5	1/20
9	1/2	1/4	1/8	1/8
10	1/4	1/4	1/3	1/6
11	1/3	1/3	1/6	1/6
12	1/3	1/3	1/6	1/6
13	1/5	2/5	1/5	1/5
14	1/2	1/8	1/8	1/4
15	1/3	1/3	1/6	1/6
16	1/5	1/5	1/5	2/5
17	1/5	2/5	1/5	1/5
18	1/2	1/8	1/8	1/4
19	1/4	1/4	1/4	1/4
20	1/2	1/4	1/5	1/20
21	1/2	1/4	1/8	1/8
22	1/4	1/4	1/3	1/6
23	1/4	1/4	1/4	1/4
24	1/4	1/4	1/3	1/6
25	1/2	1/4	1/8	1/8
26	1/4	1/4	1/3	1/6
27	1/5	2/5	1/5	1/5
28	1/2	1/8	1/8	1/4
29	1/4	1/4	1/4	1/4
30	1/5	1/5	1/5	2/5
31	1/5	1/5	1/5	2/5
32	1/2	1/8	1/8	1/4
33	1/3	1/3	1/6	1/6
34	1/5	2/5	1/5	1/5
35	1/4	1/4	1/3	1/6

12. Матричная игра

12.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

В экономике и управлении часто встречаются ситуации, в которых сталкиваются две или более стороны, преследующие различные цели, причем результат, полученный каждой из сторон при реализации определенной стратегии, зависит от действий других сторон. Такие ситуации называются *конфликтными*. Приведем несколько примеров конфликтных ситуаций: борьба фирм за рынок сбыта, аукцион, спортивные состязания, военные операции, парламентские выборы (при наличии нескольких кандидатов), карточная игра.

Рассмотрим конфликт двух участников с противоположными интересами. Математической моделью такого конфликта является **игра с нулевой суммой**. Участники игры называются *игроками*. *Стратегией* игрока называется осознанный выбор одного из множества возможных вариантов его действий. Будем рассматривать конечные игры, в которых множества стратегий игроков конечны; стратегии первого игрока пронумеруем от 1 до m, а стратегии второго игрока — от 1 до n.

Если первый игрок выбрал свою i-ю стратегию, а второй игрок — свою j-ю стратегию, то результатом такого совместного выбора будет *платеж* a_{ij} второго игрока первому (это не обязательно денежная сумма, а любая оценка последствий выбора игроками своих стратегий). Таким образом, игра с нулевой суммой однозначно определяется матрицей

$$\Pi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (12.1.1)$$

которая называется *платежной*. Строки этой матрицы соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы — стратегиям второго игрока. Конечные игры с нулевой суммой называются *матричными*, так как целиком определяются своими платежными матрицами.

Игра происходит *партиями*. Партия игры состоит в том, что игроки одновременно называют свой выбор: первый игрок называет некоторый номер строки матрицы Π (по своему выбору), а второй — некоторый номер столбца этой матрицы (также по своему выбору). После этого происходит «расплата». Пусть, например, первый игрок назвал номер i, а второй — j. Тогда второй игрок платит первому сумму a_{ij} (не обязательно выраженную в денежных единицах). На этом партия игры заканчивается. Если $a_{ij} > 0$, то это означает, что при выборе первым игроком i-й стратегии, а вторым — j-й стратегии выигрывает первый игрок, если же $a_{ij} < 0$, то это значит, что при данном выборе стратегий выигрывает второй игрок.

Цель каждого игрока — выиграть как можно бóльшую сумму в результате большого числа партий.

Стратегия называется *чистой*, если выбор игрока неизменен от партии к партии. У первого игрока, очевидно, есть m чистых стратегий, а у второго — n.

При анализе игр противник считается сильным, т. е. разумным.

Рассмотрим описанную конфликтную ситуацию с точки зрения первого игрока. Если мы выбираем свою i-ю стратегию (строку матрицы), то второй игрок, будучи разумным, выберет такую стратегию, чтобы обеспечить себе наибольший выигрыш (а нам, соответственно, наименьший), т. е. он выберет такой столбец матрицы , в котором платеж a_{ij} (второго игрока первому) минимален.

Переберем все наши стратегии $i = 1, 2, ..., m$ и выберем такую из них, при которой второй игрок, действуя максимально разумно, заплатит нам наибольшую сумму. Величина

$$\alpha = \max_{i=1,2,...,m} \min_{j=1,2,...,n} a_{ij}$$

называется *нижней ценой игры*, а соответствующая ей стратегия первого игрока — *максиминной*. Аналогично (но уже с точки зрения второго игрока) определяется *верхняя цена игры*

$$\beta = \min_{j=1,2,...,n} \max_{i=1,2,...,m} a_{ij}$$

и соответствующая ей *минимаксная стратегия* второго игрока. Подчеркнем, что по своему определению нижняя цена игры α представляет собой минимальный гарантированный выигрыш первого игрока (т. е. применяя свою максиминную стратегию, первый игрок обеспечивает себе выигрыш, не меньший α), а верхняя цена — величину, противоположную максимальному гарантированному проигрышу второго игрока [т. е. применяя свою минимаксную стратегию, второй игрок гарантирует, что он не проиграет больше, чем β, или, по-другому, выиграет не меньше чем $(-\beta)$].

В общем случае имеет место неравенство $\alpha \leqslant \beta$, если же $\alpha = \beta$, то говорят, что игра имеет *седловую точку*, общее значение и называется при этом *ценой игры* и обозначается $\nu = \alpha = \beta$. При этом стратегии игроков, соответствующие седловой точке, называются *оптимальными чистыми стратегиями*, так как эти стратегии являются наиболее выгодными сразу для обоих игроков, обеспечивая первому игроку гарантированный выигрыш не менее ν , а второму игроку — гарантированный проигрыш не более $(-\nu)$.

Пример 12.1.1. В платежной матрице

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

указано, какую долю рынка получит наше предприятие, если оно будет действовать согласно каждой из возможных трех стратегий, а основной конкурент — согласно каждой из своих возможных трех стратегий.

Решение. Данная игра имеет седловую точку. Действительно, нижняя цена игры

$$\alpha = \max_{i=1,2,3} \min_{j=1,2,3} a_{ij} = \max\{0,1,\ 0,3,\ 0,1\} = 0,3$$

(соответствует второй стратегии первого игрока), а верхняя цена игры

$$\beta = \min_{j=1,2,3} \max_{i=1,2,3} a_{ij} = \min\{0,5,\ 0,3,\ 0,4\} = 0,3$$

(соответствует второй стратегии второго), поэтому игроки, действуя каждый по своей второй стратегии, могут гарантировать себе: первый — выигрыш не менее $\nu = \alpha = \beta = 0,3 = 30\%$ рынка, а второй — что первый игрок выиграет не более $\nu = 30\%$ рынка. Таким образом, оптимальная чистая стратегия первого игрока — вторая, второго игрока — вторая, а цена игры равна $\nu = 0,3$. ❑

Смешанной стратегией первого игрока называется вектор

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix},$$

где все $p_i \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), а $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. При этом p_i — вероятность, с которой первый игрок выбирает свою i-ю стратегию. Аналогично определяется смешанная стратегия

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

второго игрока. Чистая стратегия также подпадает под определение смешанной — если все вероятности равны нулю, кроме одной, равной единице.

Если игроки играют своими смешанными стратегиями

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

соответственно, то математическое ожидание выигрыша первого игрока равно

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$$

(и равно математическому ожиданию проигрыша второго игрока).

Стратегии

$$\mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ \vdots \\ p_m^* \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{q}^* = \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ \vdots \\ q_n^* \end{pmatrix}$$

называются *оптимальными смешанными стратегиями* соответственно первого и второго игрока, если

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \leqslant M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leqslant M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}).$$

Если у обоих игроков есть оптимальные смешанные стратегии, то пара $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ называется *решением игры* (или *седловой точкой в смешанных стратегиях*), а число $\nu = M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ — *ценой игры.*

Основная теорема теории игр. *В любой матричной игре у игроков есть оптимальные смешанные стратегии.*

Интересно отметить, что игры с полной информацией (когда игроки при каждом своем ходе знают результаты всех предыдущих ходов) имеют седловую точку, а значит, и решение в чистых стратегиях. В частности, играми с полной информацией являются шахматы, шашки, «крестики-нолики» и др. Оптимальные стратегии при игре в шахматы пока не найдены ввиду слишком большого числа стратегий, однако прогресс в области компьютерной техники позволяет прогнозировать решение этой задачи в обозримом будущем.

Пример 12.1.2. Правила игры таковы. Первый игрок прячет в кулаке одну из двух монет: 1 руб. или 5 руб., по своему выбору, а второй игрок пытается угадать, какая монета спрятана, и если угадывает, то получает эту монету, в противном случае платит первому игроку 3 руб.

Решение. Платежная матрица, очевидно, имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего проверим, нет ли в игре седловой точки. Действительно, нижняя цена игры

$$\alpha = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} a_{ij} = \max\{-1,\ -5\} = -1,$$

а верхняя цена игры

$$\beta = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} a_{ij} = \min\{3,\ 3\} = 3,$$

т. е. $\alpha \neq \beta$, и седловой точки (в чистых стратегиях) в игре нет. Пусть первый игрок выбирает свою первую стратегию с вероятностью p, а вторую стратегию — соответственно с вероятностью $(1 - p)$, т. е. первый игрок играет со смешанной стратегией

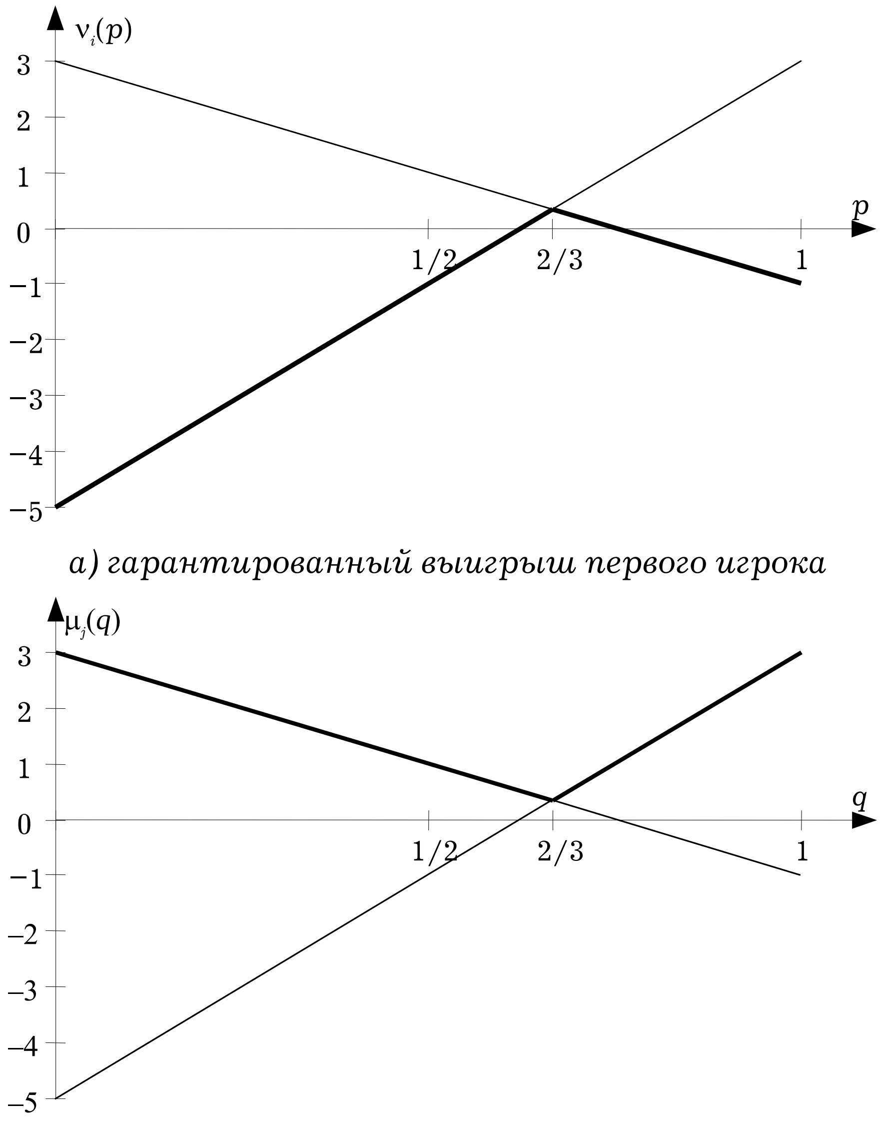
$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\nu_j(p)$ ожидаемый выигрыш первого игрока, если второй игрок при этом выберет свою j-ю стратегию. В нашем случае

$$\nu_1(p) = (-1)p + 3(1-p),$$

$$\nu_2(p) = 3p + (-5)(1-p).$$

Построим графики этих функций на рис. 12.1.1, *а*.



а) гарантированный выигрыш первого игрока

б) верхняя граница проигрыша второго игрока в зависимости от его смешанной стратегии

Рис. 12.1.1. *Гарантированный выигрыш первого игрока и верхняя граница проигрыша второго игрока в зависимости от смешанных стратегий*

Второй игрок так выбирает свои стратегии, чтобы обеспечить первому минимальный выигрыш: $\nu(p) = \min\{\nu_1(p), \nu_2(p)\}$ (эта функция отмечена на рис. 12.1.1, *а* жирной линией). Иными словами, второй игрок в любом случае заставит первого выиграть как можно меньше, т. е. в рассматриваемой игре при $p \in [0; p^*)$ второй игрок будет выбирать свою вторую стратегию и первый игрок будет выигрывать $\nu_2(p)$, при $p \in (p^*; 1]$ второй игрок будет выбирать первую стратегию и первый игрок будет выигрывать $\nu_1(p)$. Наилучший для первого игрока выбор при этом соответствует $\nu = \max\limits_{p \in [0;1]} v(p)$, т. е. $p = p^*$. Число называется при этом ценой игры. В нашем случае $p^* = 2/3$, т. е. оптимальной смешанной стратегией первого игрока является стратегия

$$\mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

которая определяется из условия

$$\nu_1(p) = \nu_2(p),$$

при этом цена игры равна $\nu = \nu_1(2/3) = \nu_2(2/3) = 1/3$.

Отметим, что второй игрок, действуя разумно, никогда не будет выбирать третью и четвертую стратегии, поэтому вектор оптимальной смешанной стратегии второго игрока имеет вид

$$\mathbf{q}^* = \begin{pmatrix} q \\ 1-q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда выигрыш второго игрока равен $\mu_1(q) = -q + 3(1-q)$, если первый игрок выбирает свою первую стратегию, и $\mu_2(q) = 3q - 5(1-q)$, если первый игрок выбирает свою вторую стратегию (рис. 3.12.1, *б*). Значение q определяется из условия $\mu_1(q) = \mu_2(q)$, оно равно $q = 2/3$.

Поэтому оптимальная смешанная стратегия второго игрока равна

$$\mathbf{q}^* = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}. \square$$

Пример 3.12.3. Решить игру с платежной матрицей

$$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Платежная матрица данной игры имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, имеет ли данная игра седловую точку. Нижняя цена игры

$$\alpha = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2,3,4} a_{ij} = \max\{-2, -4\} = -2,$$

а верхняя цена игры

$$\beta = \min_{j=1,2,3,4} \max_{i=1,2} a_{ij} = \min\{2,\ 3,\ 4,\ 1\} = 1,$$

т. е. $\alpha \neq \beta$, значит, седловой точки (в чистых стратегиях) в игре нет. Пусть первый игрок выбирает свою первую стратегию с вероятностью p, а вторую стратегию — соответственно с вероятностью $(1 - p)$, т. е. первый игрок играет со смешанной стратегией

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\nu_j(p)$ ожидаемый выигрыш первого игрока, если второй игрок при этом выберет свою j-ю стратегию. В нашем случае

$$\nu_1(p) = (-2)p + 2(1-p), \qquad \nu_2(p) = 3p + (-4)(1-p),$$
$$\nu_3(p) = 4p + (-3)(1-p), \qquad \nu_4(p) = p + (-1)(1-p).$$

Графики этих функций построены на рис. 3.12.2.

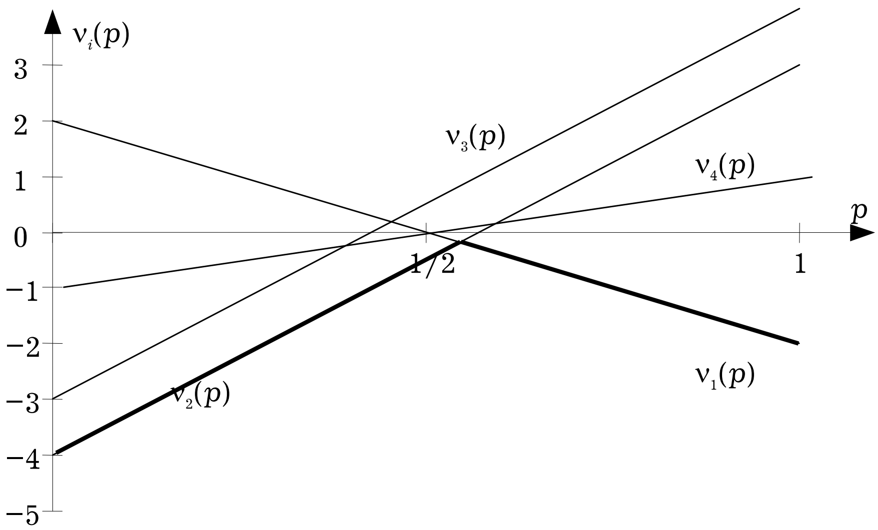


Рис. 12.1.2. *Гарантированный выигрыш первого игрока при различном выборе смешанной стратегии*

Второй игрок так выбирает свои стратегии, чтобы обеспечить первому минимальный выигрыш: $\nu(p) = \min\{\nu_1(p), \nu_2(p), \nu_3(p), \nu_4(p)\}$ (эта функция отмечена на рис. 3.12.2 жирной линией). Иными словами, при $p \in [0; p^*)$ второй игрок будет выбирать свою вторую стратегию и первый игрок будет выигрывать $\nu_2(p)$, при $p \in (p^*; 1]$ второй игрок будет выбирать первую стратегию и первый игрок будет выигрывать $\nu_1(p)$. Наилучший для первого игрока выбор при этом соответствует $\nu = \max_{p\in[0;\,1]} v(p)$. В нашем случае оптимальной смешанной стратегией первого игрока является стратегия

$$\mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 5/11 \end{pmatrix}$$

[она определяется из условия $\nu_1(p)=\nu_2(p)$], при этом цена игры равна $\nu=\nu_1(6/11)=\nu_2(6/11)=-2/11$.

Отметим, что второй игрок, действуя разумно, никогда не будет выбирать третью и четвертую стратегии, поэтому вектор оптимальной смешанной стратегии второго игрока имеет вид

$$\mathbf{q}^* = \begin{pmatrix} q \\ 1-q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда выигрыш второго игрока равен $\mu_1(q)=-2q+3(1-q)$, если первый игрок выбирает свою первую стратегию, и $\mu_2(q)=2q-4(1-q)$, если первый игрок выбирает свою вторую стратегию. Значение q определяется из условия $\mu_1(q)=\mu_2(q)$, оно равно $q = 7/11$.

Итак, оптимальная смешанная стратегия второго игрока равна

$$\mathbf{q}^* = \begin{pmatrix} 7/11 \\ 4/11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \ \square$$

В общем случае любая матричная игра с произвольным числом стратегий может быть сведена к паре взаимно двойственных задач линейного программирования.

Пусть рассматривается игра с платежной матрицей (3.12.1), все элементы которой строго положительны; и

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \text{ —}$$

смешанные стратегии первого и второго игрока.

Цена данной игры положительна, так как все элементы платежной матрицы положительны.

Если стратегия **p** является оптимальной, то выигрыш первого игрока независимо от того, какую стратегию выберет второй игрок, будет не меньше цены игры ν:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \geqslant \nu, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \geqslant \nu, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \geqslant \nu. \end{cases} \tag{12.1.2}$$

При этом

$$p_i \geqslant 0,\ i=1,2,\dots,m, \qquad p_1+p_2+\dots+p_m=1.$$

Введем новые обозначения

$$x_i = p_i/\nu,\ i=1,2,\dots,m$$

и разделить все неравенства системы (12.1.2) на положительную цену игры ν, то получим следующую систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geqslant 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geqslant 1, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geqslant 1. \end{cases}$$

При этом

$$x_i \geqslant 0,\ i=1,2,\dots,m, \qquad \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}.$$

Цель первого игрока — максимизировать цену игры, т. е. минимизировать величину $1/\nu = \sum\limits_{i=1}^m x_i$.

Таким образом, приходим к задаче линейного программирования для первого игрока:

$$\sum_{i=1}^m x_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \geqslant 1, \quad j=1,2,\dots,n,$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i=1,2,\dots,m.$$

Аналогичные рассуждения с позиции второго игрока приводят к задаче линейного программирования, двойственной к задаче для первого игрока:

$$\sum_{j=1}^n y_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \leqslant 1, \quad i=1,2,\dots,m,$$

$$y_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\dots,n.$$

Если оптимальные решения этих задач равны

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix},$$

то цена игры равна

$$\nu = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*},$$

а оптимальные смешанные стратегии игроков —

$$\mathbf{p}^* = \nu \mathbf{x}^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \Big/ \sum_{i=1}^{m} x_i^* \\ x_2^* \Big/ \sum_{i=1}^{m} x_i^* \\ \vdots \\ x_m^* \Big/ \sum_{i=1}^{m} x_i^* \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{q}^* = \nu \mathbf{y}^* = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*} \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^* \Big/ \sum_{j=1}^{n} y_j^* \\ y_2^* \Big/ \sum_{j=1}^{n} y_j^* \\ \vdots \\ y_n^* \Big/ \sum_{j=1}^{n} y_j^* \end{pmatrix}.$$

Если же в платежной матрице есть отрицательные элементы или нули, то можно добавить ко всем элементам матрицы одно и тоже достаточно большое положительное число b, так чтобы все элементы матрицы стали положительными, затем поставить и решить пару двойственных задач линейного программирования, найти оптимальные смешанные стратегии игроков, а цену игры скорректировать путем вычитания из нее числа b.

Пример 12.1.4. Решить матричную игру из примера 12.1.2 с помощью ее сведения к паре взаимно двойственных задач линейного программирования.

Решение. От платежной матрицы

$$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

путем добавления положительного числа $b = 5$ перейдем к матрице

$$\Pi' = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

все элементы которой положительны.

Пара двойственных задач линейного программирования такова:

$$x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \geqslant 1, \\ 8x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ 9x_1 + 2x_2 \geqslant 1, \\ 4x_1 + 6x_2 \geqslant 1, \end{cases}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3y_1 + 8y_2 + 9y_3 + 4y_4 \leqslant 1, \\ 7y_1 + y_2 + 2y_3 + 6y_4 \leqslant 1, \end{cases}$$
$$y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0, y_4 \geqslant 0.$$

Оптимальные решения этих задач равны

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 6/53 \\ 5/53 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} 7/53 \\ 4/53 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

оптимальные смешанные стратегии игроков

$$\mathbf{p}^* = \frac{1}{6/53+5/53}\begin{pmatrix} 6/53 \\ 5/53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 5/11 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{q}^* = \frac{1}{7/53+4/53+0+0}\begin{pmatrix} 7/53 \\ 4/53 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/11 \\ 4/11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а цена игры

$$\nu = \frac{1}{6/53+5/53} - 5 = -2/11. \ \square$$

12.2. Задание практикума

Предприятие имеет две стратегии рыночного поведения, тогда как его конкурент имеет четыре таких стратегии. Прибыль (в млн. руб.), которую получит предприятие при условии, что оно изберет стратегию i ($i = 1, 2$), а его конкурент — стратегию j ($j = 1, 2, 3, 4$), равна a_{ij}. Платежная матрица П для каждого варианта приведена в табл. 12.2.1.

Требуется двумя способами (графическим и с помощью сведения матричной игры к паре взаимно двойственных задач линейного программирования) найти оптимальные смешанные стратегии предприятия и конкурента, а также цену игры — оптимальную прибыль предприятия.

Таблица 12.2.1

№ вар.	Платежная матрица	№ вар.	Платежная матрица	№ вар.	Платежная матрица
1	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ -4 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 & -3 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 12.2.1

№ вар.	Платежная матрица	№ вар.	Платежная матрица	№ вар.	Платежная матрица
19	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$	31	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$	33	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 3 \\ -5 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	34	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	35	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} -5 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$		

13. Биматричная игра

13.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Не все конфликтные ситуации можно представить как игры с нулевой суммой, потому что интересы участников таких конфликтов не всегда противоположны.

Обобщением игр с нулевой суммой на случай непротивоположных интересов участников являются **игры с ненулевой суммой**.

Первый игрок может выбрать одну из m своих стратегий, обозначенных номерами $i = 1, 2, ..., m$, а второй игрок — одну из n своих стратегий, обозначенных номерами $j = 1, 2, ..., n$, Если первый игрок выбрал свою i-ю стратегию, а второй игрок — свою j-ю стратегию, то в результате такого совместного выбора первый игрок получает выигрыш a_{ij}, а второй игрок — выигрыш b_{ij}. При этом совершенно не обязательно, чтобы $b_{ij} = -a_{ij}$, как в матричной игре.

Таким образом, игра с ненулевой суммой определяется двумя матрицами

$$\mathbf{\Pi}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Pi}^{(2)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (13.1.1)$$

Конечная игра с ненулевой суммой полностью определяется этими двумя матрицами, поэтому называется *биматричной*.

Биматричная игра, как и матричная, происходит партиями. Цель каждого игрока — выиграть как можно большую сумму в результате большого числа партий. Аналогично матричным играм, вводятся понятия чистых и смешанных стратегий игроков в биматричной игре.

Если матричные игры являются играми со строгим соперничеством, поскольку выигрыш одного игрока в точности равен проигрышу другого, то в биматричных играх интересы игроков могут быть в большей или меньшей степени близки.

В зависимости от того, запрещено или разрешено сотрудничество игроков, различают *некооперативные* и *кооперативные игры*.

Анализ биматричной игры в некооперативном варианте сводится к поиску *максиминных стратегий* игроков, т. е. стратегий, которые обеспечивают игрокам получение максимально возможного гарантированного выигрыша вне зависимости от действий противника.

Множество всевозможных пар смешанных стратегий игроков обозначим

$$S = \left\{ (\mathbf{p}, \mathbf{q}) : \mathbf{p} \in S_1, \mathbf{q} \in S_2 \right\},$$

где

$$S_1 = \left\{ \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} : \ p_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} : \ q_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, n, \ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\}.$$

Если два игрока выбрали с м е ш а н н ы е с т р а т е г и и

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

соответственно, то математические ожидания выигрышей игроков равны соответственно

$$M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} \quad \text{и} \quad M_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij}.$$

Максиминные стратегии первого и второго игроков обеспечивают им гарантированные выигрыши

$$\alpha = \max_{\mathbf{p} \in S_1} \min_{\mathbf{q} \in S_2} M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad \text{и} \quad \beta = \max_{\mathbf{q} \in S_2} \min_{\mathbf{p} \in S_1} M_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

соответственно вне зависимости от поведения противника.

В некооперативном случае игрокам имеет смысл придерживаться своих осторожных стратегий (т. е. максиминных).

Обсудим теперь подходы к **анализу биматричной игры в кооперативном варианте**.

Так как $p_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $q_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{jj=1}^{n} q_j = 1$, все возможные варианты пар выигрышей представляют собой выпуклую оболочку точек плоскости с координатами (a_{ij}, b_{ij}), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$; эти точки соответствуют выигрышам игроков в случае выбора им своих ч и с т ы х с т р а т е г и й.

При этом точка (M_1', M_2') доминирует точку (M_1'', M_2'') если

$$\begin{cases} M_1' > M_1'', \\ M_2' \geqslant M_2'' \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} M_1' \geqslant M_1'', \\ M_2' > M_2'', \end{cases}$$

это означает, что при переходе от первой точки ко второй выигрыш каждого из игроков не уменьшится, и при этом хотя бы у одного из игроков выигрыш увеличится.

Множество точек, оптимальных по Парето (т. е. не доминируемых другими), описывается так:

$$T=\left\{(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*):\mathbf{p}^*\in S_1;\mathbf{q}^*\in S_2;\forall\mathbf{p}\in S_1\ M_1(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)\geqslant M_1(\mathbf{p},\mathbf{q}^*);\ \forall\mathbf{q}\in S_2\ M_2(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)\geqslant M_2(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)\right\}.$$

Если выбрать из множества точек, оптимальных по Парето, те точки, в которых первый игрок получит выигрыш не меньше своего максиминного выигрыша α, а второй игрок — не меньше своего максиминного выигрыша β, то получится *переговорное множество*

$$U=\left\{(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)\in T:M_1(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)\geqslant\alpha;\ M_2(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)\geqslant\beta\right\}.$$

Игрокам, естественно, имеет смысл выбирать свои оптимальные стратегии, соответствующие точкам из переговорного множества.

Существуют различные способы достижения игроками договоренности о совместном выборе точки из переговорного множества.

Самый простой из них заключается в выборе таких чистых стратегий, которые приносят игрокам наибольший суммарный доход, из которого один из игроков платит другому оговоренную сумму. Этот способ, конечно же, предполагает полностью доверительные отношения между игроками.

Если же договориться о выборе точки из переговорного множества игрокам не удается, то можно предложить им применить одну из так называемых арбитражных схем. Например, **арбитражная схема Нэша** предполагает игрокам выбрать такую пару смешанных стратегий, что ни одному из игроков будет невыгодно от нее отклоняться, если противник этой стратегии будет придерживаться.

Реализация алгоритма Нэша предполагает решение задачи математического программирования

$$\begin{gathered}\left(M_1(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)-\alpha\right)\left(M_2(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)-\beta\right)\to\max,\\ (\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)\in U.\end{gathered}$$

Пример 13.1.1. Проанализировать биматричную игру, заданную матрицами

$$\Pi^{(1)}=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 8 & 2\end{pmatrix},\qquad \Pi^{(2)}=\begin{pmatrix}9 & 7\\ 4 & 10\end{pmatrix}.$$

Решение. Смешанные стратегии игроков можно представить в виде

$$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}p\\ 1-p\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad\mathbf{q}=\begin{pmatrix}q\\ 1-q\end{pmatrix}$$

(здесь $p\in[0;1]$, $q\in[0;1]$). При этом соответственно, то математические ожидания выигрышей игроков равны соответственно

$$M_1(\mathbf{p},\mathbf{q})=6pq+9p(1-q)+8(1-p)q+2(1-p)(1-q)=(6-9p)q+7p+2,$$

$$M_2(\mathbf{p},\mathbf{q})=9pq+7p(1-q)+4(1-p)q+10(1-p)(1-q)=(8q-3)p-6q+10.$$

Максиминные стратегии игроков определяются из условий

$$\alpha = \max_{p\in[0;1]}\min_{q\in[0;1]}\big((6-3p)q+p+2\big) = \max\left\{\max_{p\in[0;2/3]}(7p+2);\ \max_{p\in[2/3;1]}(8-2p)\right\} = \frac{20}{3},$$

$$\beta = \max_{q\in[0;1]}\min_{p\in[0;1]}\big((8q-3)p-6q+10\big) = \max\left\{\max_{q\in[0;3/8]}(2q+7);\ \max_{q\in[3/8;1]}(10-6q)\right\} = \frac{31}{4}.$$

Таким образом, максиминные стратегии первого и второго игрока равны соответственно

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}.$$

Множество всех возможных пар выигрышей игроков представлено четырехугольником *ABCD* на рис. 13.1.1. Очевидно, множество Парето соответствует отрезку *BC*, а переговорное множество — отрезку *EF*.

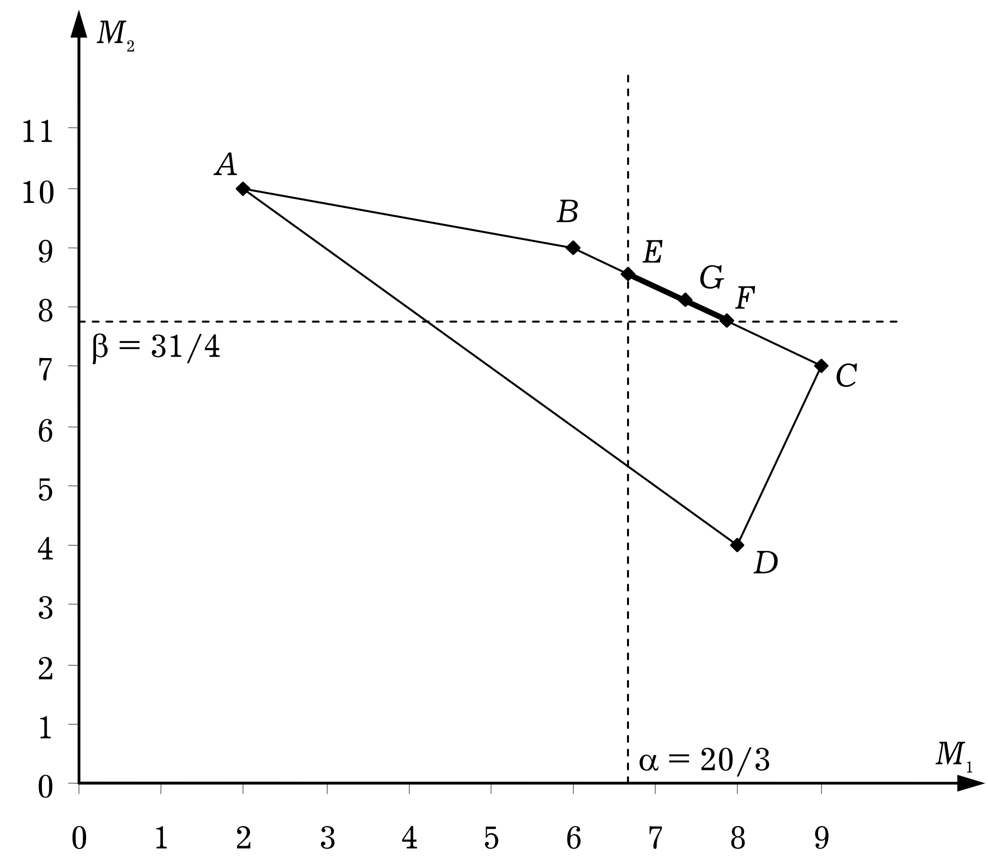


Рис. 13.1.1. *Множество ожидаемых выигрышей, множество Парето и переговорное множество*

Прямая, проходящая через точки *B*(6; 9) и *C*(9; 7), задается уравнением $M_2 = 13 - 2M_1/3$, поэтому функция Нэша

$$\left(M_1 - \frac{20}{3}\right)\left(M_2 - \frac{31}{4}\right) = \left(M_1 - \frac{20}{3}\right)\left(13 - \frac{2}{3}M_1 - \frac{31}{4}\right) =$$

$$= \left(M_1 - \frac{20}{3}\right)\left(\frac{21}{4} - \frac{2}{3}M_1\right) = -\frac{2}{3}M_1^2 + \frac{349}{36}M_1 - 35.$$

на отрезке $M_1 \in [20/3; 63/8]$ (т. е. на отрезке BC) достигает максимума в точке $M_1^* = 349/48$. При этом $M_2^* = 13 - 2M_1^*/3 = 587/72$. Эта точка на рис. 13.1.1 обозначена G.

Точка $G(349/48; 587/72)$ является выпуклой комбинацией точек $B(6; 9)$ и $C(9; 7)$, т. е.

$$\begin{cases} 6\lambda + 9(1-\lambda) = 349/48, \\ 9\lambda + 7(1-\lambda) = 587/72, \end{cases}$$

откуда $\lambda = 83/144$.

Точка B соответствует выбору обоими игроками своих первых чистых стратегий, точка C соответствует выбору первым игроком своей первой чистой стратегии, а вторым игроком — своей второй чистой стратегии, поэтому точка G означает, что первый игрок выбирает свою первую чистую стратегию, а второй игрок с вероятностью $q^* = \lambda = 83/144$ выбирает первую чистую стратегию, и с вероятностью $1 - q^* = 61/144$ — вторую чистую стратегию.

Таким образом, максиминные стратегии первого и второго игрока, равновесные по Нэшу, равны соответственно

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 83/144 \\ 61/144 \end{pmatrix}.$$

При этом средний выигрыш первого игрока равен $M_1^* = 349/48$, а второго игрока — $M_2^* = 587/72$. ❑

13.2. Задание практикума

Каждое из двух конкурирующих предприятий имеет по две стратегии рыночного поведения. Прибыли предприятий (в млн. руб.) при условии, что первое предприятие изберет стратегию i ($i = 1, 2$), а второе предприятие — стратегию j ($j = 1, 2$), равны соответственно a_{ij} и b_{ij}. Платежные матрицы $\Pi^{(1)} = (a_{ij})$ и $\Pi^{(2)} = (b_{ij})$ для каждого варианта приведены в табл. 13.2.1.

Таблица 13.2.1

№ вар.	$\Pi^{(1)}$	$\Pi^{(2)}$	№ вар.	$\Pi^{(1)}$	$\Pi^{(2)}$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

№ вар.	$\mathbf{П}^{(1)}$	$\mathbf{П}^{(2)}$	№ вар.	$\mathbf{П}^{(1)}$	$\mathbf{П}^{(2)}$
7	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 8 & 7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6 & 6\\ 9 & 6\end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8 & 8\\ 2 & 1\end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 8 & 7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6 & 6\\ 9 & 1\end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 8\\ 3 & 2\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9 & 9\\ 3 & 1\end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 8\\ 9 & 1\end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 8 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 9\\ 4 & 2\end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 8 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 9\\ 4 & 2\end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 6 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 9\\ 8 & 1\end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 6 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 8\\ 9 & 2\end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix}5 & 1\\ 7 & 9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 5\\ 9 & 6\end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 7\\ 3 & 2\end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix}5 & 1\\ 8 & 9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 5\\ 9 & 5\end{pmatrix}$	31	$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 8\\ 4 & 2\end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 9 & 8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 9\\ 7 & 1\end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 7\\ 2 & 2\end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 9 & 9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 2\end{pmatrix}$	33	$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 9 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 8\\ 9 & 1\end{pmatrix}$	34	$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 7\\ 4 & 2\end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & 3\end{pmatrix}$	35	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 5\\ 8 & 3\end{pmatrix}$			

14. Модель поведения потребителя

14.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Рассмотрим рынок, на котором продаются товары n видов. Пусть p_1, p_2, ..., p_n — цены этих товаров, вектор

$$\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n)$$

естественно назвать *вектором цен*.

Пусть некоторый потребитель обладает богатством M ден. ед., и x_i — это количество единиц i-го товара, которые данный потребитель приобретает на рынке ($i = 1, 2, ..., n$). Вектор

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

координаты которого неотрицательны и соответствуют приобретаемым количествам товаров каждого вида, называется *набором товаров*, а множество всех наборов товаров

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \geqslant 0, \;\; x_2 \geqslant 0, \;\; \ldots, \;\; x_n \geqslant 0 \right\}$$

называется *пространством товаров* (поскольку на наборы товаров не налагается ограничений целочисленности, здесь предполагается, что можно приобрести произвольное — целое или дробное — количество любого товара, т. е. что все товары являются безгранично делимыми).

Стоимость набора товаров $\mathbf{x}$ равна, очевидно,

$$\mathbf{px} = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n.$$

Бюджетное множество $\mathcal{B}$ — это множество наборов товаров $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, которые может себе позволить приобрести при данных ценах p_1, p_2, ..., p_n потребитель, обладающий богатством I (при этом предполагается, что тратить все деньги необязательно).

С алгебраической точки зрения бюджетное множество описывается системой линейных неравенств

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leqslant I, \\ x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \; \ldots, \;\; x_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{14.1.1}$$

Теорема о бюджетном множестве. *Бюджетное множество является выпуклым, ограниченным и замкнутым.*

Потребитель различает наборы товаров: один набор товаров он может считать для себя более предпочтительным, чем другой, два каких-то других набора товаров он может считать равноценными. Запись $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ означает, что потребитель считает набор товаров $\mathbf{x}$ не хуже набора товаров $\mathbf{y}$.

В качестве **первой аксиомы потребителя** примем, что относительно любых двух наборов товаров $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ потребитель может однозначно сказать, верно ли, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. Тем самым, на пространстве товаров задано отношение слабого предпочтения «$\succcurlyeq$». Слабое предпочтение определяет еще два отношения на пространстве товаров:

- отношение равноценности «$\sim$»: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда одновременно верно, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$; запись «$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$» означает равноценность наборов товаров $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ с точки зрения данного потребителя: $\mathbf{x}$ не хуже $\mathbf{y}$, а $\mathbf{y}$ не хуже $\mathbf{x}$;
- отношение сильного предпочтения «$\succ$»: $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда верно, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, и неверно, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$; запись «$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$» означает, что набор товаров $\mathbf{x}$ с точки зрения данного потребителя строго лучше набора товаров $\mathbf{y}$: $\mathbf{x}$ не хуже $\mathbf{y}$, но при этом $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ не равноценны.

Вторая аксиома потребителя описывает свойства отношений «$\succcurlyeq$», «$\sim$» и «$\succ$»:

- отношения слабого предпочтения и равноценности являются *рефлексивными* (т. е. для любого набора товаров $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ верно, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{x}$ и $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$);
- отношения слабого предпочтения, равноценности и сильного предпочтения являются *транзитивными* (т. е. для любых наборов товаров $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{C}$ из того, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, а $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}$, следует, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}$; из того, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, а $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$, следует, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$; из того, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, а $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$, следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$);
- отношение равноценности является *симметричным* (т. е. из того, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, следует, что $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$).

Третья аксиома потребителя говорит о том, что каждый товар является для потребителя *желательным*, т. е. если $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$, то $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, а если $\mathbf{x} > \mathbf{y}$, то $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

Рациональное поведение потребителя состоит в выборе наиболее предпочтительного, с его точки зрения, набора товаров из бюджетного множества. При постановке и решении задачи определения рационального поведения потребителя удобнее оценивать привлекательность различных наборов товаров не с помощью отношений предпочтения и равноценности, а с помощью *функции полезности*, которая ставит в соответствие каждому набору товаров $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ некоторое число $u(\mathbf{x})$ — полезность данного набора товаров — и удовлетворяет двум условиям:

- $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$;
- $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} \sim \mathbf{y}$.

(Из этих условий следует, очевидно, что $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.)

Если выбран некоторый набор товаров $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, то множество $\mathcal{P}_\mathbf{x} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{C} \mid \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}\}$ называется *множеством предпочтительности* для $\mathbf{x}$, а множество $\mathcal{N}_\mathbf{x} = \{\mathbf{z} \in \mathcal{C} \mid \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}\}$ называется *множеством непредпочтительности* для данного набора товаров. Система предпочтений называется *непрерывной*, если для любого набора товаров $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ множества предпочтительности и непредпочтительности являются замкнутыми.

Теорема Дебре. *Если система предпочтений потребителя непрерывна, то для такого потребителя существует непрерывная функция полезности.*

Будем считать функцию полезности дифференцируемой, при этом частная производная $\partial u / \partial x_i$ имеет смысл *предельной полезности* i-го товара: она показывает, насколько увеличится полезность, если добавить к данному набору товаров $\mathbf{x}$ еще одну единицу i-го товара.

Перечислим **основные свойства функции полезности:**

- функция полезности определяется неоднозначно (если $u(\mathbf{x})$ — некоторая функция полезности, то, например, $u_1(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + a$, $u_2(\mathbf{x}) = bu(\mathbf{x})$ [при $b > 0$], $u_3(\mathbf{x}) = \log_c u(\mathbf{x})$ [при $c > 1$] и любая другая строго возрастающая функция от $u(\mathbf{x})$ также будут функциями полезности);
- функция полезности является строго возрастающей [аксиома желательности утверждает, что из того, что $\mathbf{x} > \mathbf{y}$, следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$; по определению функции полезности $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$, значит, если $\mathbf{x} > \mathbf{y}$, то $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$];
- предельные полезности товаров положительны (поскольку функция полезности является строго возрастающей и дифференцируемой, то $\partial u / \partial x_i > 0$);
- небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность (или, иначе, предельная полезность первой единицы товара бесконечна):

$$\lim_{x_i \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = +\infty;$$

- по мере увеличения потребления товара его предельная полезность уменьшается **(первый закон Госсена)**:

$$\partial^2 u / \partial x_i^2 < 0;$$

- при очень большом объеме потребления товара его дальнейшее увеличение не приводит к росту полезности:

$$\lim_{x_i \to +\infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

На практике используются следующие **конкретные функции полезности:**

- *мультипликативная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n < 1$;

- *логарифмическая*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \log_d x_i,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $d > 1$;

- *квадратичная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j,$$

где матрица $\mathbf{B} = (b_{ij})$ должна быть отрицательно определенной;

- *пропорциональная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\left\{\frac{x_1}{k_1}, \frac{x_2}{k_2}, \ldots, \frac{x_n}{k_n}\right\},$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n > 0$ и др.

Множество равноценных с точки зрения данного потребителя наборов товаров называется *поверхностью безразличия*. Если $u(\mathbf{x})$ — функция полезности данного потребителя, то поверхность безразличия — это множество наборов товаров, обладающих одинаковой полезностью:

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathcal{C} \;\middle|\; u(\mathbf{x}) = u_0 = \text{const}\right\}.$$

С геометрической точки зрения поверхность безразличия в пространстве n товаров представляет собой гиперповерхность $(n-1)$-го порядка.

В дифференциальной форме условие $u(\mathbf{x}) = u_0 = \text{const}$ записывается так:

$$du = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k = 0. \tag{14.1.2}$$

Градиент функции полезности равен вектору предельных полезностей:

$$\operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Условие (14.1.2) означает, что градиент функции полезности перпендикулярен касательной к поверхности безразличия (рис. 14.1.1).

Из рис. 14.1.1 видно, что снижение полезности, вызванное уменьшением количества одного товара, можно, вообще говоря, компенсировать увеличением количества другого товара. Рассмотрим некоторый набор товаров

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_i^0 \\ \vdots \\ x_j^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

и предположим, что количество i-го товара изменилось на величину dx_i, количество j-го товара изменилось на dx_j, а все остальные товары остались в тех же количествах, что и раньше; новый набор товаров

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_i^0 + dx_i \\ \vdots \\ x_j^0 + dx_j \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}.$$

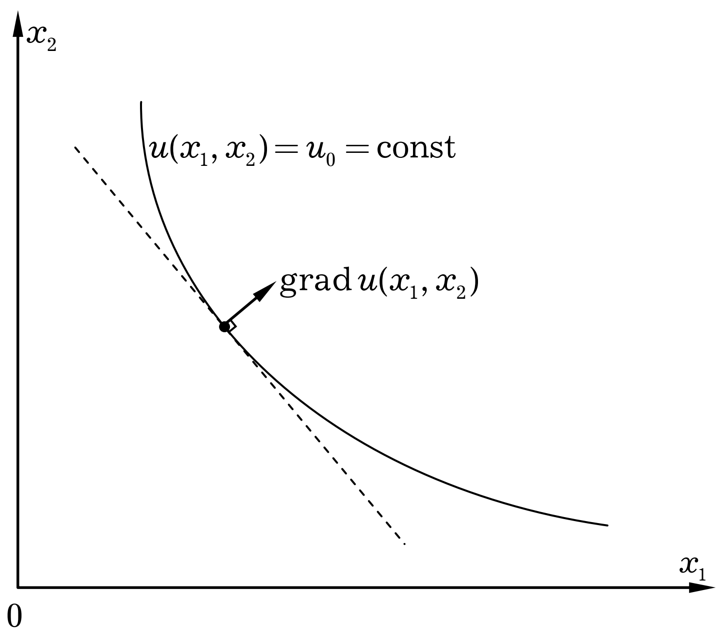


Рис. 14.1.1. *Поверхность безразличия и градиент функции полезности*

Чтобы старый и новый наборы товаров оказались на одной поверхности безразличия, необходимо выполнение условия (14.1.2). Учтем, что $dx_k = 0$ при $k \neq i, k \neq j$, тогда получим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j = 0,$$

откуда

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}.$$

Величина

$$r_i^j = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0, \\ u(\mathbf{x}) = \text{const}}} \frac{\Delta x_j}{-\Delta x_i} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}.$$

называется *предельной нормой замены* i-го товара j-м; она показывает, на сколько единиц должно увеличиться количество j-го товара, чтобы компенсировать потерю единицы i-го товара (т. е. чтобы полезность набора товаров не изменилась).

Часто бывает удобно иметь дело не с абсолютными величинами, а с относительными. *Эластичность замены* i-го товара j-м (e_i^j) показывает, на сколько процентов должно увеличиться количество j-го товара, чтобы компенсировать уменьшение количества i-го товара на 1%:

$$e_i^j = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0, \\ u(\mathbf{x}) = \text{const}}} \frac{\Delta x_j / x_j}{-\Delta x_i / x_i} = -\frac{x_i}{x_j} \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0, \\ u(\mathbf{x}) = \text{const}}} \frac{\Delta x_j}{\Delta x_i} = \frac{x_i}{x_j} r_i^j = \frac{x_i}{x_j} \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}.$$

Теперь сформулируем математически **задачу потребителя:** *требуется из бюджетного множества выбрать набор товаров, обладающий максимальной полезностью:*

$$u(\mathbf{x}) \to \max,$$
$$\mathbf{x} \in \mathcal{B}.$$

Запишем эту задачу подробнее [с учетом (14.1.1)]:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max,$$
$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \leqslant I, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0. \end{cases} \quad (14.1.3)$$

Теорема существования решения задачи потребителя. *Решение*

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

задачи потребителя (14.1.3) *существует и лежит на границе бюджетного множества:*

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* + \dots + p_n x_n^* = I. \qquad (14.1.4)$$

Теорема единственности решения задачи потребителя. *Если функция полезности является строго выпуклой вверх, то решение задачи потребителя* (14.1.3) *является единственным.*

С учетом (14.1.4) задачу потребителя можно переписать в виде классической задачи на условный экстремум:

$$\begin{aligned} &u(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max, \\ &p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = I. \end{aligned} \qquad (14.1.5)$$

Задачу (14.1.5) можно решить с помощью метода множителей Лагранжа: функция Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \dots - p_n x_n),$$

условный максимум в задаче (14.1.5) совпадает с безусловным максимумом функции Лагранжа, который удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ I - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \dots - p_n x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = I. \end{cases} \qquad (14.1.6)$$

Условия (14.1.6), определяющие оптимальное решение задачи потребителя, означают, в частности, что при ценах p_1, p_2, ..., p_n потребитель, обладающий богатством I, выбирает набор товаров, который соответствует полному использованию богатства I, причем вектор предельных полезностей товаров пропорционален вектору цен:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} : \dots : \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_1 : p_2 : \dots : p_n.$$

Отсюда следует, что в оптимальной точке предельная норма замены i-го товара j-м равна отношению цен i-го и j-го товаров:

$$r_i^j = \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}. \qquad (14.1.7)$$

Равенство (14.1.7) можно содержательно интерпретировать в виде **второго закона Госсена:** взаимозаменяемыми являются такие количества товаров, которые имеют одинаковую стоимость.

Можно сделать еще один вывод из условий (14.1.6): у всех товаров в оптимальной точке отношения предельных полезностей к ценам совпадают и равны λ^*:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{p_1}=\frac{\partial u/\partial x_2}{p_2}=\dots=\frac{\partial u/\partial x_n}{p_n}=\lambda^*.$$

Это дает ответ на вопрос об **экономическом смысле множителя Лагранжа** λ^*: множитель Лагранжа равен предельной полезности одной денежной единицы (поскольку в оптимальной точке часть предельной полезности каждого товара, приходящаяся на единицу его цены, равна λ^*).

Если из условий (14.1.6) выразить $\mathbf{x}^*$ как функцию от цен и богатства, то получим *функцию спроса* данного потребителя: $\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^*(p_1,p_2,\dots,p_n,I)$.

Рассмотрим, как изменится спрос потребителя, если изменится цена одного из товаров (например, j-го).

Предположим вначале, что при изменении цены j-го товара на величину Δp_j (при неизменных ценах остальных товаров) происходит компенсация богатства на такую величину ΔI, чтобы новая точка оптимального спроса осталась на той же поверхности безразличия, что и старая [иными словами, чтобы полезность набора товаров

$$\mathbf{x}'=\mathbf{x}^*(p_1,p_2,\dots,p_j+\Delta p_j,\dots,p_n,\ I+\Delta I),$$

оптимального при векторе цен $\mathbf{p}=(p_1\quad p_2\quad\cdots\quad p_j+\Delta p_j\quad\cdots\quad p_n)$ и богатстве $M+\Delta M$, была бы равна полезности набора товаров

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^*(p_1,p_2,\dots,p_j,\dots,p_n,\ I),$$

оптимального при векторе цен $\mathbf{p}=(p_1\quad p_2\quad\cdots\quad p_j\quad\cdots\quad p_n)$ и богатстве I (рис. 14.1.2)].

Если теперь устремить Δp_j к нулю и рассмотреть предел

$$\lim_{\substack{\Delta p_j\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}}\frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_j}=\lim_{\substack{\Delta p_j\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}}\frac{x_i'-x_i^*}{\Delta p_j}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta p_j\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}}\frac{x_i^*(p_1,p_2,\dots,p_j+\Delta p_j,\dots,p_n,I+\Delta I)-x_i^*(p_1,p_2,\dots,p_j,\dots,p_n,I)}{\Delta p_j},$$

то мы получим изменение спроса на i-й товар при изменении цены j-го товара на единицу и сопутствующем компенсирующем изменении богатства; это изменение обозначается

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}}=\lim_{\substack{\Delta p_j\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}}\frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_j}.$$

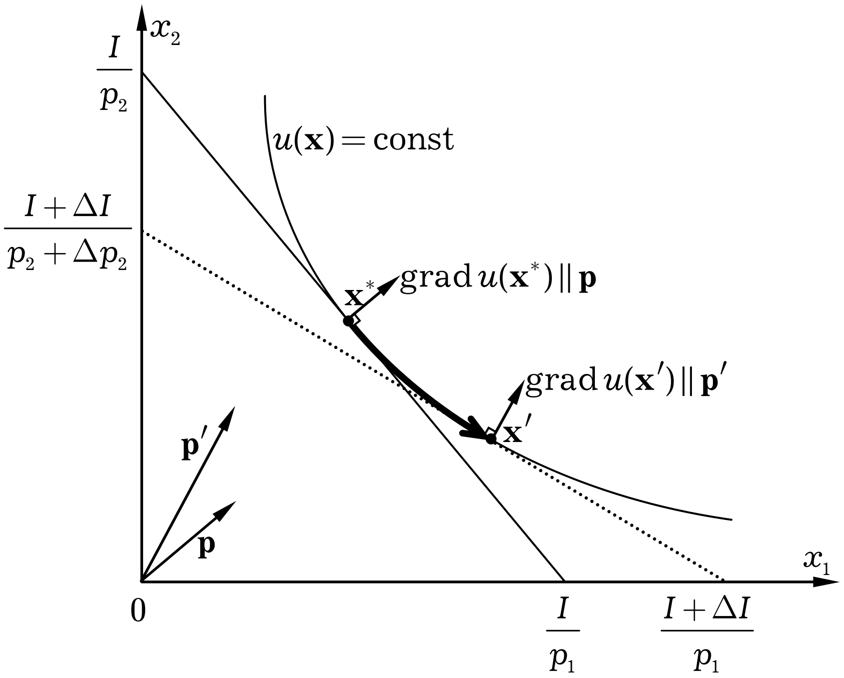


Рис. 14.1.2. *Изменение спроса с компенсацией дохода*

Величина $(\partial x_i^* / \partial p_j)_{\text{комп.}}$ отражает эффект замещения — при изменении цены j-го товара и компенсирующем изменении богатства потребитель останется на той же кривой безразличия, что и раньше, для чего заменит часть j-го товара другими товарами.

Найдем величину такого компенсирующего изменения богатства dI при бесконечно малом изменении цены j-го товара (на dp_j) и неизменных остальных ценах [т. е при изменении цен p_i всех остальных товаров (с номерами $k \neq j$) на $dp_k = 0$]. Из условий оптимального поведения потребителя (14.1.6) получаем, что

$$du = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k = \lambda^* \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k, \quad dI = \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k + \sum_{k=1}^{n} x_k^* dp_k .$$

Чтобы полезность не изменилась, необходимо и достаточно, чтобы $du = 0$, и поскольку предельная полезность денег $\lambda^* \neq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n} p_k dx_k = 0 .$$

Но тогда

$$dI = \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k + \sum_{k=1}^{n} x_k^* dp_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^* dp_i = x_j^* dp_j \tag{14.1.8}$$

(где мы учли также, что $dp_k = 0$ при $k \neq j$).

На самом деле компенсации богатства потребителя при изменении цен не происходит, и изменение спроса потребителя на i-й товар при изменении цены j-го товара на единицу равно

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_j^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{14.1.9}$$

Уравнение (14.1.9), полученное в 1915 г. Е. Е. Слуцким, играет важнейшую роль в теории потребительского спроса. Вычитаемое в этом уравнении отражает эффект дохода, связанный с изменением потребительской ценности единицы богатства. Фактически потребитель не остается на той же поверхности безразличия, что и раньше, а переходит на другую поверхность безразличия, соответствующую другим количествам товаров, которые он может позволить себе приобрести при изменении цены j-го товара и неизменном богатстве и ценах остальных товаров. Эффект дохода и эффект замещения иллюстрируется рис. 14.1.3.

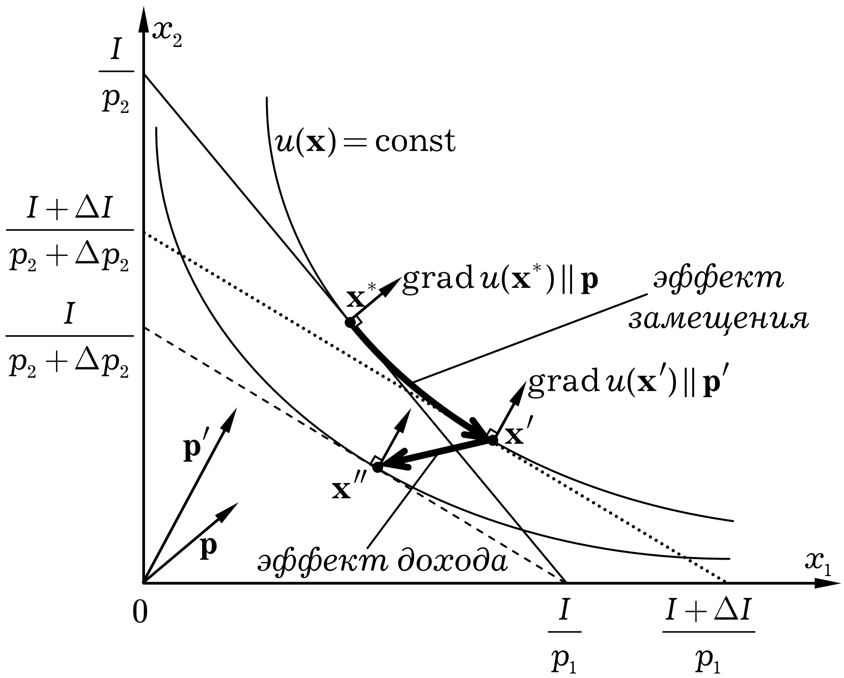


Рис. 14.1.3. *Эффект дохода и эффект замещения*

Можно показать, что

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп.}} < 0, \tag{14.1.10}$$

т. е. при увеличении цены (i-го) товара спрос на него падает даже в том случае, если увеличение цены сопровождается компенсирующим изменением богатства.

Товар с номером i называется *ценным*, если при увеличении богатства спрос на него растет, т. е. если

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0, \tag{14.1.11}$$

и *малоценным*, если при увеличении богатства спрос на этот товар снижается:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial I} < 0.$$

В оптимальной точке [согласно (14.1.6)]

$$\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^* = I.$$

Продифференцируем левую и правую части этого равенства по I:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_k^*}{\partial I} = 1.$$

Отсюда (с учетом того, что все $p_k > 0$) следует, что среди частных производных $\partial x_k^* / \partial I$ есть хотя бы одна положительная, т. е. обязательно существует хотя бы один ценный товар.

Товар с номером i называется *нормальным*, если при увеличении его цены спрос на него падает, т. е. если

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0,$$

и *товаром Гиффина*, если при увеличении цены этого товара спрос на него растет:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} > 0.$$

Спрос на ценный товар обязательно падает при увеличении его цены: в правой части уравнения Слуцкого (14.1.9), записанного при $j = i$,

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_i^* < 0$$

уменьшаемое отрицательно согласно (14.1.10), а вычитаемое неотрицательно, так как $\partial x_i^* / \partial I > 0$ согласно (14.1.11), а спрос x_i^* не может быть отрицательным. Таким образом, ценные товары не могут быть товарами Гиффина.

Резюмируя, замечаем, что все товары делятся на три категории (табл. 14.1.1):

- нормальные ценные товары, примером такого товара является масло: если цена мяса увеличится, то потребитель приобретет его меньше, а если увеличится богатство потребителя, то он увеличит потребление мяса;
- нормальные малоценные товары, примером такого товара служит маргарин: потребитель приобретет меньше маргарина и в том случае, когда увеличится цена маргарина, и в том случае, когда увеличится богатство потребителя;

• товары Гиффина, в качестве примера такого товара традиционно приводят картофель в Ирландии XIX в.: в то время большая часть потребительских расходов населения тратилась на приобретение картофеля, но по мере увеличения богатства потребители предпочитали покупать больше мяса и меньше картофеля; при увеличении цены картофеля реальный доход потребителя уменьшался настолько, что он уже не могли покупать столько же мяса, как и прежде, и потому был вынужден увеличивать потребление картофеля.

Два товара с номерами i и j называются *взаимозаменяемыми*, если увеличение цены j-го товара при сопутствующем компенсирующем изменении богатства приводит к увеличению спроса на i-й товар:

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} > 0\,;$$

товары называются *взаимодополняющими*, если увеличение цены j-го товара при сопутствующем компенсирующем изменении богатства ведет к уменьшению спроса на i-й товар:

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} > 0\,.$$

Таблица 14.1.1

Влияние изменения дохода / Влияние изменения цены товара	ценные товары: $\frac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0$	малоценные товары: $\frac{\partial x_i^*}{\partial I} < 0$
нормальные товары: $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0$	пример: мясо	пример: маргарин
товары Гиффина: $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} > 0$	—	пример: картофель в середине XIX в. в Ирландии

Эти определения корректны, поскольку можно показать, что матрица

$$\mathbf{D} = \left(d_{ij} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

является симметричной, т. е.

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп.}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Примерами пар взаимозаменяемых товаров являются яблоки и груши, чай и кофе, сыр и колбаса и т. п.; примерами пар взаимодополняющих товаров являются компьютеры и компьютерные принтеры, автомобили и бензин, брюки и ремни и т. д.

Можно показать, что для любого товара обязательно найдется другой товар, составляющий с первым взаимозаменяемую пару. В частности, если рассматривать рынок двух товаров, то эти два товара обязательно должны быть взаимозаменяемыми.

Пример 14.1.1. В пространстве трех товаров известен вектор цен $\mathbf{p}=(2\quad 5\quad 6)$, богатство потребителя $I = 30$ ден. ед. и его функция полезности $u(x_1, x_2, x_3)=\sqrt{x_1x_2x_3}$. Требуется описать (с помощью системы неравенств) бюджетное множество и изобразить его графически. Затем следует определить функцию спроса и рассчитать ее конкретное значение при заданном богатстве I и векторе цен $\mathbf{p}$. После этого нужно убедиться в справедливости уравнения Слуцкого для данного потребителя. Далее следует определить, какие товары являются ценными и малоценными; нормальными товарами и товарами Гиффина; какие товары взаимозаменяемы, а какие являются взаимодополняющими.

Решение. В рассматриваемом примере система неравенств (14.1.1) принимает вид

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+6x_3\leqslant 30,\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения (рис. 14.1.4) данное бюджетное множество

$$\mathcal{B}=\left\{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ 2x_1+5x_2+6x_3\leqslant 30,\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0\right\}$$

представляет собой трехгранную пирамиду, одна вершина которой находится в начале координат, а три другие — соответственно в точках $I/p_1 = 30/2 = 15$, $I/p_2 = 30/5 = 6$ и $I/p_3 = 30/6 = 5$ на осях Ox_1, Ox_2, и Ox_3.

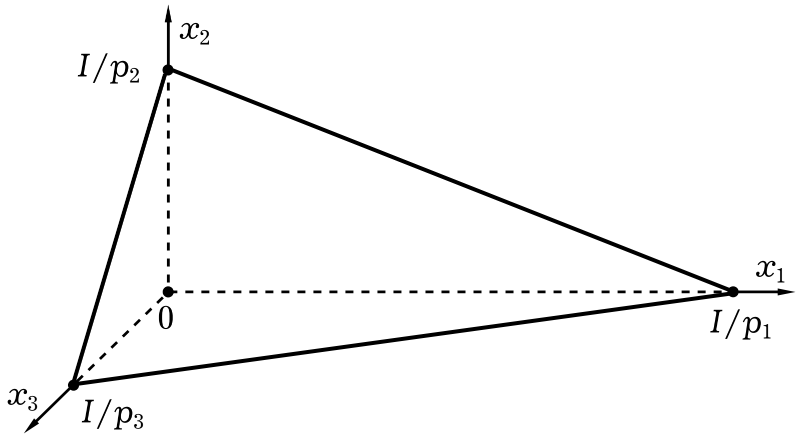


Рис. 14.1.4. *Бюджетное множество*

Предельные полезности товаров в данном примере равны

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\sqrt{x_2x_2}}{2\sqrt{x_1}},\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{\sqrt{x_1x_3}}{2\sqrt{x_2}},\quad \frac{\partial u}{\partial x_3}=\frac{\sqrt{x_1x_2}}{2\sqrt{x_3}},$$

поэтому условия (14.1.6) для определения функции спроса принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} = \lambda p_3, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x_2x_3}}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\sqrt{x_1x_3}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\sqrt{x_1x_2}}{2\sqrt{x_3}} = \lambda p_3, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1} = \dfrac{\sqrt{x_2x_3}}{2\lambda p_1}, \\ \dfrac{\sqrt{x_2x_3}}{2\lambda p_1} \cdot \dfrac{\sqrt{x_3}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\sqrt{x_2x_3}}{2\lambda p_1} \cdot \dfrac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_3}} = \lambda p_3, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2x_3}{4\lambda^2 p_1^2}, \\ \dfrac{x_3}{4\lambda p_1} = \lambda p_2, \\ \dfrac{x_2}{4\lambda p_1} = \lambda p_3, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4\lambda^2 p_2p_3, \\ x_3 = 4\lambda^2 p_1p_2, \\ x_2 = 4\lambda^2 p_1p_3, \\ 12\lambda^2 p_1p_2p_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^*(p_1, p_2, p_3, I) = \dfrac{I}{3p_1}, \\ x_2^*(p_1, p_2, p_3, I) = \dfrac{I}{3p_2}, \\ x_3^*(p_1, p_2, p_3, I) = \dfrac{I}{3p_3}, \\ \lambda^* = \sqrt{\dfrac{I}{12p_1p_2p_3}}. \end{cases}$$

Таким образом, функция спроса данного потребителя

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, p_3, I) = \begin{pmatrix} I/(3p_1) \\ I/(3p_2) \\ I/(3p_3) \end{pmatrix}, \tag{14.1.12}$$

а предельная полезность денег

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12p_1p_2p_3}}.$$

При данном векторе цен $\mathbf{p} = (2 \quad 5 \quad 6)$ и богатстве $I = 30$ получаем:

$$x_1^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_1} = \frac{30}{3 \cdot 2} = 5, \quad x_2^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_2} = \frac{30}{3 \cdot 5} = 2,$$

$$x_3^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_3} = \frac{30}{3 \cdot 6} = \frac{5}{3}, \quad \lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12p_1p_2p_3}} = \sqrt{\frac{30}{12 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Итак, вектор спроса при данных ценах и данном богатстве таков:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Убедимся теперь, что для данного потребителя действительно выполняется уравнение Слуцкого. Рассмотрим, например, что произойдет со спросом при изменении цены первого товара. Пусть цена первого товара изменилась с p_1 до $p_1+\Delta p_1$. Если произошло соответствующее компенсирующее изменение богатства на величину

$$\Delta I = x_1^*\Delta p_1 = \frac{I\Delta p_1}{3p_1}$$

[определенную по формуле (14.1.8)], то новая точка спроса

$$\mathbf{x}^*(p_1+\Delta p_1, p_2, p_3, I+\Delta I) = \begin{pmatrix} \dfrac{I+\Delta I}{3(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_2} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix},$$

т. е. изменение спроса составляет

$$\Delta\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(p_1+\Delta p_1, p_2, p_3, I+\Delta I) - \mathbf{x}^*(p_1, p_2, p_3, I) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{I+\Delta I}{3(p_1+\Delta p_1)} - \dfrac{I}{3p_1} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_2} - \dfrac{I}{3p_2} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_3} - \dfrac{I}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(I+\Delta I)p_1 - I(p_1+\Delta p_1)}{3p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_2} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1\Delta I - I\Delta p_1}{3p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_2} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix}.$$

Подставим сюда $\Delta I = I\Delta p_1/(3p_1)$, получим

$$\Delta\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1 I\Delta p_1/(3p_1) - I\Delta p_1}{3p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_2} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2I\Delta p_1}{9p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_2} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_3} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим изменение спроса при бесконечно малом изменении цены первого товара и компенсирующем изменении дохода:

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_1^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\dfrac{-2I\Delta p_1}{9p_1(p_1+\Delta p_1)}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{-2I}{9p_1(p_1+\Delta p_1)} = -\frac{2I}{9p_1^2},$$

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_2^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_2}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{I}{9p_1p_2} = \frac{I}{9p_1p_2},$$

$$\left(\frac{\partial x_3^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_3^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_3}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{I}{9p_1p_3} = \frac{I}{9p_1p_3}.$$

Найдем теперь $\partial x_i^* / \partial p_1$, $\partial x_i^* / \partial I$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = \frac{\partial[I/(3p_1)]}{\partial p_1} = -\frac{I}{3p_1^2}, \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = \frac{\partial[I/(3p_2)]}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial x_3^*}{\partial p_1} = \frac{\partial[I/(3p_3)]}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{\partial[I/(3p_1)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_1}, \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial I} = \frac{\partial[I/(3p_2)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_2}, \quad \frac{\partial x_3^*}{\partial I} = \frac{\partial[I/(3p_3)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_3}.$$

Замечаем, что

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_1^*}{\partial I} x_1^* = -\frac{2I}{9p_1^2} - \frac{1}{3p_1}\frac{I}{3p_1} = -\frac{I}{3p_1^2} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1},$$

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_2^*}{\partial I} x_1^* = \frac{I}{9p_1p_2} - \frac{1}{3p_2}\frac{I}{3p_1} = 0 = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1},$$

$$\left(\frac{\partial x_3^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_3^*}{\partial I} x_1^* = \frac{I}{9p_1p_3} - \frac{1}{3p_3}\frac{I}{3p_1} = 0 = \frac{\partial x_3^*}{\partial p_1},$$

т. е. уравнение Слуцкого (14.1.9) для данного потребителя действительно выполняется.

Поскольку

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{1}{3p_1} > 0, \qquad \frac{\partial x_2^*}{\partial I} = \frac{1}{3p_2} > 0, \qquad \frac{\partial x_3^*}{\partial I} = \frac{1}{3p_3} > 0,$$

все три товара ценные (так как ценные товары не могут быть товарами Гиффина, все три товара являются нормальными). Первый и второй товары являются взаимозаменяемыми, так как

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} = \frac{I}{9p_1p_2} > 0.$$

Точно так же можно показать, что первый и третий, а также второй и третий товары образуют взаимозаменяемые пары, а взаимодополняющие товары для данного потребителя отсутствуют. ❑

14.2. Задание практикума

В пространстве трех товаров известен вектор цен $\mathbf{p} = (p_1 \;\; p_2 \;\; p_3)$, богатство потребителя I и его функция полезности $u(x_1, x_2, x_3)$ [они приведены для каждого варианта в табл. 14.2.1]. Требуется описать (с помощью системы неравенств) бюджетное множество и изобразить его графически. Затем следует определить функцию спроса и рассчитать ее конкретное значение при заданном богатстве I и векторе цен $\mathbf{p}$. После этого нужно убедиться в справедливости уравнения Слуцкого для данного потребителя. Далее следует определить, какие товары являются ценными и малоценными; нормальными товарами и товарами Гиффина; какие товары взаимозаменяемы, а какие являются взаимодополняющими.

Таблица 14.2.1

№ вар.	Исходные данные			№ вар.	Исходные данные		
	p	I	$u(x_1, x_2, x_3)$		**p**	I	$u(x_1, x_2, x_3)$
1	(7 3 2)	42	$x_1\sqrt{x_2x_3}$	19	(5 8 4)	60	$2x_1x_2x_3$
2	(1 3 4)	24	$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}$	20	(4 9 6)	72	$\frac{x_1x_2}{3}+x_3$
3	(5 2 4)	60	$x_1+\frac{x_2x_3}{2}$	21	(7 5 2)	35	$4x_1x_2+x_3^2$
4	(2 3 4)	60	$x_1^2+2x_2x_3$	22	(3 8 5)	60	$3\sqrt{x_1x_2}x_3$
5	(5 8 4)	120	$\ln(x_1x_2x_3)$	23	(1 7 2)	56	$2x_1\sqrt{x_2}x_3$
6	(4 9 6)	36	$x_1x_2\sqrt{x_3}$	24	(4 7 3)	42	$3\sqrt{x_1}x_2x_3$
7	(7 5 2)	70	$\sqrt{x_1}x_2x_3$	25	(2 5 6)	60	$2x_1x_2\sqrt{x_3}$
8	(3 8 5)	120	$x_1\sqrt{x_2}x_3$	26	(3 6 9)	72	$2\ln(x_1x_2x_3)$
9	(1 7 2)	28	$\sqrt{x_1x_2}x_3$	27	(2 7 6)	21	$3x_1^2+2x_2x_3$
10	(4 7 3)	84	$2x_1x_2+x_3^2$	28	(2 3 6)	36	$3x_1+\frac{x_2x_3}{2}$
11	(2 5 6)	30	$\frac{x_1x_2}{3}+x_3$	29	(3 2 8)	48	$\sqrt{x_1}+2\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}$
12	(3 6 9)	36	$x_1x_2x_3$	30	(3 8 5)	30	$2x_1\sqrt{x_2x_3}$
13	(2 7 6)	42	$2x_1x_3+x_2^2$	31	(5 2 4)	30	$\sqrt{2x_1x_2}x_3$
14	(2 3 6)	18	$2\ln(x_1x_2x_3)$	32	(2 3 4)	30	$3x_1\sqrt{x_2}x_3$
15	(3 2 8)	24	$x_1^3+x_2^3+x_3^3$	33	(4 7 3)	21	$\sqrt{2x_1}x_2x_3$
16	(1 3 4)	48	$x_1^3+2x_2^3+x_3^3$	34	(3 6 9)	18	$x_1x_2\sqrt{2x_3}$
17	(5 2 4)	120	$3\ln(x_1x_2x_3)$	35	(7 3 2)	84	$4x_1x_2+3x_3^2$
18	(2 3 4)	120	$3x_1x_3+x_2^2$				

15. МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ

15.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Производственная функция выражает зависимость *результата производства* (объема выпускаемой продукции) от *факторов производства* (затраченных ресурсов). При описании экономической системы с помощью производственной функции эта система рассматривается как «черный ящик», на вход которого поступают ресурсы, а на выходе получается произведенный за некоторый период времени продукт.

Если рассматривать два ресурса:

- капитал, т. е. прошлый (накопленный) труд K в форме основных производственных фондов;
- настоящий (живой) труд L, описываемый количеством занятых,

и результатом деятельности экономической системы считать объем выпуска X, то экономика замещается своей моделью в форме наиболее распространенной двухфакторной производственной функции

$$X = F(K, L).$$

Поскольку обычно экономическая система производит несколько различных видов продукции, удобнее всего объем выпуска исчислять в денежном выражении, например, если в качестве экономической системы рассматривать национальную экономику, то объемом выпуска можно считать валовый внутренний продукт, а если в качестве экономической системы рассматривать фирму — то просто выпуск продукции в денежном выражении, т. е. суммарную стоимость произведенной продукции всех видов.

Производственная функция называется *неоклассической*, если она определена при всех неотрицательных значениях аргументов K и L, является непрерывной и дважды дифференцируемой по обоим аргументам при всех $K \geqslant 0, L \geqslant 0$ и обладает следующими **свойствами,** имеющими естественную экономическую интерпретацию:

- при отсутствии хотя бы одного фактора производство невозможно:

$$F(K,0) = 0 \text{ для всех } K \geqslant 0, \quad F(0,L) = 0 \text{ для всех } L \geqslant 0;$$

- при увеличении затрат ресурсов выпуск продукции возрастает:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0 \text{ для всех } K \geqslant 0, L \geqslant 0;$$

- при увеличении количества одного из используемых ресурсов при постоянном количестве другого ресурса скорость роста выпуска продукции замедляется:

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0 \text{ для всех } K \geqslant 0, L \geqslant 0;$$

• при неограниченном увеличении количества хотя бы одного из используемых ресурсов выпуск продукции неограниченно возрастает:

$$F(K,+\infty)=+\infty \text{ для всех } K>0, \quad F(+\infty,L)=+\infty \text{ для всех } L>0.$$

Производственная функция называется *линейно однородной*, если

$$F(\lambda K,\lambda L)=\lambda F(K,L) \text{ для всех } K\geqslant 0, L\geqslant 0, \lambda\geqslant 0.$$

На практике чаще всего используются следующие **конкретные производственные функции:**

• *Кобба — Дугласа*:

$$F(K,L)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

где $A>0, \alpha\in(0,1)$; эта производственная функция была предложена в 1899 г. Ф. Уикстидом и впервые использована в 1929 г. Ч. Коббом и П. Дугласом для моделирования реальной экономики (США);

• *мультипликативная*:

$$F(K,L)=AK^{\alpha_K}L^{\alpha_L},$$

где $A, \alpha_K, \alpha_L>0, \ \ \alpha_K+\alpha_L\leqslant 1$;

• *Леонтьева*:

$$F(K,L)=\min\left\{\frac{K}{a_K},\frac{L}{a_L}\right\},$$

где $a_K, a_L>0$;

• *линейная:*

$$F(K,L)=c_K K+c_L L,$$

где $c_K, c_L>0$.

• *с постоянной эластичностью замены*:

$$F(K,L)=A\left(\alpha K^{-\rho}+(1-\alpha)L^{-\rho}\right)^{-\gamma/\rho},$$

где $A>0, \ \ \alpha\in(0,1), \ \ \gamma\in(0,1] \ \ \rho>-1$.

Несложно проверить, что данные функции удовлетворяет всем свойствам неоклассических производственных функций, а производственная функция Кобба — Дугласа является, кроме того, линейно-однородной. Предлагаем читателю самостоятельно провести необходимые выкладки.

В мультипликативной производственной функции параметр A называется коэффициентом нейтрального технического прогресса (при неизменных ресурсах K и L и неизменных α_K, α_L выпуск тем больше, чем больше A), параметр $\alpha_K\in(0,1)$ имеет смысл коэффициента эластичности выпуска по фондам (*коэффициент эластичности выпуска по фондам* показывает, на сколько процентов вырастет выпуск X при увеличении фондов K на 1%:

$$e_X^K = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta X / X}{\Delta K / K} = \frac{K}{X} \frac{\partial X}{\partial K} = \frac{K}{AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}} \frac{\partial (AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L})}{\partial K} = \frac{\alpha A K^{\alpha_K - 1} L^{\alpha_L}}{AK^{\alpha_K - 1} L^{\alpha_L}} = \alpha_K ;$$

аналогично определяется *коэффициент эластичности выпуска по труду*

$$e_X^L = \frac{L}{X} \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_L).$$

В производственной функции Кобба — Дугласа (которая является частным случаем мультипликативной производственной функции при $\alpha_K = \alpha$, $\alpha_L = 1 - \alpha$) параметр A также представляет собой коэффициент нейтрального технического прогресса, коэффициент эластичности выпуска по фондам равен α, а коэффициент эластичности выпуска по труду равен $1 - \alpha$.

В случае двухфакторной производственной функции средние эффективности ресурсов — это *средняя фондоотдача* X/K и *средняя производительность труда* X/L, а предельные эффективности ресурсов — это *предельная фондоотдача* $\partial X / \partial K$ и *предельная производительность труда* $\partial X / \partial L$.

В случае мультипликативной производственной функции выпуск зависит от затрат фондов и труда как $X = AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}$, средняя фондоотдача

$$\frac{X}{K} = \frac{AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}}{K} = A \frac{L^{\alpha_L}}{K^{1-\alpha_K}}$$

средняя производительность труда

$$\frac{X}{L} = \frac{AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}}{L} = A \frac{K^{\alpha_K}}{L^{1-\alpha_L}},$$

предельная фондоотдача

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \frac{\partial (AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L})}{\partial K} = A\alpha_K K^{\alpha_K - 1} L^{\alpha_L} = \alpha_K A \frac{L^{\alpha_L}}{K^{1-\alpha_K}} = \alpha_K \frac{X}{K},$$

предельная производительность труда

$$\frac{\partial X}{\partial L} = \frac{\partial (AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L})}{\partial L} = A\alpha_L K^{\alpha_K} L^{\alpha_L - 1} = \alpha_L A \frac{K^{\alpha_K}}{L^{1-\alpha_L}} = \alpha_K \frac{X}{L},$$

т. е. предельные эффективности факторов производства пропорциональны средним эффективностям этих факторов.

Пусть затраты труда и капитала равны K и L, объем выпуска (в денежном выражении) определяется производственной функцией $X = F(K, L)$, а цены факторов производства (труда и капитала) составляют соответственно p_K и p_L, тогда прибыль производителя будет равна

$$\Pi(K, L) = X - p_K K - p_L L = F(K, L) - p_K K - p_L L. \qquad (15.1.1)$$

Цены ресурсов определяются очевидным образом: цена труда — это просто заработная плата работника, а цена капитала равна такой денежной сумме, которую необходимо в единицу времени тратить на содержание единицы капитала (т. е. одной денежной единицы), т. е. цена капитала равна *норме амортизации* — величине амортизационных отчислений на 1 ден. ед. производственных фондов.

Если считать **аксиомой производителя,** что он стремится получить наибольшую прибыль, то математическая формулировка **задачи производителя** такова: *требуется определить такую технологию (т. е. такие объемы затрат ресурсов), которые приносят максимальную прибыль:*

$$\begin{gathered} \Pi(K, L) \to \max, \\ K \geqslant 0,\ L \geqslant 0. \end{gathered} \tag{15.1.2}$$

(На самом деле, указанная аксиома может быть справедливой только для фирм, которые находятся в единоличном владении; если же у фирмы несколько собственников, то совершенно не обязательно, чтобы собственники ставили менеджерам задачу максимизации прибыли — скорее они захотят максимизировать не прибыль, а стоимость фирмы, но решение этой задачи выходит за рамки настоящей книги.)

Подставим в задаче (15.1.2) вместо прибыли $\Pi(K, L)$ ее выражение по формуле (15.1.1):

$$\begin{gathered} \Pi(K, L) = F(K, L) - p_K K - p_L L \to \max, \\ K \geqslant 0,\ L \geqslant 0. \end{gathered}$$

Приравняем нулю частные производные прибыли по ресурсам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi(K, L)}{\partial K} = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi(K, L)}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial [F(K, L) - p_K K - p_L L]}{\partial K} = 0, \\ \dfrac{\partial [F(K, L) - p_K K - p_L L]}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F(K, L)}{\partial K} - p_K = 0, \\ \dfrac{\partial F(K, L)}{\partial L} - p_L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F(K, L)}{\partial K} = p_K, \\ \dfrac{\partial F(K, L)}{\partial L} = p_L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial K} = p_K, \\ \dfrac{\partial X}{\partial L} = p_L. \end{cases} \tag{15.1.3}$$

Можно показать, что любая точка (K^*, L^*), удовлетворяющая условиям (15.1.3), обязательно будет точкой максимума прибыли, и при этом оптимальные затраты ресурсов K^* и L^* будут неотрицательными, т. е. условия (15.1.3) определяют оптимальное решение задачи производителя.

Приведем **экономическую интерпретацию условий максимума прибыли производителя.** В левых частях этих условий стоят предельные эффективности ресурсов, а в правых частях — цены ресурсов, поэтому можно интерпретировать условия (15.1.3) следующим образом: производитель достигает максимальной прибыли при таких затратах ресурсов K^* и L^*, что предельные эффективности ресурсов равны их ценам.

Пример 15.1.1. Рассматривается фирма с мультипликативной производственной функцией. Известно, что для увеличения выпуска на $a = 3\%$ необходимо увеличить основные производственные фонды на $b = 6\%$ или увеличить численность работников на $c = 9\%$. В настоящее время основные производственные фонды фирмы оцениваются в $K = 10^8$ ден. ед., всего в фирме занято $L = 10^3$ сотрудников, каждый из которых производит продукции в среднем на $M = 10^4$ ден. ед. в мес. при средней заработной плате $w = 10^3$ ден. ед. в мес. Период амортизации основных производственных фондов составляет $n = 12$ мес. Требуется найти производственную функцию, рассчитать оптимальный размер производственных фондов и оптимальную численность работников. Затем нужно определить, во сколько раз увеличится прибыль фирмы при переходе к оптимальным затратам факторов производства.

Решение. Мультипликативная производственная функция имеет вид

$$F(K, L) = AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L},$$

где параметры α_K и α_L имеют смысл эластичностей выпуска соответственно по фондам и по труду. Учитывая это, можем найти

$$\alpha_K = \frac{a}{b} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_L = \frac{a}{c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

т. е. выпуск фирмы определяется производственной функцией

$$X = AK^{1/2}L^{1/3}.$$

Параметр A найдем, подставив в эту формулу значения выпуска предприятия в денежном выражении $X = LM = 10^3 10^4 = 10^7$ ден. ед., капитала $K = 10^8$ ден. ед. и труда $L = 10^3$ чел.:

$$10^7 = A(10^8)^{1/2}(10^3)^{1/3} \quad \Leftrightarrow \quad A = 100.$$

Таким образом, окончательно получаем производственную функцию

$$F(K, L) = 100K^{1/2}L^{1/3}.$$

Цена труда $p_L = w = 10^3$ ден. ед.— это заработная плата, а цена капитала $p_K = 1/n = 1/12$ ден. ед. равна ежемесячным амортизационным отчислениям на содержание одной денежной единицы производственных фондов, поэтому прибыль фирмы при таких затратах труда и капитала равна [согласно (15.1.1)]

$$\Pi(K, L) = X - p_K K - p_L L = 10^7 - \frac{1}{12}10^8 - 10^3 10^3 = \frac{2}{3} \text{ млн. ден. ед.}$$

Оптимальный размер фирмы задается условиями (15.1.3), состоящими в том, что предельные эффективности ресурсов должны быть в оптимальной точке равны ценам ресурсов. В данном случае предельная фондоотдача и предельная производительность труда равны соответственно

$$\frac{\partial X}{\partial K}=50K^{-1/2}L^{1/3}, \qquad \frac{\partial X}{\partial L}=\frac{100}{3}K^{1/2}L^{-2/3},$$

поэтому условия оптимального размера фирмы (15.1.3) принимают вид

$$\begin{cases}50K^{-1/2}L^{1/3}=1/12,\\ \dfrac{100}{3}K^{1/2}L^{-2/3}=10^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}600L^{1/3}=K^{1/2},\\ K^{1/2}=30L^{2/3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}600L^{1/3}=30L^{2/3},\\ K=900L^{4/3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}K^*=144\,000\,000,\\ L^*=8000.\end{cases}$$

При этом выпуск фирмы составит

$$X^*=100(K^*)^{1/2}(L^*)^{1/3}=100(144\,000\,000)^{1/2}(8000)^{1/3}=24\,000\,000 \text{ ден. ед.},$$

а прибыль

$$\Pi^*(K,L)=X^*-p_K K^*-p_L L^*=24\cdot 10^6-\frac{1}{12}144\cdot 10^6-10^3\cdot 8\cdot 10^3=4 \text{ млн. ден. ед.}$$

Замечаем, что оптимальный выбор затрат труда и капитала позволил увеличить прибыль в шесть раз! ❑

15.2. Задание практикума

Рассматривается фирма с мультипликативной производственной функцией. Известно, что для увеличения выпуска на $a\%$ необходимо увеличить основные производственные фонды на $b\%$ или увеличить численность работников на $c\%$. В настоящее время основные производственные фонды фирмы оцениваются в K ден. ед., всего в фирме занято L сотрудников, каждый из которых производит продукции в среднем на М ден. ед. в мес. при средней заработной плате w ден. ед. в мес. Период амортизации основных производственных фондов составляет n мес. (параметры a, b, c, K, L, M, w и n приведены для каждого варианта в табл. 15.2.1)

Требуется найти производственную функцию, рассчитать оптимальный размер производственных фондов и оптимальную численность работников. Затем нужно определить, во сколько раз увеличится прибыль фирмы при переходе к оптимальным затратам факторов производства.

Таблица 15.2.1

№ вар.	Исходные данные								№ вар.	Исходные данные							
	a	b	c	K	L	M	w	n		a	b	c	K	L	M	w	n
1	1	2	3	10^6	10^3	10^4	10^3	5	11	2	4	6	10^4	10^3	10^{11}	10^2	18
2	1	3	2	10^6	25	10^3	10^2	5	12	1	2	3	10^2	10^3	10^7	10	6
3	1	3	3	10^6	10^6	10^4	10	3	13	2	4	6	10^2	10^3	10^3	10^3	12
4	1	2	4	10^4	256	10^5	10^3	2	14	2	6	6	10^3	10^3	10^6	10^2	6
5	2	6	3	10^6	64	10^3	10^2	2	15	1	3	2	10^3	10^2	10^5	10	6
6	2	6	4	10^6	10^4	10^3	10	4	16	1	2	3	10^2	30^3	10^6	10^3	4
7	3	6	9	10^4	10^3	10^3	10^3	12	17	4	8	8	10^4	10^2	10^5	10^2	12
8	2	4	6	10^4	20^3	10^3	10	8	18	6	12	6	10^3	10^3	10^6	10^2	6
9	1	1	3	10^3	10^3	10^5	10^3	5	19	3	12	12	10^4	10^4	10^5	10	6
10	1	1	2	10^4	25	10^6	10^2	5	20	2	12	3	10^6	27	10^6	10^3	4

Окончание табл. 15.2.1

№	Исходные данные							
вар.	a	b	c	K	L	M	w	n
21	1	1	3	10^4	10^3	10^6	10	3
22	2	2	4	10^4	25	10^4	10^3	2
23	2	2	5	10^4	2^5	10^7	10^2	2
24	5	5	10	10^2	10^4	10^7	10	4
25	6	6	9	10^3	10^3	10^9	10^3	12
26	4	4	6	10^6	10^3	10^5	10^2	18
27	2	2	3	10^3	10^3	10^7	10	6
28	4	8	6	10^4	10^3	10^4	10^3	12
29	8	12	8	10^3	10^2	10^5	10^2	12
30	6	12	24	10^4	10^4	10^5	10	8
31	6	18	12	10^3	10^4	10^6	10^2	6
32	6	18	12	10^3	10^2	10^5	10	6
33	2	6	3	10^3	10^3	10^6	10^3	4
34	8	16	12	10^4	10^3	10^5	10^2	12
35	5	10	20	10^4	10^4	10^5	10	8

16. Модель рыночного равновесия

16.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Рассмотрим рынок n товаров с k участниками. Пусть вектор

$$\mathbf{x}^j = \begin{pmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{pmatrix}$$

определяет начальные запасы товаров у j-го участника, а $u^j(\mathbf{x}) = u^j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция полезности j-го участника ($j = 1, 2, ..., k$).

Предположим, что участники рынка согласны обмениваться товарами. Для этого они должны ввести некоторую денежную единицу и определить вектор рыночных цен $\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n)$.

Если на рынке будут установлены некоторые цены товаров: $p_1, p_2, ..., p_n$, то начальное богатство каждого участника (до обмена) в денежном выражении определяется как

$$I_j = \mathbf{p}\mathbf{x}^j = \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

При этом суммарное предложение i-го товара на рынке будет равно суммарным запасам этого товара у всех участников:

$$Q_i^S = \sum_{j=1}^{k} x_i^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теперь можно для каждого участника поставить задачу потребителя и определить функции спроса участников рынка:

$$\tilde{\mathbf{x}}^j(p_1, p_2, p_3, I_j) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^j(p_1, p_2, \ldots, p_n, I_j) \\ \tilde{x}_2^j(p_1, p_2, \ldots, p_n, I_j) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^j(p_1, p_2, \ldots, p_n, I_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^j\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j\right) \\ \tilde{x}_2^j\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j\right) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^j\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j\right) \end{pmatrix}, \tag{16.1.1}$$

$$j = 1, 2, \ldots, k.$$

Таким образом, суммарный спрос всех участников на i-й товар будет равен

$$Q_i^D = \sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_i^j \left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Согласно **закону Вальраса** р ы н о ч н о е   р а в н о в е с и е определяется равенством суммарного спроса и суммарного предложения по каждому товару:

$$Q_i^D = Q_i^S, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

или

$$\sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_i^j \left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j \right) = \sum_{j=1}^{k} x_i^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (16.1.2)$$

Можно показать, что одно из уравнений данной системы обязательно является следствием остальных, поэтому цены $p_1, p_2, \ldots, p_n$ определяются из этой системы с точностью до коэффициента пропорциональности. Это очевидно: ведь цены зависят от выбора денежной единицы.

Таким образом, можно определить равновесное конечное распределение товаров между участниками рынка, подставив в функции спроса (16.1.1) равновесные цены, определенные из системы (16.1.2).

Пример 16.1.1. Рассматривается рынок трех товаров. Требуется определить равновесное распределение товаров между четырьмя участниками рынка, если эти участники обладают одинаковыми функциями полезности $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 x_2 x_3}$, а начальные запасы товаров у участников рынка составляют

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \\ x_3^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть цены товаров на рынке определяются вектором $\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad p_3)$, тогда начальное богатство первого участника составит

$$I_1 = \mathbf{p}\mathbf{x}^1 = p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 + p_3 x_3^1 = p_1 + 2p_2 + 3p_3.$$

Аналогично определяется начальное богатство второго, третьего и четвертого участников рынка:

$$I_2 = \mathbf{p}\mathbf{x}^2 = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3, \ I_3 = \mathbf{p}\mathbf{x}^3 = 3p_1 + 4p_2 + 5p_3, \ I_4 = \mathbf{p}\mathbf{x}^4 = p_1 + p_2 + 6p_3.$$

Функции спроса участников одинаковы, так как функция полезности у них одна и та же. Для данной функции полезности функция спроса (14.1.12):

$$\tilde{\mathbf{x}}^j(p_1, p_2, p_3, I_j) = \begin{pmatrix} I_j/(3p_1) \\ I_j/(3p_2) \\ I_j/(3p_3) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

была определена в примере 14.1.1.

Суммарный спрос на первый товар составляет

$$Q_1^D = \frac{I_1}{3p_1} + \frac{I_2}{3p_1} + \frac{I_3}{3p_1} + \frac{I_4}{3p_1} =$$

$$= \frac{(p_1 + 2p_2 + 3p_3) + (2p_1 + 2p_2 + 2p_3) + (3p_1 + 4p_2 + 5p_3) + (p_1 + p_2 + 6p_3)}{3p_1} =$$

$$= \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_1},$$

аналогично определяется суммарный спрос на второй и третий товары:

$$Q_2^D = \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_2}, \qquad Q_3^D = \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_3}.$$

Суммарное предложение первого товара равно

$$Q_1^S = x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^4 = 1 + 2 + 3 + 1 = 7,$$
$$Q_2^S = x_2^1 + x_2^2 + x_2^3 + x_2^4 = 2 + 2 + 4 + 1 = 9,$$
$$Q_3^S = x_3^1 + x_3^2 + x_3^3 + x_3^4 = 3 + 2 + 5 + 6 = 16.$$

Запишем условие равенства суммарного спроса и суммарного предложения каждого товара:

$$\begin{cases} Q_1^D = Q_1^S, \\ Q_2^D = Q_2^S, \\ Q_3^D = Q_3^S \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_1} = 7, \\ \dfrac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_2} = 9, \\ \dfrac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_3} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 21p_1, \\ 7p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 27p_2, \\ 7p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 48p_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 0, \\ 7p_1 - 18p_2 + 16p_3 = 0, \\ 7p_1 + 9p_2 - 32p_3 = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений с помощью метода Жордана — Гаусса иллюстрируется табл. 16.1.1.

Таким образом, общее решение системы для определения равновесных цен таково:

$$p_1 = \frac{16}{9}\alpha, \quad p_2 = \frac{16}{7}\alpha, \quad p_3 = \alpha,$$

где, очевидно, цена третьего товара $\alpha > 0$. Ясно, что цены определяются относительно, поэтому для удобства положим $p_3 = \alpha = 63$ ден. ед., тогда

$$p_1 = \frac{16}{9} \cdot 63 = 112 \text{ ден. ед.}, \qquad p_2 = \frac{16}{7} \cdot 63 = 144 \text{ ден. ед.}$$

Таблица 16.1.1

−14	9	16	0
$\boxed{7}$	−18	16	0
7	9	−32	0
0	$\boxed{-27}$	48	0
1	−18/7	16/7	0
0	27	−48	0
0	1	−16/9	0
1	0	−16/7	0
0	0	0	0

При таких ценах начальные запасы участников рынка определяют их богатство:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 112 + 2\cdot 144 + 3\cdot 63 = 589,\\
I_2 &= 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 2\cdot 112 + 2\cdot 144 + 2\cdot 63 = 638,\\
I_3 &= 3p_1 + 4p_2 + 5p_3 = 3\cdot 112 + 4\cdot 144 + 5\cdot 63 = 1227,\\
I_4 &= p_1 + p_2 + 6p_3 = 112 + 144 + 6\cdot 63 = 634.
\end{aligned}
$$

Теперь можно определить равновесное распределение товаров:

$$
\tilde{\mathbf{x}}^1(p_1, p_2, p_3, I_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{I_1}{3p_1} \\ \dfrac{I_1}{3p_2} \\ \dfrac{I_1}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{589}{3\cdot 112} \\ \dfrac{589}{3\cdot 144} \\ \dfrac{589}{3\cdot 63} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{589}{336} \\ \dfrac{589}{432} \\ \dfrac{589}{189} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}^2(p_1, p_2, p_3, I_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{I_2}{3p_1} \\ \dfrac{I_2}{3p_2} \\ \dfrac{I_2}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{638}{336} \\ \dfrac{638}{432} \\ \dfrac{638}{189} \end{pmatrix},
$$

$$
\tilde{\mathbf{x}}^3(p_1, p_2, p_3, I_3) = \begin{pmatrix} \dfrac{I_3}{3p_1} \\ \dfrac{I_3}{3p_2} \\ \dfrac{I_3}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1227}{336} \\ \dfrac{1227}{432} \\ \dfrac{1227}{189} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}^4(p_1, p_2, p_3, I_4) = \begin{pmatrix} \dfrac{I_4}{3p_1} \\ \dfrac{I_4}{3p_2} \\ \dfrac{I_4}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{634}{336} \\ \dfrac{634}{432} \\ \dfrac{634}{189} \end{pmatrix}. \square
$$

16.2. Задание практикума

Рассматривается рынок трех товаров. Четыре участника рынка обладают одинаковыми функциями полезности $u(x_1, x_2, x_3)$ (такими же, как в модели поведения потребителя, они приведены для каждого варианта в табл. 14.2.1), начальные запасы товаров у участников рынка составляют соответственно

$$
\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \\ x_3^4 \end{pmatrix}
$$

(векторы $\mathbf{x}^1$ — $\mathbf{x}^4$ приведены для каждого варианта в табл. 16.2.1).

Требуется определить равновесное распределение товаров между четырьмя участниками рынка.

Таблица 16.2.1

№ вар.	Исходные данные				№ вар.	Исходные данные				№ вар.	Исходные данные			
	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$		$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$		$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$
1	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6\\4\\6\end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$	31	$\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	33	$\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	34	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	35	$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$					

17. Модель Леонтьева

17.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Идеи модели межотраслевого баланса, рассматриваемой в данном разделе, впервые возникли в 1920-х гг. в работах экономистов молодой Советской России, которые строили модель плановой экономики, удовлетворяющей спрос конечных потребителей. Наибольшее развитие эти идеи получили в трудах В. Леонтьева, эмигрировавшего к тому времени в США. В 1973 г. за эти исследования В. Леонтьеву была присуждена Нобелевская премия в области экономики.

Пусть производственный сектор национальной экономики разделен на n чистых отраслей (например, «машиностроение», «энергетика», «транспорт» и т. д.), каждая отрасль производит один вид продукции, различные отрасли выпускают разную продукцию. В процессе производства каждая отрасль может расходовать как свою продукцию, так и продукцию других отраслей, поэтому на непроизводственное потребление, вообще говоря, идет не вся выпущенная продукция (часть ее тратится в процессе производства).

Введем обозначения: a_{ij} — количество продукции i-й отрасли, расходуемое в процессе производства единицы продукции j-й отрасли, x_i — план выпуска i-й отрасли, c_i — спрос на продукцию i-й отрасли в непроизводственной сфере.

Матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ называется *матрицей прямых затрат*. Если считать сложившиеся производственные технологии неизменными во времени, то матрица $\mathbf{A}$ будет постоянной.

Кроме того, будем считать технологии линейными: если для выпуска единицы продукции j-й отрасли необходимо израсходовать a_{ij} единиц продукции i-й отрасли, то для выпуска x_j единиц продукции j-й отрасли необходимо израсходовать $a_{ij}x_j$ единиц продукции i-й отрасли.

В этих предположениях объем продукции i-й отрасли, потребляемый всеми n отраслями в процессе производства, равен

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j ,$$

поэтому на конечное непроизводственное потребление остается

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

единиц продукции i-й отрасли.

Значит, чтобы конечный спрос был обеспечен, необходимо выполнение балансовых равенств

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Эти равенства можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c} \qquad \text{или} \qquad (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{c},$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ —}$$

вектор валового выпуска,

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ —}$$

вектор конечного непроизводственного потребления,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ —}$$

единичная матрица.

Из **матричной формы модели Леонтьева**

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

можно выразить зависимость вектора валового выпуска $\mathbf{x}$ от вектора конечного непроизводственного потребления $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{c},$$

матрица $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ называется при этом *матрицей полных затрат.*

Модель Леонтьева называется *продуктивной*, если она разрешима в неотрицательных $\mathbf{x}$.

Пример 17.1.1. В модели Леонтьева даны матрица прямых затрат

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

и вектор конечного спроса

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти вектор $\mathbf{x}$ валового выпуска, обеспечивающий данный спрос.

Решение. Найдем матрицу полных затрат $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$:

$$\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix},$$

процесс вычисления матрицы $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ с помощью метода Жордана — Гаусса иллюстрируется табл. 17.1.1.

Таблица 17.1.1

$\boxed{1/2}$	−1/4	1	0
−1/3	1/2	0	1
1	1/2	2	0
0	$\boxed{1/3}$	2/3	1
1	0	3	3/2
0	1	2	3

Теперь поясним, как получить тот же результат в пакете Microsoft Excel. Введем матрицу $(\mathbf{E}-\mathbf{A})$ в ячейки A2:C3 рабочего листа Microsoft Excel, как показано на рис. 17.1.1, *а*.

Матрица $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ имеет две строки и два столбца, отведем под результат ячейки D2:E3. В ячейку D2 введем формулу «=МОБР(A2:B3)», причем эту формулу необходимо ввести как ф о р м у л у м а с с и в а. Для этого нужно мышью выделить диапазон D2:E3, начиная с ячейки D2, содержащей формулу, затем нажать клавишу <F2>, а затем — комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter>. Результат представлен на рис. 17.1.1, *б* (в ячейках D2:E3). Замечаем, что результаты ручного и компьютерного вычисления обратной матрицы совпали. Если формулу ввести не как формулу массива, то будет рассчитан только левый верхний элемент результата: число 3.

	A	B	C	D	E
1	**E − A**			$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$	
2	0,5	−0,25		=МОБР(A2:B3)	
3	−0,33333	0,5			

а) формула Microsoft Excel

	A	B	C	D	E
1	**E − A**			$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$	
2	0,5	−0,25		3	1,5
3	−0,33333	0,5		2	3

б) результаты расчета

Рис. 17.1.1. *Вычисление матрицы полных затрат с помощью Microsoft Excel*

Таким образом, матрица полных затрат

$$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Теперь можно найти вектор валового выпуска, обеспечивающий конечный спрос $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}. \ ❑$$

17.2. Задание практикума

Матрица прямых затрат $\mathbf{A}$ и вектор конечного спроса $\mathbf{c}$ в модели Леонтьева приведены для каждого варианта в табл. 17.2.1. Требуется найти вектор $\mathbf{x}$ валового выпуска, обеспечивающий данный спрос.

Таблица 17.2.1

№ вар.	A	c	№ вар.	A	c	№ вар.	A	c
1	$\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 \\ 2/5 & 1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 1/4 & 2/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	31	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	33	$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/5 \\ 1/3 & 1/5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 2/5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$	34	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	35	$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/5 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$			

18. Модель Солоу

18.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Опишем модель национальной экономики, предложенную в 1956 г. Р. Солоу, Нобелевским лауреатом 1987 г. в области экономики.

В замкнутой односекторной экономической системе производится один универсальный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться. Основные предположения модели Солоу состоят в постоянстве темпа прироста числа занятых, износа основных производственных фондов и нормы накопления, отсутствии лага (т. е. запаздывания) капиталовложений.

Состояние экономики в момент времени t определяется следующими показателями:

- валовым внутренним продуктом X_t,
- основными производственными фондами K_t,
- числом занятых в производственной сфере L_t,
- валовыми инвестициями I_t,
- фондом непроизводственного потребления C_t.

Пусть годовой темп прироста числа занятых составляет ν, тогда за промежуток времени dt численность занятых изменяется на величину $dL_t = \nu L_t dt$, значит, для L_t можно записать дифференциальное уравнение

$$\frac{dL_t}{dt} = \nu L_t,$$

решением которого является функция

$$L_t = L_0 \mathrm{e}^{\nu t},$$

где L_0 — число занятых в начальный момент времени.

Пусть за год *выбывает* (изнашивается и приходит в негодность) доля μ основных производственных фондов, норма накопления составляет ρ, а годовой валовый внутренний продукт определяется линейно-однородной неоклассической производственной функцией $X = F(K, L)$. Тогда износ и инвестиции в расчете на год равны μK_t и $I_t = \rho X_t = \rho F(K_t, L_t)$ соответственно, лаг капиталовложений отсутствует, значит, прирост фондов за промежуток времени dt составляет $dK_t = -\mu K_t dt + I_t dt$ или $dK_t = [-\mu K_t + \rho F(K_t, L_t)]dt$.

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{dK_t}{dt} = -\mu K_t + \rho L_t F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right),$$

где мы учли, что $F(K_t, L_t) = L_t F(K_t / L_t, 1)$, поскольку производственная функция $F(K_t, L_t)$ является линейно однородной.

Перейдем теперь к относительным показателям:

- фондовооруженности $k_t = K_t / L_t$,
- средней производительности труда $x_t = X_t / L_t$,
- удельным инвестициям на одного занятого $i_t = I_t / L_t$,
- среднедушевому потреблению $c_t = C_t / L_t$.

Найдем

$$\frac{dk_t}{dt} = \frac{d\left(\dfrac{K_t}{L_t}\right)}{dt}$$

по формуле производной частного. Имеем:

$$\frac{dk_t}{dt} = \frac{d\left(\dfrac{K_t}{L_t}\right)}{dt} = \frac{\dfrac{dK_t}{dt}L_t - \dfrac{dL_t}{dt}K_t}{L_t^2},$$

при этом

$$\frac{dK_t}{dt} = -\mu K_t + \rho L_t F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right), \quad \frac{dL_t}{dt} = \nu L_t,$$

поэтому

$$\frac{dk_t}{dt} = \frac{\dfrac{dK_t}{dt}L_t - \dfrac{dL_t}{dt}K_t}{L_t^2} = \frac{\left[-\mu K_t + \rho L_t F\left(\dfrac{K_t}{L_t}, 1\right)\right]L_t - \nu L_t K_t}{L_t^2} =$$

$$= \frac{\left[-(\mu + \nu)K_t + \rho L_t F\left(\dfrac{K_t}{L_t}, 1\right)\right]L_t}{L_t^2} = -(\mu + \nu)\frac{K_t}{L_t} + \rho F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) = -(\mu + \nu)k_t + \rho F\left(k_t, 1\right),$$

т. е. для фондовооруженности k_t справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{dk_t}{dt} = -(\mu + \nu)k_t + \rho F\left(k_t, 1\right).$$

Рассмотрим в качестве производственной функции функцию Кобба — Дугласа, при этом $F(k_t, 1) = Ak_t^{\alpha}$.

Введя обозначения $\lambda = \mu + \nu$, $f(k_t) = F(k_t, 1) = Ak_t^{\alpha}$, получаем окончательно **модель Солоу в относительных показателях:**

$$\begin{cases} \dfrac{dk_t}{dt} = -\lambda k_t + \rho f(k_t), \\ k_0 = K_0 / L_0, \\ x_t = f(k_t), \quad i_t = \rho f(k_t), \quad c_t = (1 - \rho) f(k_t). \end{cases}$$

Говорят, что экономика находится *на стационарной траектории*, если относительные показатели не меняются во времени. Поскольку x_t, i_t, и c_t являются функциями от k_t, то для того, чтобы экономика находилась на стационарной траектории, необходимо и достаточно постоянства во времени фондовооруженности k_t, т. е.

$$\frac{dk_t}{dt}=0 \qquad \text{или} \qquad -\lambda k_t+\rho f(k_t)=0.$$

Подставим сюда $f(k_t)=Ak_t^{\alpha}$, получим условие стационарности траектории:

$$-\lambda k_t+\rho A k_t^{\alpha}=0.$$

Вынесем k_t^{α} за скобку:

$$k_t^{\alpha}(-\lambda k_t^{1-\alpha}+\rho A)=0.$$

Из последнего уравнения видно, что возможны две стационарные траектории экономики: вырожденная [когда $k_t=0$, при этом $x_t=Ak_t^{\alpha}=0$, $i_t=\rho A k_t^{\alpha}=0$, $c_t=(1-\rho)Ak_t^{\alpha}=0$] и невырожденная [когда $-\lambda k_t^{1-\alpha}+\rho A=0$].

На невырожденной стационарной траектории постоянные значения относительных показателей равны

$$k_t=k^{\circ}=\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad x_t=x^{\circ}=A(k^{\circ})^{\alpha}=A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

$$i_t=i^{\circ}=\rho A(k^{\circ})^{\alpha}=\rho A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \qquad c_t=c^{\circ}=(1-\rho)A(k^{\circ})^{\alpha}=(1-\rho)A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Исследуем, что произойдет, если экономика отклонится от стационарной траектории. Изобразим на рис. 18.1.1 графики функций λk_t и $\rho A k_t^{\alpha}$ [здесь $\alpha\in(0,1)$].

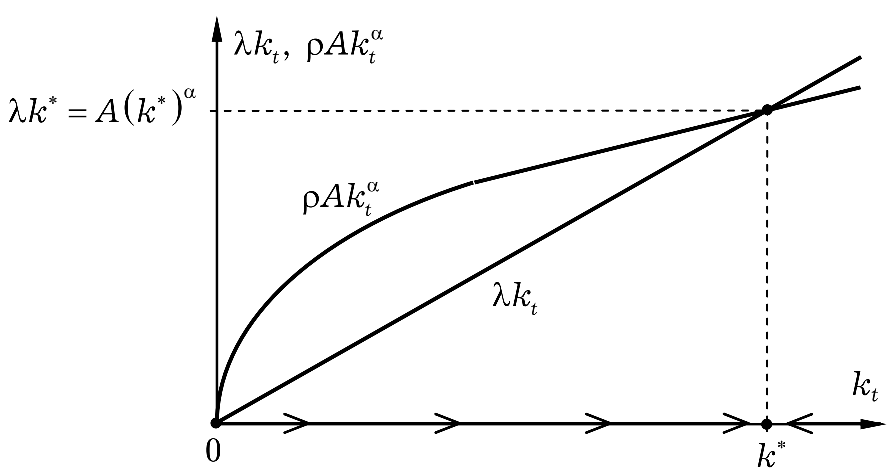


Рис. 18.1.1. *Исследование устойчивости стационарных траекторий экономики в модели Солоу*

Рассмотрим вначале **вырожденную стационарную траекторию** (на ней $k_t = 0$). Если k_t станет чуть больше нуля, то, как видно из рис. 18.1.1, $\rho A k_t^\alpha > \lambda k_t$, поэтому производная

$$\frac{dk_t}{dt} = -\lambda k_t + \rho A k_t^\alpha > 0,$$

откуда следует, что фондовооруженность k_t будет возрастать. При этом dk_t / dt остается положительной при всех $k_t \in (0, k^\circ)$, поэтому вырожденная стационарная траектория является неустойчивой: достаточно малейшего возмущения, и k_t начинает возрастать в сторону $k_t = k^\circ$; при $k_t = k^\circ$ производная dk_t / dt становится равной нулю, т. е. k_t перестает меняться.

Если экономика находится **на невырожденной стационарной траектории** $k_t = k^\circ$, и произошло незначительное отклонение фондовооруженности влево от стационарного значения k°, то, как мы уже убедились, k_t начинает возрастать до тех пор, пока вновь не вернется к значению k°. Если же k_t отклонится от k° вправо, то, как показывает рис. 18.1.1, $\rho A k_t^\alpha < \lambda k_t$, поэтому производная

$$\frac{dk_t}{dt} = -\lambda k_t + \rho A k_t^\alpha < 0,$$

значит, k_t будет убывать до тех пор, пока не станет равной k°. Таким образом, невырожденная стационарная траектория

$$k_t = \left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad x_t = A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad i_t = \rho A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad c_t = (1-\rho) A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

является устойчивой: при любом отклонении от этой траектории экономика стремится к ней вернуться.

Эта невырожденная стационарная траектория носит название *траектории сбалансированного устойчивого экономического роста:* численность занятых на ней возрастает экспоненциально: $L_t = L_0 e^{\nu t}$ (конечно, при положительном темпе прироста занятых ν), а все относительные показатели постоянны, значит, все абсолютные показатели возрастают пропорционально численности занятых L_t.

Рассмотрим теперь простейшую задачу управления экономикой, которая описывается моделью Солоу: попытаемся подобрать такую норму накопления ρ, чтобы удельное потребление на стационарной траектории сбалансированного устойчивого экономического роста было максимальным. Рассмотрим удельное потребление на стационарной траектории (c°) как функцию нормы накопления:

$$c^\circ = c^\circ(\rho) = (1-\rho) A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

и поставим задачу определения такой нормы накопления ρ, чтобы

$$c^{\circ}(\rho) \to \max$$

или, расписывая $c^{\circ}(\rho)$ подробно,

$$(1-\rho)A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \to \max.$$

Как известно, в точке максимума первая производная должна быть равна нулю (или не существовать), а вторая производная должна быть отрицательной. Имеем:

$$\frac{dc^{\circ}(\rho)}{d\rho} = \frac{d\left[(1-\rho)A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]}{d\rho} = A\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{d\left[(1-\rho)\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]}{d\rho} = A\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{d\left[\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \rho^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]}{d\rho} =$$

$$= A\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[\frac{d\left(\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)}{d\rho} - \frac{d\left(\rho^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)}{d\rho}\right] = A\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} - \frac{1}{1-\alpha}\rho^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\right] =$$

$$= \frac{A\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha}\left[\alpha\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} - \rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right] = \frac{A\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha}\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}(\alpha-\rho).$$

Видим, что $dc^{\circ}(\rho)/d\rho = 0$ при $\rho = 0$ и при $\rho = \alpha$. Предлагаем читателю самостоятельно убедиться, что в точке $\rho_* = 0$ вторая производная $d^2c^{\circ}(\rho)/d\rho^2 > 0$, т. е. точка $\rho_* = 0$ является точкой минимума удельного потребления на стационарной траектории, а в точке $\rho^* = \alpha$ вторая производная $d^2c^{\circ}(\rho)/d\rho^2 < 0$, т. е. точка $\rho^* = \alpha$ является точкой максмума удельного потребления.

Этот результат, полученный в 1966 г. Э. Фелпсом, носит название **золотого правила накопления:** для того, чтобы удельное потребление на стационарной траектории сбалансированного экономического роста было максимальным, норма накопления ρ должна быть равна эластичности выпуска по фондам α.

Пример 18.1.1. Даны значения параметров $A = 10^3$ и $\alpha = 0{,}5$ производственной функции Кобба — Дугласа. В модели Солоу с этой производственной функцией требуется рассчитать значения фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления на стационарной траектории сбалансированного устойчивого экономического роста, на которой норма накопления равна $\rho = 0{,}2$, коэффициент выбытия основных производственных фондов за год составляет $\mu = 0{,}2$, а годовой темп прироста численности занятых равен $\nu = 0{,}05$. Сравнить полученное значение удельного потребления с оптимальным.

Решение. На стационарной траектории, соответствующей норме накопления $\rho = 0{,}2$, фондовооруженность

$$k^{\circ}=\left(\frac{\rho A}{\mu+\nu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=\left(\frac{0,2\cdot 10^{3}}{0,2+0,05}\right)^{\frac{1}{1-0,5}}=64\cdot 10^{4},$$

средняя производительность труда

$$x^{\circ}=A(k^{\circ})^{\alpha}=10(64\cdot 10^{4})^{0,5}=8\cdot 10^{5},$$

удельное потребление

$$c^{\circ}=(1-\rho)x^{\circ}=(1-0,2)8\cdot 10^{5}=64\cdot 10^{4}.$$

Согласно золотому правилу накопления, для того чтобы на стационарной траектории сбалансированного устойчивого экономического роста удельное потребление было максимальным, нужно выбрать норму накопления ρ равной эластичности выпуска по фондам α, т. е. в рассматриваемом примере максимум удельного потребления на стационарной траектории достигается при $\rho^{*}=\alpha=0,5$. При этом

$$k^{*}=\left(\frac{\rho^{*}A}{\mu+\nu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=\left(\frac{0,5\cdot 10^{3}}{0,2+0,05}\right)^{\frac{1}{1-0,5}}=4\cdot 10^{6},$$

$$c^{*}=(1-\rho^{*})x^{*}=(1-\rho^{*})A(k^{*})^{\alpha}=(1-0,5)\cdot 10^{3}\cdot(4\cdot 10^{6})^{0,5}=10^{6}\gg 64\cdot 10^{4}.$$

Видим, что оптимальный выбор нормы накопления приводит к существенному увеличению удельного потребления на стационарной траектории — более чем в полтора раза! ❑

18.2. Задание практикума

В модели Солоу с производственной функцией функции Кобба — Дугласа с параметрами A и α, приведенными для каждого варианта в табл. 18.2.1, требуется рассчитать значения фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления на стационарной траектории сбалансированного устойчивого экономического роста, на которой норма накопления равна ρ, коэффициент выбытия основных производственных фондов за год составляет μ, а годовой темп прироста численности занятых равен ν (значения параметров ρ, μ и ν приведены для каждого варианта в табл. 18.2.1). Сравнить полученное значение удельного потребления с оптимальным (т. е. с тем, которое соответствует золотому правилу накопления).

Таблица 18.2.1

№ вар.	Исходные данные					№ вар.	Исходные данные				
	A	α	ρ	μ	ν		A	α	ρ	μ	ν
1	10	3/5	0,3	0,1	0,03	6	1000	2/5	0,3	0,1	0,03
2	100	3/5	0,3	0,2	0,04	7	10	2/5	0,3	0,2	0,04
3	1000	1/6	0,3	0,1	0,05	8	100	5/6	0,3	0,1	0,05
4	10	1/2	0,4	0,2	0,03	9	1000	1/4	0,5	0,2	0,03
5	100	1/2	0,4	0,1	0,04	10	10	1/4	0,5	0,1	0,04

Окончание табл. 18.2.1

№ вар.	Исходные данные					№ вар.	Исходные данные				
	A	α	ρ	μ	ν		A	α	ρ	μ	ν
11	1000	1/3	0,4	0,2	0,05	24	100	1/3	0,5	0,2	0,05
12	10	1/3	0,5	0,1	0,03	25	1000	1/3	0,4	0,1	0,03
13	100	1/4	0,5	0,2	0,04	26	10	3/4	0,4	0,2	0,04
14	1000	1/4	0,5	0,1	0,05	27	100	3/4	0,4	0,1	0,05
15	10	2/3	0,3	0,2	0,03	28	1000	2/3	0,2	0,2	0,03
16	100	2/3	0,3	0,1	0,04	29	10	2/3	0,2	0,1	0,04
17	1000	3/4	0,3	0,2	0,05	30	100	1/4	0,2	0,2	0,05
18	10	3/4	0,4	0,1	0,03	31	1000	1/4	0,1	0,1	0,03
19	100	2/5	0,4	0,2	0,04	32	10	1/5	0,1	0,2	0,04
20	1000	2/5	0,4	0,1	0,05	33	100	1/5	0,1	0,1	0,05
21	10	1/6	0,5	0,2	0,03	34	1000	1/3	0,6	0,2	0,03
22	100	1/6	0,5	0,1	0,04	35	10	1/3	0,6	0,1	0,04
23	1000	5/6	0,5	0,2	0,05						

19. Оптимальный портфель ценных бумаг

19.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Рассмотрим ситуацию, когда в некоторый момент времени t инвестор может часть своих средств оставить на банковском счете, а другую часть потратить на приобретение ценных бумаг. *Портфелем финансовых инструментов* на (B, S)-рынке назовем вектор

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (19.1.1)$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ — доля капитала инвестора, вложенная в безрисковый актив (банковский счет или облигацию), $x_k \in \mathbb{R}$ — доля капитала инвестора, вложенная в акцию с номером k ($k = 1, 2, \ldots, n$), при этом, очевидно,

$$x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

Числа x_k могут быть как положительными, так и отрицательными, в последнем случае инвестор берет средства в долг с банковского счета либо совершает короткую продажу акций (конечно, эти числа могут быть и нулевыми).

Эффективность портфеля финансовых инструментов π вычисляется, очевидно, как

$$E_\pi = x_0 i + \sum_{k=1}^{n} x_k E_k ,$$

где i — эффективность банковского счета (процентная ставка), E_k — эффективность k-й акции (ее доходность).

Ожидаемой эффективностью портфеля финансовых инструментов называется математическое ожидание его эффективности, а *риском* портфеля — среднее квадратичное отклонение его эффективности.

Возникает задача оптимизации портфеля с целью получения максимальной эффективности при минимальном риске. К сожалению, одновременно этого достичь невозможно, поэтому инвестор, оптимизирующий свой портфель, должен выбрать один из критериев:

- либо минимизировать риск $\sigma_\pi = \sqrt{\mathbf{D}E_\pi}$ при заданном уровне эффективности портфеля,
- либо максимизировать ожидаемую эффективность $\mathbf{M}E_\pi$ при заданном уровне риска портфеля.

В общем случае математическая формулировка задачи м и н и м и з а ц и и р и с к а портфеля ценных бумаг при заданной допустимой ожидаемой эффективности $\tilde{r}_\pi$ выглядит так:

$$\sqrt{\mathbf{D}\left(x_0 i+\sum_{k=1}^{n} x_k E_k\right)} \to \min, \tag{19.1.2}$$

$$\mathbf{M}\left(x_0 i+\sum_{k=1}^{n} x_k E_k\right)=\tilde{r}_\pi,$$

$$x_0+\sum_{k=1}^{n} x_k=1,$$

$$x_k \in \mathbb{R} \quad (k=0,1,2,\ldots,n).$$

Воспользовавшись тем, что квадратный корень — возрастающая функция, и применив свойства математического ожидания и дисперсии, эту модель можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \sigma_{kl} x_k x_l \to \min, \tag{19.1.3}$$

$$i x_0+\sum_{k=1}^{n} r_k x_k=\tilde{r}_\pi, \quad x_0+\sum_{k=1}^{n} x_k=1, \quad x_k \in \mathbb{R} \quad (k=0,1,2,\ldots,n),$$

где $r_k = \mathbf{M}E_k$ — ожидаемая эффективность k-й акции ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), $\sigma_{kl} = \mathrm{cov}(E_k; E_l)$ — ковариация эффективностей k-й акции и l-й ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $l = 0, 1, 2, \ldots, n$); очевидно, что $\sigma_{kk} = \mathbf{D}E_k = \sigma_k^2$.

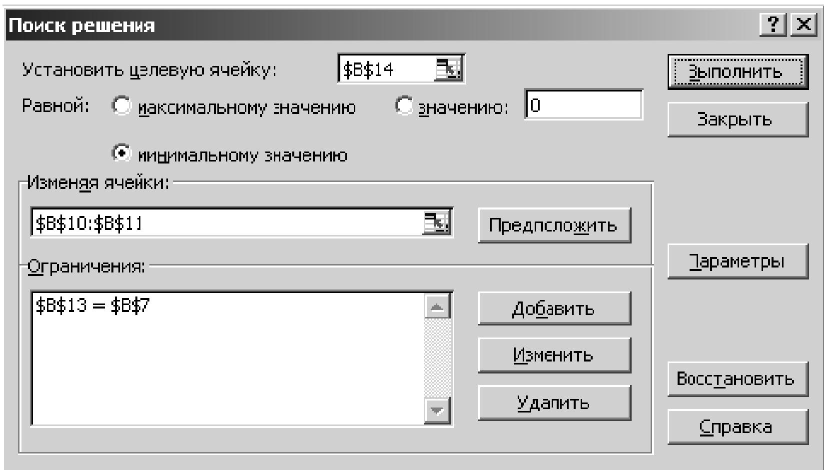
Пример 3.14.1. Определить, с каким наименьшим риском можно достичь 20%-ной эффективности инвестиций, если есть возможность банковских вложений и заимствований по ставке $i = 10\%$ годовых, а на рынке ценных бумаг обращаются две акции, их ожидаемые эффективности равны соответственно $r_1 = 16\%$ и $r_2 = 23\%$, риски $\sigma_1 = 5\%$, $\sigma_2 = 14\%$, а коэффициент корреляции доходностей данных акций равен $\rho_{12} = 0{,}36$.

Решение. Введем данные в рабочий лист Microsoft Excel, как показано на рис. 19.1.1, *а*. Пусть ячейки B9 и B10 соответствуют долям рисковых вложений x_1 и x_2, в ячейку B8, соответствующую доле безрисковых вложений x_0, введем формулу, соответствующую разности всех вложений (единицы) и вложений в акции x_1 и x_2, в ячейку B12 введем формулу для ожидаемой эффективности портфеля $\mathbf{M}E_\pi$, а в ячейку B13 введем формулу для дисперсии эффективности портфеля $\mathbf{D}E_\pi$; учтем здесь, что $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ (эти формулы приводятся справа от соответствующих ячеек).

Воспользуемся инструментом «Поиск решения». Для этого выберем в меню «Сервис» пункт «Сервис | Поиск решения...», и в появившемся окне (рис. 19.1.1, *б*) укажем, что мы хотим *установить целевую ячейку* $B$14 (в которой рассчитывается дисперсия портфеля) *равной минимальному значению, изменяя ячейки* $B$10:$B$11 (в которых находятся доли рисковых составляющих портфеля), причем в задаче присутствует ограничение $B$13 = $B$7.

	A	B
1	$i =$	0,10
2	$r_1 =$	0,16
3	$r_2 =$	0,23
4	$\sigma_1 =$	0,05
5	$\sigma_2 =$	0,14
6	$\rho_{12} =$	0,36
7	$r_\pi =$	0,20
8		
9	$x_0 =$	=1-B10-B11
10	$x_1 =$	
11	$x_2 =$	
12		
13	$\mathbf{M}E_\pi=$	=B9*B1+B10*B2+B11*B3
14	$\mathbf{D}E_\pi=$	=B10^2*B4^2+B11^2*B5^2+2*B10*B11*B6*B4*B5

а) ввод формул



б) окно «Поиск решения»

	A	B
1	$i =$	0,10
2	$r_1 =$	0,16
3	$r_2 =$	0,23
4	$\sigma_1 =$	0,05
5	$\sigma_2 =$	0,14
6	$\rho_{12} =$	0,36
7	$r_\pi =$	0,20
8		
9	$x_0 =$	−0,3908
10	$x_1 =$	1,1543
11	$x_2 =$	0,2365
12		
13	$\mathbf{M}E_\pi=$	0,2000
14	$\mathbf{D}E_\pi=$	0,0058

в) результаты

Рис. 19.1.1. *Расчет оптимального портфеля*

После нажатия на кнопку «Выполнить» в рабочем листе произойдут изменения: в ячейках B9, B10 и B11 появятся значения $x_0^* = -0{,}3908$,, $x_1^* = 1{,}1543$, $x_2^* = 0{,}2365$, в ячейке B13 будет рассчитана ожидаемая эффективность портфеля (она равна требуемой эффективности $\tilde{r}_\pi = 0{,}20$, а в ячейке B14 появится рассчитанное значение дисперсии эффективности портфеля $\mathbf{D}E_\pi$= 0,0058. При этом риск портфеля равен $\sigma_\pi = \sqrt{0{,}0058} \approx$ $\approx 0{,}076 = 7{,}6\%$. Интерпретация оптимального решения $x_0^* = -0{,}3908$, $x_1^* = 1{,}1543$, $x_2^* = 0{,}2365$ такова: необходимо 23,65% потратить на приобретение акций второго вида, взять банковский кредит в размере 39,08% от общей суммы собственных средств, после чего все оставшиеся после покупки акций второго вида собственные средства вместе со средствами, полученными в кредит, вложить в покупку акций первого вида. Результаты работы программы представлены на рис. 19.1.1, *в*.

Множитель Лагранжа, который приводится в «Отчете по устойчивости», равен $\lambda = 0{,}116$; это означает, что увеличение эффективности $\tilde{r}_\pi$ заданного портфеля на 1% приведет к тому, что риск оптимального портфеля, обладающего такой эффективностью, увеличится приблизительно на $\sqrt{0{,}1161} \approx 0{,}341\%$. ❑

19.2. Задание практикума

Определить, с каким наименьшим риском можно достичь 20%-ной эффективности инвестиций, если есть возможность банковских вложений и заимствований по ставке i, а на рынке ценных бумаг обращаются две акции, их ожидаемые эффективности равны соответственно r_1 и r_2, риски σ_1 и σ_2, а коэффициент корреляции доходностей данных акций равен $\rho_{12} = 0{,}76$ (параметры i, r_1, r_2, σ_1, σ_2 приводятся для каждого варианта в табл. 19.2.1).

Таблица 19.2.1

№ вар.	Исходные данные					№ вар.	Исходные данные				
	i	r_1	r_2	σ_1	σ_2		i	r_1	r_2	σ_1	σ_2
1	0,01	0,03	0,08	0,03	0,10	19	0,03	0,05	0,09	0,03	0,06
2	0,01	0,03	0,08	0,04	0,08	20	0,03	0,05	0,09	0,04	0,06
3	0,01	0,03	0,08	0,04	0,10	21	0,03	0,05	0,09	0,04	0,08
4	0,01	0,03	0,08	0,05	0,08	22	0,03	0,05	0,09	0,06	0,08
5	0,02	0,04	0,06	0,05	0,10	23	0,04	0,06	0,10	0,06	0,10
6	0,02	0,04	0,06	0,06	0,08	24	0,04	0,06	0,10	0,08	0,10
7	0,02	0,04	0,06	0,06	0,10	25	0,04	0,06	0,10	0,10	0,12
8	0,02	0,04	0,06	0,07	0,08	26	0,04	0,06	0,10	0,04	0,06
9	0,02	0,04	0,09	0,07	0,10	27	0,04	0,06	0,12	0,04	0,08
10	0,02	0,04	0,09	0,08	0,10	28	0,04	0,06	0,12	0,03	0,08
11	0,02	0,04	0,09	0,08	0,12	29	0,04	0,06	0,12	0,03	0,10
12	0,02	0,04	0,09	0,08	0,14	30	0,04	0,06	0,12	0,04	0,12
13	0,02	0,04	0,06	0,07	0,08	31	0,04	0,06	0,10	0,04	0,06
14	0,01	0,03	0,08	0,04	0,08	32	0,03	0,05	0,09	0,04	0,06
15	0,01	0,03	0,08	0,04	0,10	33	0,03	0,05	0,09	0,04	0,08
16	0,02	0,04	0,06	0,07	0,09	34	0,04	0,06	0,10	0,04	0,07
17	0,01	0,03	0,08	0,04	0,09	35	0,03	0,05	0,09	0,04	0,07
18	0,01	0,03	0,08	0,04	0,09						

20. РАЦИОНАЛЬНАЯ СТОИМОСТЬ ОПЦИОНОВ

20.1. Краткие теоретические сведения и указания к выполнению заданий

Акция — это долевое обязательство: ее обладатель получает право долевого участия в управлении акционерной компанией, выпустившей эти акции (каждой акции соответствует определенное число голосов на ежегодном общем собрании акционеров — высшем органе управления компанией), в активах и прибылях (дивидендах) этой компании.

Рассмотрим ценообразование акций в рамках **биномиальной модели Кокса — Росса — Рубинштейна.**

Предположим для простоты, что на рынке обращается одна акция, и ее стоимость в конце периода времени t составляет S_t.

Предположим также, что инвестор имеет возможность:

- размещать средства на банковском счете и брать с него в долг;
- покупать и продавать акции.

Тогда для этого инвестора на рынке существует безрисковый актив (банковский счет) B и рисковый актив (акция) S.

Будем считать, что проценты на банковский счет начисляются по схеме сложных процентов с постоянной ставкой $i(t) = i = \text{const}$, так что в конце каждого года сумма на счете увеличивается в $(1 + i)$ раз:

$$B_t = B_{t-1}(1+i).$$

Будем предполагать, что *операционные издержки*, связанные с переводом средств между активами, отсутствуют, а также что активы являются *безгранично делимыми*, т. е. можно купить и продать любую часть акции, положить на счет и снять с него любую его часть.

Предположим, что в течение года времени стоимость акций может увеличиться в u раз или увеличиться в d раз (уменьшиться в $1/d$ раз), причем $d < 1 < 1 + i < u$ (рис. 20.1.1).

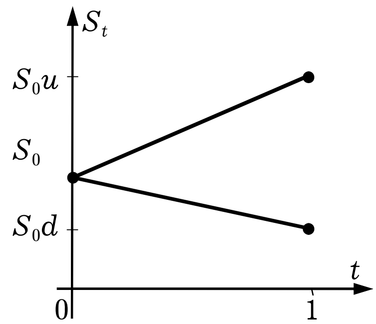


Рис. 20.1.1. *Изменение цены акции за один год*

На идеальном рынке отсутствуют арбитражные возможности, т. е. невозможно извлечь безрисковый доход, больший чем процент, начисляемый на банковский счет.

Предположение о том, что на рынке отсутствуют *арбитражные возможности*, означает, что математическое ожидание цены акции на таком рынке к концу года $\mathbf{M}S_1$ должно совпадать с суммой, которая оказалась бы на банковском счете к концу года, если бы сумма S_0 была в начале года положена на банковский счет, т. е. с суммой $S_0(1 + i)$:

$$\mathbf{M}S_1 = S_0(1 + i).$$

Истинные вероятности того, что в течение данного периода акция подорожает или подешевеет, нам неизвестны, но в предположении отсутствия арбитражных возможностей можно с помощью только что полученного условия вычислить так называемые *вероятности, нейтральные к риску*: пусть p — вероятность того, что в начале следующего периода цена акции окажется равной S_0u, тогда вероятность того, что цена акции будет равна S_0d, составит $(1 - p)$; при этом

$$\mathbf{M}S_1 = S_0up + S_0d(1 - p).$$

Отсюда

$$S_0up + S_0d(1 - p) = S_0(1 + i).$$

Разделим обе части этого равенства на S_0:

$$up + d(1 - p) = 1 + i \quad \text{или} \quad (u - d)p + d = 1 + i,$$

поэтому

$$p = \frac{1 + i - d}{u - d}. \tag{20.1.1}$$

Предположим теперь, что рассматриваемый промежуток времени $[0; T]$ разбит на n периодов, в каждом из которых стоимость акции может увеличиться в u или в d раз. Вероятность того, что стоимость акции увеличится в u или в d раз, неизвестна, однако можно вновь воспользоваться принципом вероятности, нейтральной к риску.

При этом процентная ставка будет скорректирована. Рассчитаем процентную ставку i_n, выплачиваемую за n-ю часть года в случае сложных процентов. За год сумма B_0 увеличивается до $B_0(1 + i)$, с другой стороны, если n раз за этот год начислялся процент i_n по схеме сложных процентов, то к концу года сумма B_0 должна превратиться в $B_0(1 + i_n)^n$. Таким образом, заключаем, что

$$B_0(1 + i) = B_0(1 + i_n)^n \qquad \text{или} \qquad 1 + i = (1 + i_n)^n,$$

откуда

$$i_n = (1 + i)^{1/n} - 1,$$

т. е. в числителе формулы (20.1.1) вместо $(1 + i)$ будет $(1 + i)^{T/n}$:

$$p_{(n)} = \frac{(1 + i)^{T/n} - d}{u - d} \tag{20.1.2}$$

[индекс (n) здесь означает, что проведена коррекция годовой ставки с учетом того, что рассматриваемый отрезок времени $[0; T]$ разбивается на n периодов].

Процесс изменения цены акции в течение n периодов (для случая $n = 4$) проиллюстрирован рис. 20.1.2.

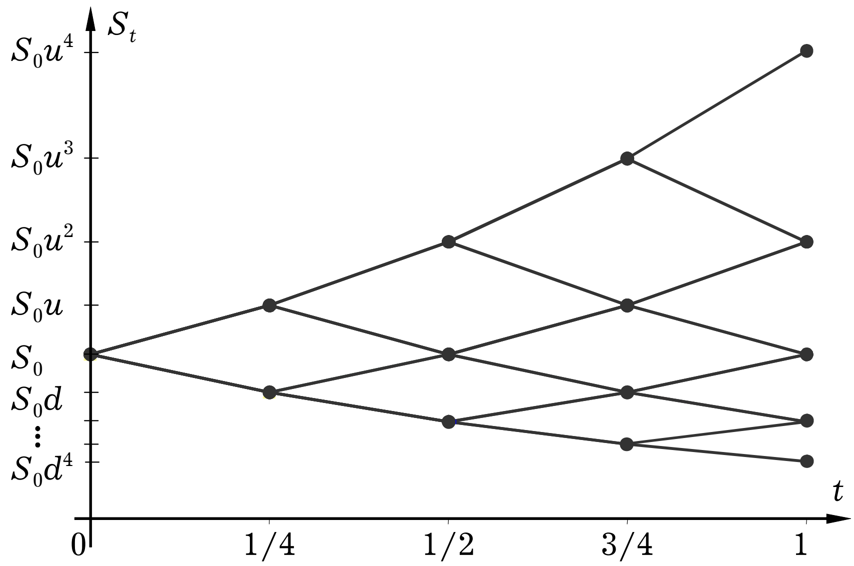


Рис. 20.1.2. *Изменение цены акции в течение четырех периодов*

При этом процесс изменения цены акции в течение n периодов можно представить как последовательность n независимых испытаний, в которых успехом считается повышение цены акции в u раз, а неудачей — ее понижение в $1/d$ раз. Если в течение n периодов цена акции поднималась k раз и опускалась $(n - k)$ раз, то ее цена к концу последнего периода составит $s_k = S_0u^kd^{n-k}$. Вероятность наступления k повышений и $(n - k)$ понижений цены акции составит по ф о р м у л е Б е р н у л л и

$$\mathbf{P}_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Вероятность успеха p здесь имеет смысл оценить с помощью нейтральной к риску вероятности $p_{(n)}$, определяемой формулой (20.1.2). Таким образом, цена акции к концу n-го периода (т. е. в момент времени T) может принимать значения

$$s_k = S_0u^kd^{n-k}$$

с вероятностями

$$\mathbf{P}\left\{S_T = S_0u^kd^{n-k}\right\} = C_n^k p_{(n)}^k \left(1-p_{(n)}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{20.1.3}$$

Пример 20.1.1. Составить ряд распределения цены акции к концу года, разбив этот год на четыре периода, если текущая цена акции составляет $S_0 = 35$ руб., годовая безрисковая процентная ставка составляет $i = 10\%$ и известно, что в каждом периоде акция может возрасти в цене или упасть в цене в $u = 1{,}105$ раз.

Решение. Так как $(1+i)^{1/4} = 1{,}1^{1/4} \approx 1{,}024$, то вероятность, нейтральная к риску,

$$p_{(4)} = \frac{(1+i)^{1/4} - d}{u - d} = \frac{1{,}024 - 0{,}905}{1{,}105 - 0{,}905} \approx 0{,}595, \qquad 1 - p_{(4)} \approx 0{,}405$$

(здесь $d = 1/u = 1/1{,}105 \approx 0{,}905$).

Теперь мы можем составить ряд распределения цены акции к концу четвертого периода: цена принимает значения

$$S_0 u^k d^{4-k}$$

соответственно с вероятностями

$$\mathbf{P}_4(k) = C_4^k p_{(4)}^k \left(1 - p_{(4)}\right)^{4-k}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Окончательно имеем:

$$\begin{array}{c|ccccc} S_1 & 23{,}48 & 28{,}66 & 35{,}00 & 42{,}74 & 52{,}18 \\ \hline p & 0{,}027 & 0{,}158 & 0{,}348 & 0{,}341 & 0{,}125 \end{array}. \square$$

Банковский счет, акции и облигации называются *основными финансовыми инструментами*. На их базе могут быть построены более сложные финансовые инструменты — п р о и з в о д н ы е.

Наиболее распространенные типы производных финансовых инструментов — форварды и опционы.

Опцион — это ценная бумага, представляющая собой договор, по которому одна из сторон (*продавец*) продает опцион за определенную *премию*, а другая сторона (*покупатель* или *владелец*) при этом п о л у ч а е т п р а в о (но не обязанность) в течение срока, оговоренного в условиях опциона, либо купить определенный актив по фиксированной цене, определяемой в момент заключения договора и называемой *терминальной стоимостью опциона* (такой опцион называется *опционом покупателя*), либо продать актив по терминальной стоимости (такой опцион называется *опционом продавца*).

По срокам исполнения опционы делятся на европейские и американские. *Американский опцион* может быть предъявлен к исполнению в любое время до истечения срока опциона, *европейский опцион* может быть использован только в день истечения его срока.

Рассмотрим **ценообразование европейских опционов** в рамках биномиальной модели.

Рациональной считается такая стоимость финансового инструмента, которая исключает возможность арбитража без риска; иными словами, доходность безрискового финансового инструмента, имеющего рациональную стоимость, должна совпадать с доходностью банковского счета.

Найдем рациональную стоимость $\mathbb{C}_T$ стандартного европейского опциона покупателя. Очевидно, рациональная стоимость опциона в момент его исполнения совпадает с прибылью, которую можно получить, исполнив опцион. Данный опцион имеет смысл и с п о л н я т ь, т. е. пользоваться заложенным в нем правом покупки акции по цене X, лишь в том случае, когда рыночная цена S_T этой акции к моменту окончания срока действия опциона, т. е. к концу последнего периода, будет больше X. Если рыночная цена акции S_T окажется больше X, держатель опциона, исполнив его, получит доход $(S_T - X)$. Если же рыночная цена акции S_T окажется меньше X, держатель опциона просто не будет его исполнять и получит нулевой доход. Таким образом, если цена акции в момент исполнения опциона известна и равна S_T, то доход от исполнения такого опциона составит $C_T = \max\{S_T - X; 0\}$. Поскольку цена акции S_T является случайной величиной, определяемой рядом распределения (20.1.3), доход от исполнения опциона покупателя также является случайной величиной, которая принимает значения

$$c_k = \max\left\{S_0 u^k d^{n-k} - X;\ 0\right\}$$

с вероятностями

$$\mathbf{P}_n(k) = C_n^k p_{(n)}^k \left(1 - p_{(n)}\right)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Оценка опциона происходит перед началом первого периода, поэтому для получения его рациональной стоимости $\mathbb{C}_T$ достаточно дисконтировать ожидаемый доход от исполнения опциона на срок его действия:

$$\mathbb{C}_T = \frac{\mathbf{M}C_T}{(1+i)^T} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \max\left\{S_0 u^k d^{n-k} - X;\ 0\right\} C_n^k p_{(n)}^k \left(1 - p_{(n)}\right)^{n-k}}{(1+i)^T}. \qquad (20.1.4)$$

Таким образом, рациональная стоимость $\mathbb{C}_T$ европейского опциона покупателя со сроком погашения T (в годах) и ценой исполнения X, выписанного на акцию с текущей ценой S_0, определяется формулой (20.1.4), в которой i — банковская (годовая) процентная ставка, срок действия опциона делится на n периодов (в каждый из периодов цена акции, на которую выписан опцион, может повыситься в u или в d раз), $p_{(n)}$ — вероятность, нейтральная к риску, вычисляемая по формуле (20.1.2).

Пример 20.1.2. Определить рациональную стоимость европейского опциона покупателя с терминальной стоимостью $X = 40$ руб. и сроком исполнения 1 год, выписанного на акцию из условия примера 20.1.1.

Решение. Ряд распределения дохода от исполнения опциона при расчетах по четырехпериодной биномиальной модели имеет следующий вид:

C_1	0,00	2,74	12,18
p	$0,027 + 0,158 + 0,348 = 0,533$	0,341	0,125

Ожидаемый доход от исполнения опциона покупателя, равный математическому ожиданию случайной величины C_1, составляет

$$\mathbf{M}C_1 = \sum_{k=0}^{4} \max\left\{S_0 u^k d^{4-k} - X; 0\right\} C_4^k p_{(4)}^k \left(1 - p_{(4)}\right)^{4-k} =$$

$$= 0 \cdot 0,027 + 0 \cdot 0,158 + 0 \cdot 0,348 + 2,74 \cdot 0,341 + 12,18 \cdot 0,125 = 2,46.$$

Окончательно получаем, что

$$\mathbb{C}_1 = \frac{\mathbf{M}C_1}{1+i} = \frac{2,46}{1+0,1} \approx 2,24 \text{ руб.},$$

т. е рациональная стоимость такого опциона равна 2 руб. 24 коп. (что существенно меньше текущей цены акции и цены исполнения опциона!). ❑

Справедлива

Теорема о паритете европейских опционов покупателя и продавца. *Пусть одновременно заключаются два опционных контракта (опцион покупателя и опцион продавца) с одной и той же ценой исполнения X и одним и тем же сроком исполнения T на одну и ту же акцию, стоимость которой в начальный момент равна S_0, банковская (годовая) процентная ставка равна i. Тогда рациональные стоимости этих опционов $\mathbb{C}_T$ и $\mathbb{P}_T$ связаны равенством*

$$\mathbb{P}_T - \mathbb{C}_T + S_0 = \frac{X}{(1+i)^T}.$$

Пример 20.1.3. Найти рациональную стоимость европейского опциона продавца с терминальной стоимостью $X = 40$ руб. и сроком исполнения 1 год, выписанного на акцию из условия примера 20.1.1.

Решение. По теореме о паритете опционов покупателя и продавца

$$\mathbb{P}_T - \mathbb{C}_T + S_0 = \frac{X}{(1+i)^T},$$

откуда

$$\mathbb{P}_1 = 2{,}24 - 35 + \frac{40}{1{,}1^1} \approx 3{,}60,$$

т. е. рациональная стоимость такого опциона равна 3 руб. 60 коп.

Можно рациональную стоимость европейского опциона продавца найти и другим способом — по ряду распределения дохода от его исполнения

P_1	16,52	11,34	5,00	0,00
p	0,027	0,158	0,348	0,467

Находим математическое ожидание дохода от исполнения опциона:

$$\mathbf{M}P_1 = 16{,}52 \cdot 0{,}027 + 11{,}33 \cdot 0{,}158 + 5{,}00 \cdot 0{,}348 + 0 \cdot 0{,}467 = 3{,}98.$$

и дисконтируем его на срок его действия:

$$\mathbb{P}_1 = \frac{\mathbf{M}P_1}{1+i} = \frac{3{,}98}{1+0{,}1} \approx 3{,}62 \text{ руб.}$$

(разница в две копейки образовалась из-за ошибок округления). ❑

Перейдем к рассмотрению **ценообразования американских опционов.**

Оказывается, **американский опцион покупателя может быть выгодно исполнять только в последний момент срока его действия.** Отсюда следует

Теорема эквивалентности европейских и американских опционов покупателя. *Рациональная стоимость американского опциона покупателя совпадает с рациональной стоимостью аналогичного европейского опциона покупателя.*

Однако американский опцион продавца часто бывает выгодно исполнить досрочно, поэтому его рациональная стоимость может оказаться такой же, как у соответствующего европейского опциона (если досрочное исполнение окажется невыгодным) или выше (если будет выгоднее исполнить опцион досрочно).

Это приводит к тому, что **теорема о паритете** для американских опционов превращается в неравенство

$$\mathbb{P}_T^{(\text{амер.})} - \mathbb{C}_T^{(\text{амер.})} + S_0 \geqslant \frac{X}{(1+i)^T}.$$

Для оценки рациональной стоимости американских опционов продавца обычно пользуются методом динамического программирования (см. разделы 6—7).

В самом деле, в биномиальной модели процесс изменения цены акции распадается на n периодов (этапов), поэтому процесс планирования управления процессом владения американским опционом продавца (которое с содержательной точки зрения состоит в том, что на каждом шаге лицо, принимающее решение, определяет, имеет ли смысл исполнить опцион досрочно или лучше подождать) является многошаговым, причем каждый раз оптимизируется управление только на одном шаге.

При этом начальное состояние процесса (начальная цена акции) нам известно, и управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех возможных будущих значений цены акции, а последний шаг планируется «без оглядки на будущее», поскольку американский опцион должен быть исполнен до окончания срока его исполнения, т. е. до окончания последнего шага.

Пример 20.1.4. Определить рациональную стоимость американского опциона покупателя с терминальной стоимостью $X = 40$ руб. и сроком исполнения 1 год, выписанного на акцию из условия примера 20.1.1.

Решение. По теореме эквивалентности европейских и американских опционов покупателя рациональная стоимость рассматриваемого опциона равна 2 руб. 24 коп. (согласно решению примера 20.1.2).

Убедимся в том, что американский опцион покупателя невыгодно исполнять досрочно. Изобразим на рис. 20.1.3 дерево возможных цен акции. Справа от каждой вершины (которые пронумеруем двумя индексами, первый индекс означает номер периода, а второй — номер возможного значения цены акции) на сером фоне укажем цену акции, а рядом с ней белыми цифрами на черном фоне напишем величину дохода, который можно получить, исполнив опцион немедленно. Например, если акция стоит 47 руб. 22 коп. (в вершине 34), то немедленное исполнение американского опциона покупателя принесет доход 7 руб. 22 коп., а если акция стоит 38 руб. 68 коп. (в вершине 33), то немедленное исполнение опциона невыгодно совершенно (он не принесет дохода вообще).

Предположим, что изменение цены акции привело к достижению вершины 34 (когда акция стоит 47 руб. 22 коп.). Если исполнить опцион немедленно, то можно получить доход в размере 7 руб. 22 коп., если же подождать, как будут развиваться события дальше, то возможны два варианта:

- либо цена акции увеличится до 52 руб. 18 коп. (с вероятностью 0,595), и тогда держатель опциона получит доход в размере 12 руб. 18 коп.,
- либо цена акции понизится до 42 руб. 74 коп. (с вероятность 0,405), и тогда держатель опциона получит доход в размере 2 руб. 74 коп.

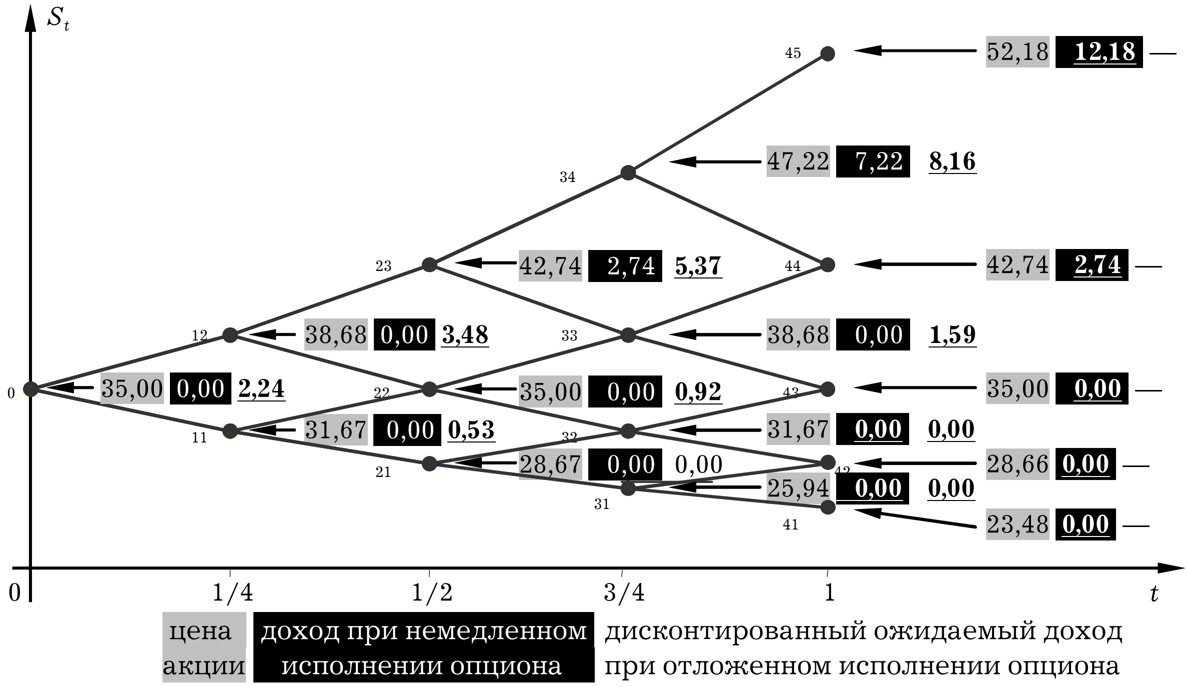


Рис. 20.1.3. *Управление процессом владения американским опционом покупателя*

Ожидаемый доход от исполнения опциона в будущем равен

$$12{,}18 \cdot 0{,}595 + 2{,}74 \cdot 0{,}405 = 8{,}36.$$

Поскольку этот доход будут получен только через один период, дисконтируем его на четверть года — для сравнения с доходом от немедленного исполнения опциона:

$$\frac{8{,}36}{(1+0{,}1)^{1/4}} = \frac{8{,}36}{1{,}024} = 8{,}16.$$

Аналогично вычислим ожидаемый доход от исполнения опциона во всех остальных вершинах дерева цен, двигаясь от конечного момента к начальному [см. рис. 20.1.3, на котором ожидаемые доходы от исполнения опциона в будущем изображены черным по белому справа от (бело-черных) доходов от немедленного исполнения опциона]. Выделим жирным и подчеркнем лучшее из двух: немедленное получение дохода или ожидание.

Окончательно получаем, что

$$\mathbb{C}_1^{(\text{амер.})} = \frac{3{,}48 \cdot 0{,}595 + 0{,}53 \cdot 0{,}405}{1{,}024} = 2{,}24 \text{ руб.} \text{ —}$$

действительно, оказалось невыгодно досрочное исполнение американского опциона покупателя, и его рациональная стоимость совпала с рациональной стоимостью аналогичного европейского опциона покупателя. ❑

В следующем примере разберем определение рациональной стоимости американского опциона продавца, который, как мы увидим, исполнять досрочно выгодно.

Пример 20.1.5. Определить рациональную стоимость американского опциона продавца с терминальной стоимостью $X = 40$ руб. и сроком исполнения 1 год, выписанного на акцию из условия примера 20.1.1.

Решение. Изобразим на рис. 20.1.4 дерево возможных цен акции. Справа от каждой вершины на сером фоне укажем цену акции, а рядом с ней белыми цифрами на черном фоне напишем величину дохода, который можно получить, исполнив опцион немедленно. Например, если акция стоит 47 руб. 22 коп. (в вершине 34), то немедленное исполнение опциона невыгодно совершенно (он не принесет дохода вообще), а если акция стоит 38 руб. 68 коп. (в вершине 33), то немедленное исполнение американского опциона продавца принесет доход 1 руб. 32 коп.

Предположим, что изменение цены акции привело к достижению вершины 33 (когда акция стоит 38 руб. 68 коп.). Если исполнить опцион немедленно, то будет получен доход 1 руб. 32 коп., если же подождать, как будут развиваться события дальше, то возможны два варианта:

- либо цена акции увеличится до 42 руб. 74 коп. (с вероятностью 0,595), и тогда держатель опциона никакого дохода не получит,
- либо цена акции понизится до 35 руб. 00 коп. (с вероятность 0,405), и тогда держатель опциона получит доход в размере 5 руб. 00 коп.

Ожидаемый доход от исполнения опциона в будущем равен

$$0{,}00 \cdot 0{,}595 + 5{,}00 \cdot 0{,}405 = 2{,}03.$$

Поскольку этот доход будет получен только через один период, дисконтируем его на четверть года — для сравнения с доходом от немедленного исполнения опциона:

$$\frac{2{,}03}{(1+0{,}1)^{1/4}} = \frac{2{,}03}{1{,}024} = 1{,}98.$$

Аналогично вычислим ожидаемый доход от исполнения опциона во всех остальных вершинах дерева цен, двигаясь от конечного момента к начальному [см. рис. 20.1.4, на котором ожидаемые доходы от исполнения опциона в будущем изображены черным по белому справа от (бело-черных) доходов от немедленного исполнения опциона].

Выделим жирным и подчеркнем лучшее из двух: немедленное получение дохода или ожидание. Видим, что в отличие от американского опциона покупателя американский опцион продавца бывает выгодно исполнить заранее.

Окончательно получаем, что немедленное исполнение опциона в начальный момент времени (в вершине 0) принесет доход в размере 5 руб. 00 коп., при этом дисконтированный ожидаемый доход от исполнения опциона в будущем составляет

$$\frac{2{,}43 \cdot 0{,}595 + 8{,}33 \cdot 0{,}405}{1{,}024} = 4{,}71,$$

поэтому рациональная стоимость американского опциона продавца равна

$$\mathbb{P}_1^{(\text{амер.})} = \max\{5{,}00; 4{,}71\} = 5 \text{ руб. } 00 \text{ коп.} —$$

она, действительно, оказалась выше рациональной стоимости аналогичного европейского опциона. ❑

Заметим, что нет ничего необычного в том, что рациональная стоимость какого-либо финансового инструмента оказалась равной нулю: это просто означает, что такой инструмент рациональному инвестору в принципе покупать не следует.

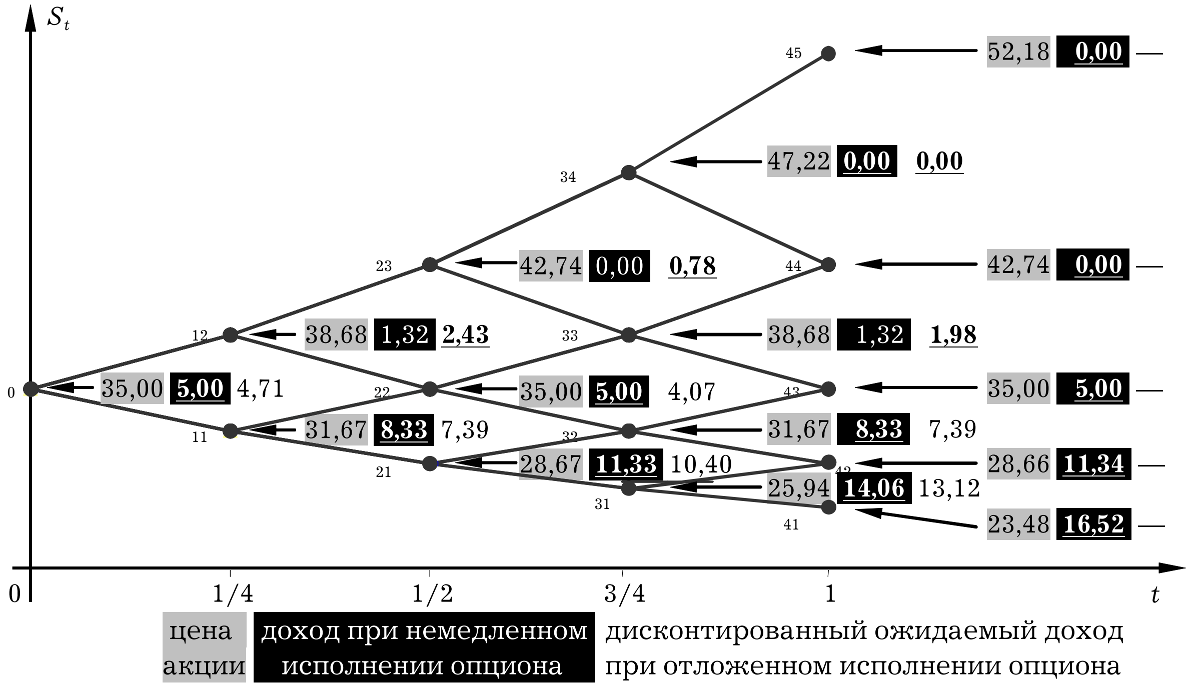


Рис. 20.1.4. *Управление процессом владения американским опционом продавца*

20.2. Задание практикума

Найти рациональные стоимости опционов европейских и американских покупателя и продавца с терминальной стоимостью X руб. и сроком исполнения 1 год, выписанных на акцию, текущая цена которой равна S_0 руб., если известно, что годовая безрисковая процентная ставка составляет $i = 10\%$, а год разбивается на четыре периода, в каждом из которых акция может возрасти в цене или упасть в цене в u раз (параметры X, S_0 и u приводятся для каждого варианта в табл. 20.2.1).

Таблица 20.2.1

№ вар.	Исходные данные			№ вар.	Исходные данные			№ вар.	Исходные данные		
	X	S_0	u		X	S_0	u		X	S_0	u
1	120	80	1,06	13	120	80	1,19	25	120	90	1,13
2	110	80	1,07	14	110	80	1,20	26	110	90	1,14
3	120	80	1,08	15	120	80	1,21	27	120	90	1,15
4	110	80	1,09	16	120	80	1,22	28	110	90	1,16
5	120	80	1,11	17	110	80	1,23	29	120	90	1,17
6	110	80	1,12	18	120	80	1,24	30	110	90	1,18
7	120	80	1,13	19	120	90	1,06	31	120	90	1,19
8	110	80	1,14	20	110	90	1,07	32	110	90	1,20
9	120	80	1,15	21	120	90	1,08	33	120	90	1,21
10	110	80	1,16	22	110	90	1,09	34	120	90	1,22
11	120	80	1,17	23	120	90	1,11	35	110	90	1,23
12	110	80	1,18	24	110	90	1,12				

Рекомендуемая литература

Основная

1. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / В. А. Колемаев, В. И. Соловьев, В. И. Малыхин и др. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.
2. *Карандаев И. С., Малыхин В. И., Соловьев В. И.* Прикладная математика; Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2001.
3. *Колемаев В. А.* Математическая экономика: Учебник. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
4. *Малыхин В. И.* Математическое моделирование экономики: Учебно-практическое пособие. – М.: Издательство УРАО, 2002.

Дополнительная

5. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
6. *Афанасьев М. Ю., Суворов Б. П.* Исследование операций в экономике. – М.: ИНФРА-М, 2003.
7. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.
8. *Ашманов С. А.* Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.
9. *Ашманов С. А., Тимохов А. В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.
10. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. – М.: Факториал, 2002.
11. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972.
12. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: Задачи, принципы, методология. – М.: Высшая школа, 2001.
13. *Зайцев М. Г.* Методы оптимизации управления для менеджеров: Компьютерно-ориентированный подход. – М.: Дело, 2002..
14. *Карандаев И. С.* Решение двойственных задач в оптимальном планировании. – М.: Статистика, 1976.
15. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. – М.: Физматлит, 2004.
16. *Кузнецов А. В., Сакович В. А., Холод Н. И.* Высшая математика: Математическое программирование. – Минск: Вышэйшая школа, 2001.
17. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. – М: Высшая школа, 1980.
18. *Малыхин В. И.* Финансовая математика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
19. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев, Т. П. Барановская. – М.: Финансы и статистика, 2001.
20. *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978.
21. *Морозов В. В., Сухарев А. Г., Федоров В. В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 1986.
22. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод и др. – Минск: Вышэйшая школа, 2001.
23. *Соловьев В. И.* Математические методы управления рисками. – М.: ГУУ, 2003.
24. *Соловьев В. И.* Математическое моделирование инструментов управления инновационными рисками в рыночной инфраструктуре. – М.: ИПР РАН, 2006.
25. *Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В.* Математика в экономике: В 2-х ч. Ч. 1. – М.: Финансы и статистика, 1998.
26. *Таха Х.* Введение в исследование операций. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.

Содержание