1. Математическое моделирование

В рамках исследования операций рассматриваются задачи поиска оптимальных решений. Это подразумевает возможность выбора управляющих воздействий (значений переменных), приводящих к достижению поставленной цели.

Процесс решения проблемы методами исследования операций включает такие этапы, как:

– уяснение содержательной постановки задачи;

– построение математической модели (формализация основных аспектов задачи);

– поиск оптимального решения.

Настоящая глава посвящена математическому моделированию – процессу перехода от содержательной постановки к математической задаче.

Пример 1.1. Рассмотрим завод, который способен производить изделия из данного перечня. Для изготовления конкретного изделия необходимо определенное количество различных ресурсов. Объемы ресурсов ограничены. Известны стоимость единицы каждого ресурса, цена реализации изделия и мощность предприятия, т. е. максимальное число изделий, которое может быть произведено в течение рабочего дня.

Требуется найти план производства (количество выпускаемых заводом изделий каждого типа), который максимизирует прибыль от продажи изделий.

Постановка. Пусть выпускаются изделия типа $i = 1, \dots, n$, и используются ресурсы типа $j = 1, \dots, m$. Мощность завода обозначим через M. На изготовление одного изделия i-го типа завод использует a_{ij} единиц ресурса j-го типа, его общий объем равен A_j. Затраты на приобретение единицы ресурса j для изготовления изделия типа i равны d_{ij}. Пусть c_i – цена одного изделия i-го типа, а переменная x_i – количество таких изделий, выпускаемых заводом.

Требуется найти объем выпускаемых заводом изделий, т. е. значения переменных $x_1, \dots, x_n$, при которых прибыль завода максимальна.

Начнем запись математической модели с формализации цели. Для этого запишем *функционал* (*целевую функцию*), который выражает прибыль завода. Прибыль завода – это сумма реализации произведенной продукции ($\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$) за вычетом затрат на использованные ресурсы ($\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} d_{ij} x_i$). Следовательно, критерий задачи запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} d_{ij} x_i \to \max_{\{x_i\}},$$

где стрелкой показана цель – максимизация, а под максимумом указаны переменные, выбором значений которых он достигается. (Для представления критерия наряду с формой $f(x) \to \max_{x \in D}$ используется эквивалентная запись $\max_{x \in D} f(x)$.)

В допустимом решении переменные задачи должны удовлетворять ограничениям на объем используемых ресурсов $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le A_j$, а также ограничениям на мощность производства $\sum_{i=1}^{n} x_i \le M$.

Следовательно, математическая модель рассматриваемой задачи может быть записана в виде

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} d_{ij} x_i \to \max_{\{x_i\}};$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le A_j, j = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le M;$$

$$x_i \in Z_+, i = 1, \dots, n,$$

где Z_+ – множество неотрицательных целых чисел.

В данном примере функция цели, а также ограничения, описывающие область допустимости, выписываются однозначно. Этого нельзя сказать о следующем примере.

Пример 1.2. Рассмотрим коммуникационную сеть, состоящую из сервера и связанных с ним пользователей (дерево-звезда с сервером в корне). Для каждой упорядоченной пары пользователей известен объем информации, которую первый пользователь должен передать второму. Передача информации от одного пользователя к другому осуществляется через сервер. Все линии связи имеют одинаковую пропускную способность. Сервер может действовать двумя способами:

1) осуществлять прямое соединение пользователей, тогда единица информации, равная пропускной способности, достигнет адресата за единицу времени;

2) получить информацию от отправителя, запомнить ее и позже передать адресату. В этом случае процесс передачи информации в объеме пропускной способности займет две единицы времени (без учета времени хранения).

Предполагается, что линия связи может быть загружена одновременно лишь одним пользователем. Отсюда следует, что в каждый момент времени пользователь может быть связан (т. е. может передавать или получать информацию) не более чем с одним другим пользователем.

Требуется так составить расписание «общения» пользователей между собой (определить какой пользователь и кому должен передавать информацию в каждый момент времени), чтобы общее время, необходимое для передачи всей информации, было минимально.

Постановка. Для формализации задачи введем параметры и переменные, которые свяжем условиями, что позволит задать допустимую область и записать критерий.

Пусть I – множество пользователей, параметры $d_{ij} \geq 0$ соответствуют объему информации, которую необходимо передать от пользователя $i \in I$ пользователю $j \in I$, а d – пропускная способность линии связи (объем информации, которую можно передать за единицу времени).

Обозначим через T переменную, соответствующую длительности передачи всей информации, а через $x_{ij}^t \in \{0,1\}$ – переменные, определяющие расписание. Переменная $x_{ij}^t = 1$, если в момент $t = 1, \ldots, T$ пользователь $i \in I$ передает данные пользователю $j \in I$, и $x_{ij}^t = 0$ в противном случае.

Заметим, что когда все линии связи имеют одинаковую пропускную способность d, от величин d_{ij} можно перейти к величинам $\tau_{ij} = \left]\dfrac{d_{ij}}{d}\right[$, которые определяют необходимое количество единиц времени передачи данных из i в j.

Сначала рассмотрим ситуацию, когда сервер способен осуществлять лишь первый тип соединения (без хранения / запоминания информации). Тогда критерий может быть записан в виде $T \to \min\limits_{\{x_{ij}^t\}}$, требование на передачу всей информации из i в j примет вид $\sum\limits_{t=1}^{T} x_{ij}^t = \tau_{ij}$, а требования на допустимость соединений запишутся как

$$\sum_{j\in I} x_{ij}^{t} + \sum_{k\in I} x_{ki}^{t} \le 1,\ i\in I.$$

Таким образом, для рассматриваемой проблемы получена следующая математическая модель:

$$T \to \min_{\{x_{ij}^t\}}; \tag{1.1}$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{ij}^{t} = \tau_{ij},\ i,j\in I; \tag{1.2}$$

$$\sum_{j\in I} x_{ij}^{t} + \sum_{k\in I} x_{ki}^{t} \le 1,\ t = 1,\ \ldots,\ T,\ i \in I; \tag{1.3}$$

$$x_{ij}^{t} \in \{0,1\},\ t = 1,\ \ldots,\ T,\ i,j \in I. \tag{1.4}$$

Задача (1.1)–(1.4) является нелинейной задачей дискретного (булевого) программирования и решается достаточно сложно, поэтому построенная модель представляется не совсем удачной.

Попробуем взглянуть на проблему иначе. Каждому пользователю поставим в соответствие вершину ориентированного мультиграфа $G = (V, E)$, в котором из вершины $i \in V$ в вершину $j \in V$ идет τ_{ij} дуг (кратность мультидуги (i,j) равна количеству единиц времени, необходимых для передачи всей нужной информации из i в j). Сформулируем задачу реберной раскраски графа.

Задача реберной раскраски графа. *Реберной раскраской* графа называется отображение $f: E \to Z_+$, которое каждому ребру ставит в соответствие натуральное число – номер краски. Раскраска ребер называется *правильной*, если ребра, инцидентные одной вершине, имеют разные цвета. Задача реберной раскраски графа состоит в правильной раскраске ребер *минимальным* количеством цветов.

Составление расписания передачи данных означает, что каждой дуге e графа G должен быть поставлен в соответствие момент времени $f(e) \in \{1,\ \ldots,\ T\}$, когда по ней будет передаваться информация. При этом для любых дуг e_1, e_2, инцидентных одной вершине, должно выполняться неравенство $f(e_1) \ne f(e_2)$. Требуется минимизировать T.

Очевидно, если словосочетание «момент времени» заменить словом «цвет», то получим задачу реберной раскраски графа (искомое T есть хроматический индекс мультиграфа G). Эта задача NP-трудна (см. гл. 2), но в то же время хорошо изучена. В частности, В. Г. Визинг предложил полиномиальный приближенный алгоритм, строящий решение, близкое к оптимальному. Более того, постановка проблемы как задачи раскраски позволяет учесть второй способ передачи информации (с хранением на сервере). Действительно, пусть $e = (i,j) \in E$ – дуга графа, а $f(e)$ – ее цвет. Будем считать, что $f(e) = a$, если в момент времени a сервер осуществляет соединение $i \to j$ напрямую (первым способом), и $f(e) = (a,b)$, если в момент времени a сервер получает единицу данных от пользователя i, а в момент времени b передает пользователю j (второй способ передачи). Обозначение $f(e) = (a,b)$ следует понимать так: дуга e разбита на две части (*инцидентора*) и та ее часть, которая инцидентна вершине i, окрашена в цвет a, а другая – в цвет b. Такую раскраску называют *смешанной*, или *раскраской инциденторов*. Для построения допустимого расписания в случае $f(e) = (a,b)$ достаточно потребовать выполнения условия $a < b$.

А. В. Пяткин показал, что задача раскраски инциденторов полиномиально разрешима. На рис. 1.1 показан случай простой реберной раскраски, требующий трех красок (*а*) и смешанной раскраски, для которой достаточно двух красок (*б*).

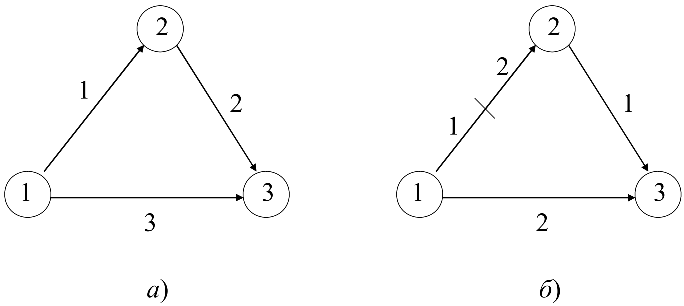

Рис. 1.1.

Приведенный пример показывает, как важно построить «хорошую» математическую модель рассматриваемой проблемы.

В первой постановке мы использовали математические выражения, позволяющие выразить связь переменных и параметров, а также условия задачи. Вторая постановка является *комбинаторной*.

В общем случае задачи комбинаторной (дискретной) оптимизации будем записывать в виде

$$\min_{S\subseteq N}\{\sum_{j\in S} c_j : S\in F\},$$

где $N = \{1, ..., n\}$, $c_j \in R$, $j \in N$ и F – множество подмножеств N.

Приведем еще несколько примеров построения математических моделей.

Пример 1.3 (задача о назначениях). Имеется n исполнителей и n работ. Каждый исполнитель может выполнить ровно одну работу, и каждая работа выполняется одним исполнителем. Пусть c_{ij} – затраты, связанные с назначением исполнителя i на работу j. Требуется найти назначение всех исполнителей, имеющее минимальные суммарные затраты.

Постановка. Введем переменные $x_{ij} = 1$, если исполнитель i назначен на работу j, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Запишем ограничения. Каждый исполнитель выполняет одну работу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, ..., m.$$

Любая работа выполняется одним исполнителем:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, ..., m.$$

Целевая функция (или функция цели) имеет вид

$$\min_{\{x_{ij}\}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Пример 1.4 (задача о покрытии). Задан список районов. Нужно определить, где разместить противопожарные станции. Для каждого возможного места размещения станции известны связанные с этим затраты, а также множество районов, которые может обслуживать станция (оно определяется по времени прибытия пожарной бригады). Требуется выбрать места создания станций, чтобы все районы были «покрыты» и затраты на размещение станций минимальны.

Постановка. Сначала приведем комбинаторную постановку задачи. Пусть $M = \{1, ..., m\}$ – множество районов, $N = \{1, ..., n\}$ – множество мест возможного размещения станций и $S_j \subseteq M$ – множество районов, которые может обслуживать станция, размещенная в пункте $j \in N$, c_j – стоимость размещения станции в пункте j. Получаем задачу

$$\min_{T\subseteq N}\{\sum_{j\in T} c_j : \bigcup_{j\in T} S_j = M\}.$$

Запишем формулировку проблемы в виде задачи булевого программирования. Для этого введем матрицу инциденции A, элементы которой $a_{ij} = 1$, если $i \in S_j$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Переменные $x_j = 1$, если станция размещена в пункте j, и $x_j = 0$ в противном случае. Условия необходимости обслуживания каждого района запишем в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, i = 1, ..., m.$$

Целевая функция (функционал):

$$\min_{\{x_j\}} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Упражнения

Осуществить математическую постановку следующих задач.

1. В банк за кредитом обратилось m клиентов, каждый из которых просит сумму a_i, $i = 1, ..., m$. От сделки с i-м клиентом банк ожидает получить доход c_i. Банк имеет сумму A, которую он может потратить на кредиты и должен обслуживать не менее n и не более N клиентов. Требуется определить, каким клиентам следует дать кредит, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль.

2. Пусть I – множество пунктов возможного размещения производства некоторой продукции, а J – множество потребителей этой продукции. Каждому потребителю продукция может поставляться только от одного производителя. Затраты на открытие производства в i-м пункте характеризуют величины c_i, а затраты на обслуживание j-го потребителя i-м производителем – c_{ij}. Требуется определить, в каких пунктах открывать производство и осуществить привязку потребителей к открытым пунктам производства, чтобы суммарные затраты были минимальны.

3. Ресторан работает всю неделю кроме понедельника и вторника. Известно, что в i-й день недели потребуется s_i чистых салфеток. Всего имеется N салфеток, и утром во вторник все они чистые. По окончании рабочего дня все использованные салфетки отдаются в стирку, которая может быть *обычной* или *срочной*. В обычной стирке салфетка находится весь следующий день. Срочная стирка происходит ночью, и на следующий день салфетка может быть использована. Стоимость обычной стирки – c_o, срочной – c_c. В конце каждого рабочего дня требуется определить, сколько грязных салфеток отдавать в обычную, а сколько в срочную стирку, чтобы их хватило на следующий день, а суммарные затраты на стирку в течение недели были минимальны.

4. Имеется 10 деревянных брусков длиной 2,7 м и 20 брусков длиной 3,5 м. Из этих брусков путем их распила делаются заготовки для оконных рам формы, указанной на рис. 1.2. На одну раму уходит три метровые и две

полутораметровые заготовки. Требуется определить, как распилить имеющиеся бруски, чтобы из них получилось максимальное количество рам.

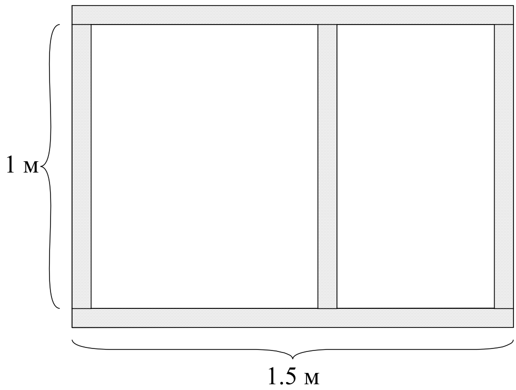

Рис. 1.2

5. Спелеолог в пещере нашел сундук с драгоценными изделиями. Каждое изделие i, находящееся в сундуке, имеет ценность $c_i \geq 0$ и вес $w_i \geq 0$. Суммарный вес груза, который спелеолог может вынести из пещеры, ограничен величиной Q. Требуется определить, какие предметы взять, чтобы у спелеолога хватило сил вынести их из пещеры, и ценность взятых предметов была максимальна.

6. Задача о пищевом рационе [4]. Имеется четыре вида продуктов питания. Известна стоимость единицы каждого продукта. Из этих продуктов необходимо составить пищевой рацион, который должен содержать:

– белков не менее b_1 единиц;

– углеводов не менее b_2 единиц;

– жиров не менее b_3 единиц.

Единица продукта i содержит a_{i1} единиц белков, a_{i2} единиц углеводов и a_{i3} единиц жиров.

Требуется так составить пищевой рацион, чтобы обеспечить заданные условия по белкам, углеводам и жирам при минимальной стоимости рациона.

7. Пусть I – множество исполнителей, $J \subseteq I$ – множество работ, t_{ij} – время выполнения, а c_{ij} – стоимость выполнения j-й работы i-м исполнителем. Требуется назначить на каждую работу по одному исполнителю, при этом каждый исполнитель может выполнить не более одной работы, чтобы мак-

симальное время выполнения всех работ было минимально, а стоимость не превышала заданной величины S.

8. Набор высоты и скорости [4]. Пусть самолет находится на высоте H_0 и летит со скоростью V_0. Необходимо поднять самолет на высоту $H_к$ и увеличить его скорость до $V_к$. Предположим, что процесс увеличения высоты и скорости происходит ступенчато. То есть единовременно увеличивается либо высота на величину ΔH, либо скорость на величину ΔV. Будем считать, что на увеличение высоты от величины H до величины $H + \Delta H$ расходуется известное количество горючего, и на увеличение скорости от величины V до величины $V + \Delta V$ расходуется также известное количество горючего, для всех $H \in [H_0, H_к - \Delta H]$, $V \in [V_0, V_к - \Delta V]$. Требуется определить режим набора высоты и скорости до заданных величин, истратив минимальное количество горючего.

9. Рассмотрим период в n дней. Пусть известен спрос d_t на некоторый продукт в каждый день $t = 1, ..., n$. Поставщик продукта имеет производство и склад готовой продукции. Производство может быть начато и остановлено в любой день (в случае остановки как минимум день продукция не производится) и его запуск (после остановки) в начале дня t связан с затратами f_t. Стоимость выпуска единицы продукта в день t равна p_t, а стоимость хранения единицы продукции в течение дня t равна h_t. Предположим, что в начале первого дня на складе находится s_0 единиц готовой продукции. Требуется составить оптимальный план производства на n дней, чтобы удовлетворить потребности каждого дня и минимизировать связанные с этим затраты.