6. Потоки в сетях

В данном разделе *сеть* – это связный ориентированный граф $G = (V, E)$ без петель и мультидуг с одним источником s и одним стоком t, в котором каждой дуге $(i, j) \in E$ приписана пропускная способность $b_{ij} \geq 0$.

Потоком из источника s в сток t (или *s-t-потоком*) в сети G назовем множество неотрицательных чисел x_{ij}, $(i, j) \in E$, удовлетворяющих *условиям сохранения потока*

$$\sum_{i:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{k:(j,k)\in E} x_{jk} = \begin{cases} -v, & j = s; \\ 0, & j \neq s, t; \\ v, & j = t \end{cases}$$

и ограничениям на дуговые потоки

$$0 \leq x_{ij} \leq b_{ij},\ (i,j) \in E,$$

где переменная v – общая величина потока.

6.1. Нахождение максимального потока

Задачу нахождения потока максимальной мощности (максимального потока) можно записать в виде

$$v = \sum_{j:(s,j)\in E} x_{sj} \to \max_x; \tag{6.1}$$

$$\sum_{i:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{k:(j,k)\in E} x_{jk} = \begin{cases} -v, & j = s; \\ 0, & j \neq s, t; \\ v, & j = t; \end{cases} \tag{6.2}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq b_{ij},\ (i,j) \in E. \tag{6.3}$$

С задачей (6.1)–(6.3) связано следующее понятие.

Определение 6.1. Пусть множества X и $\overline{X}$ есть разбиение V. *Разрезом* $(X, \overline{X})$ сети называется множество дуг $\{(i, j) \in E\}$, для которых:

– $i \in X, j \in \overline{X}$ или
– $i \in \overline{X}, j \in X$.

Нас будут интересовать разрезы, разделяющие узлы s и t, которые назовем *s-t-разрезами*. Будем предполагать при этом, что $s \in X$, а $t \in \overline{X}$.

Определение 6.2. *Пропускной способностью разреза* $(X,\overline{X})$ назовем величину $C(X,\overline{X}) = \sum\limits_{i\in X,\, j\in\overline{X}} b_{ij}$.

Очевидно, в общем случае $C(X,\overline{X}) \neq C(\overline{X}, X)$.

Заметим, что s-t-разрез является *узким местом* сети. Из (6.2) и (6.3) следует, что величина потока v не может превосходить пропускную способность любого s-t-разреза, т. е. $v \le C(X,\overline{X})$, $s \in X$, $t \in \overline{X}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1 (Форда–Фалкерсона). В любой сети величина максимального s-t-потока равна пропускной способности минимального s-t-разреза.

Обозначим s-t-поток через F_{st} – это множество неотрицательных чисел $\{x_{ij}\}$, удовлетворяющих условиям (6.2) и (6.3).

Определение 6.3. Пусть P – некоторый путь, по которому идет положительный поток из источника в сток. Дуга $(i, j) \in P$ является *прямой* дугой пути P, если направление потока в пути совпадает с ее ориентацией. Все другие дуги пути назовем *обратными*. Будем называть путь из s в t *увеличивающим* поток F_{st}, если $x_{ij} < b_{ij}$ на всех прямых дугах и $x_{ji} > 0$ на всех обратных дугах этого пути.

Следствие 6.1. Поток F_{st} максимален только тогда, когда не существует пути, увеличивающего поток F_{st}.

Пусть в дальнейшем пропускные способности дуг и, следовательно, величина потока – целые неотрицательные числа. Приведем алгоритм построения максимального потока, который часто называют *алгоритмом расстановки пометок Форда–Фалкерсона*.

Во время работы алгоритма каждый узел может находится в одном из трех состояний:

– не помечен;

– помечен;

– помечен и просмотрен.

Шаг 1 (расстановка пометок). Вначале все узлы не помечены. Метка узла j состоит из двух частей:

1) индекса i^+, если можно увеличить поток из i в j, или индекса i^-, если можно уменьшить обратный поток из j в i;

2) числа $\varepsilon(j)$, указывающего максимальную величину потока, которую можно послать из источника s в j, не нарушая ограничений на пропускные способности.

Сначала источник s получает метку $[s^+, \varepsilon(s)=\infty]$. Теперь вершина s помечена, а все остальные узлы не помечены.

Выберем любой помеченный, но не просмотренный узел j. Пусть он имеет метку $[i^+, \varepsilon(j)]$ или $[i^-, \varepsilon(j)]$. Каждому непомеченному узлу k, смежному с j, для которого $x_{jk} < b_{jk}$, припишем метку $[j^+, \varepsilon(k)]$, где $\varepsilon(k) = \min\{\varepsilon(j), b_{jk} - x_{jk}\}$. Такие вершины k теперь помечены. Всем смежным с j непомеченным вершинам k, для которых $x_{kj} > 0$, припишем метки $[j^-, \varepsilon(k)]$, где $\varepsilon(k) = \min\{\varepsilon(j), x_{kj}\}$. Такие вершины k теперь также помечены.

Когда все смежные с j узлы получили пометки, вершина j считается помеченой и просмотренной.

Рассмотрим другие помеченные, но не просмотренные узлы и повторим процедуру расстановки пометок, пока t не окажется помеченным, либо нельзя больше пометить ни одну вершину, и сток t остался не помечен. В последнем случае не существует пути из s в t, увеличивающего поток, т. е. текущий поток максимален.

Если узел t помечен, то на шаге 2 найдется путь, по которому будет увеличен поток.

Шаг 2 (увеличение потока). Если сток t имеет пометку $[k^+, \varepsilon(t)]$, то положим $x_{kt} = x_{kt} + \varepsilon(t)$. Если t имеет пометку $[k^-, \varepsilon(t)]$, то положим $x_{tk} = x_{tk} - \varepsilon(t)$. Перейдем к узлу k.

Если k имеет пометку $[j^+, \varepsilon(k)]$, то положим $x_{jk} = x_{jk} + \varepsilon(t)$. Если k имеет пометку $[j^-, \varepsilon(k)]$, то положим $x_{kj} = x_{kj} - \varepsilon(t)$. Переходим к узлу j.

Продолжим этот процесс, пока не достигнем вершины s. Сотрем все пометки и перейдем на шаг 1.

В момент завершения работы алгоритма (на шаге 1) множество помеченных вершин X таково, что дуги (i, j), $i \in X$, $j \in \overline{X}$ насыщены, т. е. $x_{ij} = b_{ij}$, и нет обратных дуг (j, i), для которых $x_{ji} > 0$. Следовательно, $(X, \overline{X})$ является минимальным разрезом, а полученный поток максимален.

Пример 6.1. На рис. 6.1 приведена сеть, где рядом с каждой дугой указаны два числа – пропускная способность и поток по дуге. Воспользуемся алгоритмом расстановки пометок для нахождения максимального s-t-потока.

Шаг 1. Припишем узлу s метку $[s^+, \infty]$. Узел s имеет две смежные вершины 1 и 2. Пометить 1 нельзя, так как дуга $(s, 1)$ насыщена и нет дугового потока $x_{1s} > 0$. Узлу 2 приписываем метку $[s^+, 1]$, поскольку $\varepsilon(2) = \min\{\varepsilon(s), b_{s2} - x_{s2}\} = \min\{\infty, 1\} = 1$. Теперь узел s просмотрен, а 2 – помечен.

Узел 2 имеет две непомеченные смежные вершины 1 и t. Вершина t не может быть помечена (дуга $(2, t)$ насыщена), а узел 1 получает метку $[2^-,1]$, поскольку $\varepsilon(1) = \min\{\varepsilon(2), x_{12}\} = \min\{1, 1\} = 1$. Теперь узел 2 просмотрен, а 1 – помечен.

У вершины 1 один непомеченный смежный узел t, который получает метку $[1^+, 1]$, поскольку $\varepsilon(t) = \min\{\varepsilon(1), b_{1t} - x_{1t}\} = \min\{1, 3 - 0\} = 1$. На рис. 6.1 указаны метки вершин. Вершина t оказалась помеченной, значит существует увеличивающий путь, который будет найден на шаге 2.

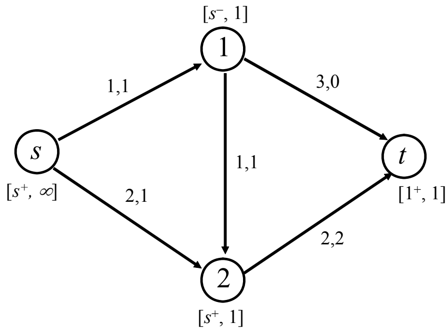

Рис. 6.1

Шаг 2. Узел t имеет метку $[1^+, 1]$. Полагаем $x_{1t} = x_{1t} + 1 = 1$ и переходим к узлу 1, имеющему пометку $[2^-, 1]$. Полагаем $x_{21} = x_{21} - 1 = 0$ и переходим к узлу 2, имеющему пометку $[s^+, 1]$. Полагаем $x_{s2} = x_{s2} + 1 = 2$. Новый поток изображен на рис. 6.2. Вернемся к шагу 1.

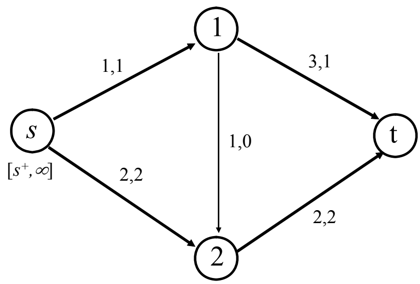

Рис. 6.2

Шаг 1. Припишем узлу s метку $[s^+, \infty]$. Смежные вершины 1 и 2 не могут быть помечены, так как дуги (s, 1) и (s, 2) насыщены. Следовательно, найден поток максимальной мощности (см. рис. 6.2).

6.2. Потоки минимальной стоимости

Пусть дополнительно каждой дуге сети приписан неотрицательный вес c_{ij}, равный стоимости транспортировки единицы потока по дуге $(i, j) \in E$. Задача поиска s-t-потока заданной мощности v и минимальной стоимости имеет вид

$$Z = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij} \to \min_x; \tag{6.4}$$

$$\sum_{i:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{k:(j,k)\in E} x_{jk} = \begin{cases} -v, & j = s; \\ 0, & j \neq s, t; \\ v, & j = t; \end{cases} \tag{6.5}$$

$$0 \le x_{ij} \le b_{ij}, \ (i, j) \in E. \tag{6.6}$$

Приведем два алгоритма решения задачи (6.4)–(6.6).

Алгоритм Басакера–Гоуэна

Шаг 0. Положить все дуговые потоки и, следовательно, величину потока $v = 0$.

Шаг 1. Определить модифицированные дуговые стоимости c_{ij}^*, зависящие от величины найденного потока

$$c_{ij}^* = \begin{cases} c_{ij}, & 0 \le x_{ij} < b_{ij}; \\ +\infty, & x_{ij} = b_{ij}; \\ -c_{ji}, & x_{ji} > 0. \end{cases}$$

Шаг 2. Найти путь из s в t минимальной длины (полагая длину каждой дуги (i, j), равной c_{ij}^*) и увеличить на единицу поток по этому пути. Если величина нового потока равна v, то алгоритм заканчивает работу. В противном случае перейти на шаг 1.

Заметим, что, когда задана *неориентированная* сеть с выделенными источником s и стоком t, ориентация ребер, инцидентных s и t, определяется однозначно. Рассмотрим следующий пример.

Пример 6.2. Неориетированная сеть изображена на рис. 6.3 *а*, где первое число рядом с ребром равно пропускной способности, а второе – стоимости транспортировки единицы потока. Требуется найти поток величины $v = 2$ минимальной стоимости.

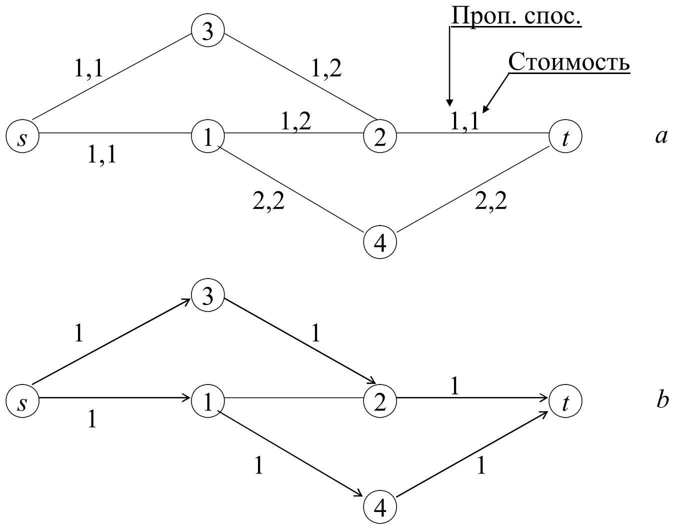

Рис. 6.3

Применим алгоритм Басакера–Гоуэна.

Шаг 0. Полагаем все дуговые потоки $x_{ij} = 0$.

Шаг 1. Определяем модифицированные стоимости $c_{ij}^* = c_{ij}$.

Шаг 2. Находим минимальную по длине (стоимости) цепь из s в t по матрице расстояний $\| c_{ij}^* \|$. Это цепи $\{s, 1, 2, t\}$ и $\{s, 3, 2, t\}$. Возьмем первую из них. Получим $x_{s1} = x_{12} = x_{2t} = 1$. Перейдем на шаг 1.

Шаг 1. Пересчитаем c_{ij}^*

$$c_{s1}^* = \infty, \text{ так как } x_{s1} = b_{s1} = 1;\ c_{1s}^* = -1;$$

$$c_{12}^* = \infty, \text{ так как } x_{12} = b_{12} = 1;\ c_{21}^* = -1;$$

$$c_{2t}^* = \infty, \text{ так как } x_{2t} = b_{2t} = 1;\ c_{t2}^* = -1.$$

Все остальные c_{ij} остаются без изменений.

Шаг 2. Находим цепь из s в t минимальной длины, используя c_{ij}^*. Это $\{s, 3, 2, 1, 4, t\}$, длина которой равна 5. Пропустив единицу потока по этой цепи, получим поток, изображенный на рис. 6.3 *б*. Его величина рана 2. Стоп.

Алгоритм Клейна

Шаг 1. Найти произвольный допустимый s-t-поток величины v. (Это может быть сделано с помощью решения задачи (6.1)–(6.3), в которой нужно увеличивать поток, пока он не станет равным v.)

Шаг 2. Определить модифицированные дуговые стоимости

$$c^*_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & 0 \le x_{ij} < b_{ij}; \\ +\infty, & x_{ij} = b_{ij}; \\ -c_{ji}, & x_{ji} > 0. \end{cases}$$

Шаг 3. Найти в сети цикл отрицательной стоимости. (Процедура нахождения отрицательных циклов описана в замечании 6.1.). Если отрицательного цикла нет, то найденный поток оптимален. Иначе увеличить поток по отрицательному циклу на величину $\delta = \min\{b_{ij} - x_{ij}, x_{ji}\}$, где минимум берется по всем дугам цикла, и перейти на шаг 2. (Если в сети существует несколько отрицательных циклов, то увеличить поток по каждому из них.)

Теорема 6.2. Поток величины v оптимален только тогда, когда в сети с модифицированными дуговыми стоимостями c^*_{ij} не существует отрицательных циклов.

Пример 6.3. Найти поток максимальной мощности минимальной стоимости в сети, изображенной на рис. 6.4, где первое число рядом с каждым ребром равно пропускной способности, а второе – стоимости.

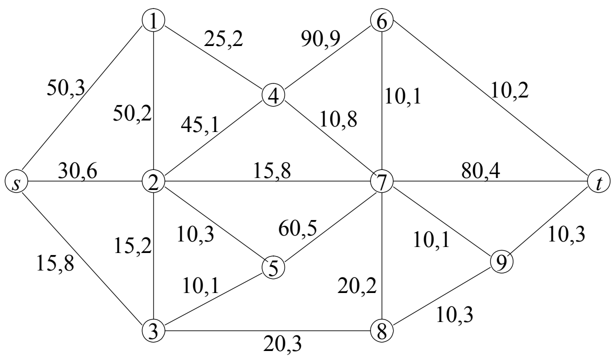

Рис. 6.4

Воспользуемся алгоритмом Клейна.

Шаг 1. Найдем поток максимальной мощности $v = 85$. Он изображен на рис. 6.5, где полужирные линии – дуги минимального разреза.

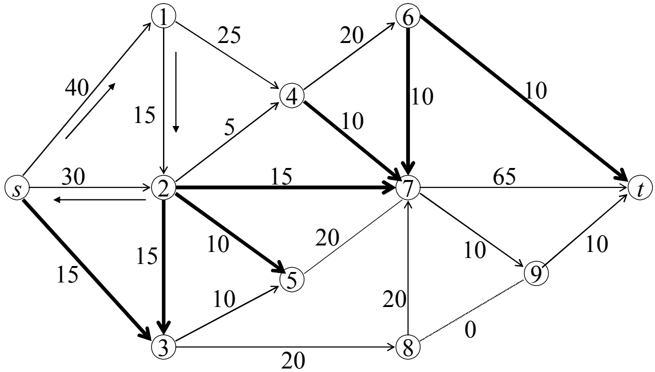

Рис. 6.5

Шаг 2. Определим модифицированные стоимости c^*_{ij}.

Шаг 3. Каждая дуга минимального разреза насыщенная, следовательно, соответствующие $c^*_{ij} = \infty$, и ни одна дуга этого разреза не может войти в отрицательный цикл. Именно поэтому сеть можно разбить на две части и искать отрицательные циклы отдельно в каждой из них.

Модифицированные стоимости c^*_{ij} в левой части помещены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

i / j	s	1	2	4	6
s	∞	3	∞	∞	∞
1	–3	∞	2	∞	∞
2	–6	–2	∞	1	∞
4	∞	–2	–1	∞	9
6	∞	∞	∞	–9	∞

Модифицированные стоимости c_{ij}^{*} в правой части представлены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

i / *j*	3	5	7	8	9	*t*
3	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	–1	∞	5	∞	∞	∞
7	∞	–5	∞	–2	∞	4
8	–3	∞	∞	∞	3	∞
9	∞	∞	–1	3	∞	∞
t	∞	∞	–4	∞	–3	∞

Замечание 6.1. Для нахождения отрицательных циклов можно воспользоваться следующей процедурой.

Пусть (d_{ij}) – матрица расстояний между узлами сети и d_{ij} не обязательно неотрицательные. Рассмотрим следующую *тернарную* (трехместную) операцию:

$$d_{ik} = \min\{d_{ik}, d_{ij} + d_{jk}\}, \ \ i, k \neq j. \tag{6.7}$$

Если выполнять операцию (6.7) последовательно для каждого узла $j = 1, \ldots, n$, то полученные в результате значения d_{ik} будут длинами кратчайших цепей между всеми парами узлов.

Таким образом, если существует i, такое, что $d_{ii} < 0$, то вершина i принадлежит отрицательному циклу.

Если применить тернарную операцию к табл. 6.1, то получим отрицательный цикл {2, s, 1, 2}. Добавив $b_{s1} - x_{s1} = 10$ единиц потока по этому циклу, получим сеть без отрицательных циклов. То есть найден оптимальный поток.

В заключение отметим, что трудоемкость алгоритма Басакера–Гоуэна зависит от величины искомого потока, поэтому данный алгоритм не рекомендуется применять при большой величине потока. В случае $v >> 1$ лучше использовать алгоритм Клейна.

Упражнения

1. Найти все минимальные s–t-разрезы в смешанной сети на рис. 6.6. (Число рядом с каждым ребром / дугой равно его пропускной способности.)

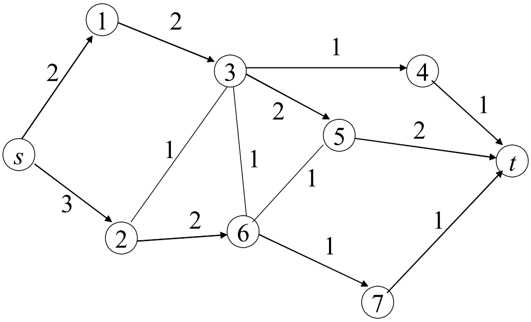

Рис. 6.6

2. Найти максимальный s-t-поток в сети на рис. 6.6.

3. Пусть в сети, изображенной на рис. 6.6, стоимость единичного потока по каждой дуге равна 1, а по каждому ребру – 2. Найти s-t-поток мощностью 3 минимальной стоимости с помощью алгоритма Басакера–Гоуэна.

4. Найти s-t-поток мощностью 2 в сети, изображенной на рис. 6.6, если стоимость единицы потока по ребрам / дугам помещены в следующей таблице:

i / j	*s*	1	2	3	4	5	6	7	*t*
s	–	4	6	–	–	–	–	–	–
1	–	–	–	3	–	–	–	–	–
2	–	–	–	3	–	–	5	–	–
3	–	–	3	–	3	4	1	–	–
4	–	–	–	–	–	–	–	–	8
5	–	–	–	–	–	–	3	–	3
6	–	–	–	1	–	3	–	4	–
7	–	–	–	–	–	–	–	–	4