2. Динамическое программирование

В основе метода лежит идея рассмотрения исходной задачи как представителя семейства сходных с ней задач. Динамическое программирование (ДП) связано с многошаговым (многоэтапным) процессом принятия решений. При этом под многошаговым процессом принятия решений понимается деятельность, при которой принимаются последовательные решения, направленные на достижение одной цели. Методу ДП посвящено множество публикаций, в частности работы [1, 2, 5], в которых достаточно подробно рассмотрена техника решения задач методом динамического программирования.

В данном разделе мы будем изучать метод постепенно по принципу «от простого к сложному». Начнем с распределительной задачи.

2.1. Распределительная задача

Сформулируем распределительную задачу на примере планирования деятельности предприятия на n лет. Пусть предприятие имеет ресурс в размере Y единиц, который оно может вложить в производство в течение n лет. Функции $f_t(x)$ отражают эффективность использования x единиц ресурса в год t. Требуется определить план расхода имеющегося ресурса по годам, чтобы максимизировать суммарную эффективность.

Обозначим через x_t искомую величину ресурса, вкладываемого в развитие производства в год $t = 1, \ldots, n$. Тогда математическая модель может быть записана в виде

$$\sum_{t=1}^{n} f_t(x_t) \to \max_{\{x_t\}}; \tag{2.1}$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_t \le Y; \tag{2.2}$$

$$x_t \ge 0,\ t = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Решение задачи (2.1)–(2.3) будем строить шаг за шагом, оптимизируя на текущем шаге размер инвестиций в год t. Будем предполагать функции $f_t(x)$ неубывающими, что позволяет перейти от исходной задачи к равносильной задаче (2.1), (2.2′), (2.3), в которой неравенство (2.2) заменено равенством

$$\sum_{t=1}^{n} x_t = Y. \qquad (2.2')$$

Для задачи (2.1), (2.2′), (2.3) используем обозначение <*n, Y*>. Кроме того, обозначим:

– S^* – оптимальное значение целевой функции (2.1);

– $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ – оптимальное решение рассматриваемой задачи, т. е. $S^* = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k^*)$);

– $y_k^* = \sum_{i=1}^{k} x_i^*$ – оптимальное вложение ресурса за k первых лет, $k = 1, \ldots, n$.

Далее воспользуемся терминологией и обозначениями из [2]. Наряду с исходной задачей <*n, Y*> рассмотрим семейство задач $\pi = \{<k, y>: k = 1, \ldots, n; 0 \le y \le Y\}$. Пусть $S_k(y)$ – оптимальное значение целевой функции задачи <*k, y*>, тогда $S^* = S_n(Y)$.

Теорема 2.1. Для задачи (2.1), (2.2′), (2.3) справедливы следующие рекуррентные соотношения ДП:

$$S_1(y) = f_1(y),\ 0 \le y \le Y; \qquad (2.4)$$

$$S_k(y) = \max_{0 \le x \le y} [\, S_{k-1}(y - x) + f_k(x)],\ k = 2, \ldots, n;\ 0 \le y \le Y. \qquad (2.5)$$

Значение переменной x, при котором достигается максимум в (2.5), обозначим через $x_k(y)$ и назовем *условно-оптимальным решением*.

Следствие 2.1. Условно-оптимальное решение $x_k(y_k^*)$ является оптимальным значением k-й компоненты вектора x^* исходной задачи <*n, Y*>, т. е. $x_k^* = x_k(y_k^*)$, $k = 1, \ldots, n$.

Алгоритм ДП состоит из *прямого хода* (процесса последовательного вычисления величин $S_k(y)$, $k = 1, \ldots, n$; $0 \le y \le Y$) и *обратного хода* (восстановления оптимального решения). На последнем шаге прямого хода получаем оптимальное значение последней переменной $x_n^* = x_n(Y)$. Пусть уже найдены оптимальные значения $x_n^*, \ldots, x_{k+1}^*$. Тогда $x_k^* = x_k(y_k^*)$, где $y_k^* = y_{k+1}^* - x_{k+1}^*$.

Схема (2.4), (2.5), как правило, требует численного расчета, но иногда удается получить выражение функций $S_k(y)$ в аналитическом виде.

Пример 2.1. Рассмотрим метод ДП для задачи (2.1)–(2.3) с функциями $f_i(x_i) = \dfrac{x_i^2}{c_i}$, где $c_i > 0$ и $i = 1, \ldots, n$.

Прямой ход. На первом шаге получаем $S_1(y) = \dfrac{y^2}{c_1}$ и условно-оптимальное решение $x_1(y) = y$. Далее

$$S_2(y) = \min_{0 \le x \le y} \{f_2(x) + S_1(y - x)\} = \min_{0 \le x \le y} \{\frac{x^2}{c_2} + \frac{(y-x)^2}{c_1}\}.$$

Выражение в фигурных скобках представляет выпуклую функцию, минимум которой можно найти, приравняв нулю ее производную. Получим $\dfrac{x}{c_2} - \dfrac{y-x}{c_1} = 0$, откуда $x_2(y) = \dfrac{c_2 y}{c_1 + c_2}$, а $S_2(y) = \dfrac{y^2}{c_1 + c_2}$.

С помощью математической индукции нетрудно доказать, что

$$S_k(y) = \frac{y^2}{\sum_{i=1}^{k} c_i}, \quad x_k(y) = \frac{c_k y}{\sum_{i=1}^{k} c_i}, \quad 0 \le y \le Y.$$

Таким образом,

$$S^* = S_n(Y) = \frac{Y^2}{\sum_{i=1}^{n} c_i}, \quad x_n^* = x_n(Y) = \frac{c_n Y}{\sum_{i=1}^{n} c_i}.$$

Обратный ход. Зная оптимальное значение последней переменной x_n^*, находим

$$y_{n-1}^* = Y - x_n^* = Y - \frac{c_n Y}{\sum_{i=1}^{n} c_i} = \frac{Y \sum_{i=1}^{n} c_i - c_n Y}{\sum_{i=1}^{n} c_i} = \frac{Y \sum_{i=1}^{n-1} c_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i}.$$

Следовательно,

$$x_{n-1}^* = x_{n-1}(y_{n-1}^*) = \frac{c_{n-1} Y}{\sum_{i=1}^{n} c_i}.$$

Воспользовавшись математической индукцией, получим

$$x_k^* = \frac{c_k Y}{\sum_{i=1}^{n} c_i},\ k = 1,\ \ldots,\ n.$$

В общем случае для реализации алгоритма ДП нужна дискретность значений x_k. Пусть переменные x_k целые. Тогда величины y также целые. Следовательно, параметру y достаточно принимать значения из конечного множества $\{0,\ 1,\ \ldots,\ Y\}$. Трудоемкость алгоритма в этом случае равна $O(nY^2)$, а требуемая память – $O(nY)$.

Пример 2.2. На железнодорожную станцию прибыло 8 контейнеров, которые необходимо развезти по 5 складам. Емкость i-го склада – v_i контейнеров, затраты на транспортировку одного контейнера на этот склад – g_i, а стоимость хранения x контейнеров – $c_i(x)$. Требуется развезти все прибывшие контейнеры по складам, чтобы суммарные затраты на транспортировку и хранение были минимальны.

Исходные данные задачи приведены в табл. 2.1 и 2.2.

Таблица 2.1

	Склады				
	1	2	3	4	5
g_i	0,5	1	1,2	1,5	2
v_i	2	3	3	5	5

Таблица 2.2

x	$c_1(x)$	$c_2(x)$	$c_3(x)$	$c_4(x)$	$c_5(x)$
1	2	1,5	1	0,5	0,3
2	4	2	2	1	0,5
3	–	3	3	1,5	1
4	–	–	–	2	1,5
5	–	–	–	2,5	2

Решение. Для записи математической постановки задачи введем функции $h_i(x) = g_i x + c_i(x)$, $i = 1,\ \ldots,\ 5$, которые задаются табл. 2.3. Тогда математическая модель имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{5} h_i(x_i) \to \min_{x_i \in \{0,1,\ldots,v_i\}};$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 8.$$

Таблица 2.3

x	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$
1	2,5	2,5	2,2	2	2,3
2	5	4	4,4	4	4,5
3	–	6	6,6	6	7
4	–	–	–	8	9,5
5	–	–	–	10	12

Это распределительная задача, и для нее справедливы рекуррентные соотношения

$$S_1(y) = h_1(y),\ y = 0,\ 1,\ \ldots,\ 8;$$

$$S_k(y) = \min_{0 \le x \le \min\{y, v_k\}} [\, S_{k-1}(y - x) + h_k(x)],\ k = 2,\ \ldots,\ 5;\ y = 0,\ 1,\ \ldots,\ 8.$$

Прямой ход. В результате прямого хода заполняем табл. 2.4, в которую помещены значения $S_k(y)$, а через дробь (/) указаны условно-оптимальные решения, которые помогут восстановить оптимальное решение на этапе обратного хода.

Таблица 2.4

y	$S_1(y)$	$S_2(y)$	$S_3(y)$	$S_4(y)$	$S_5(y)$
0	**0**	0	0	0	
1	2,5 / 1	2,5 / 0	2,2 / 1	2 / 1	
2	5 / 2	4 / 2	4 / 0	4 / 0	
3	–	**6 / 3**	**6 / 0**	6 / 0	
4	–	8,5 / 3	8,2 / 1	8 / 1	
5	–	11 / 3	10,4 / 2	10 / 2	
6	–	–	12,6 / 3	12 / 3	
7	–	–	15,1 / 3	14 / 4	
8	–	–	17,6 / 3	**16 / 5**	**16 / 0**

Здесь следует сделать несколько замечаний:

1) прочерк в клетке таблицы следует считать «бесконечностью», так как при соответствующих значениях параметров допустимого решения не существует;

2) условно-оптимальных решений (как и оптимальных) может быть несколько. Для получения *одного* из оптимальных решений достаточно хранить *любое* условно-оптимальное решение;

3) значения функции $S_5(y)$ для $y = 0, 1, ..., 7$ вычислять нет необходимости. Эти значения понадобились бы при вычислении $S_6(y)$, но в этом нет необходимости, так как всего 5 складов.

Итак, в результате работы прямого хода алгоритма найдено оптимальное значение целевой функции $S^* = S_5(8) = 16$ и оптимальное значение последней переменной $x_5^* = x_5(8) = 0$.

Обратный ход. Так как на 5-й склад в оптимальном решении не надо везти ни одного контейнера ($x_5^* = 0$), то их нужно развести по первым 4-м складам. Следовательно, $y_4^* = 8 - x_5^* = 8$. Вот почему для определения оптимального значения предпоследней переменной достаточно обратиться к клетке табл. 2.4 со значением $S_4(8)$. Имеем $x_4^* = x_4(8) = 5$. Значит, на 4-й склад будет отправлено 5 контейнеров. Следовательно, еще 3 нужно развести по первым 3-м складам, т. е. $y_3^* = 8 - x_4^* = 3$. Клетка $S_3(3)$ табл. 2.4 содержит условно-оптимальное значение $x_3(3) = 0$, поэтому $x_3^* = 0$ и $y_2^* = 3 - x_3^* = 3$. В клетке табл. 2.4 со значением $S_2(y_2^*) = S_2(3)$ хранится также значение условно-оптимальной переменной $x_2(3) = 3$. Значит, $x_2^* = 3$ и $y_1^* = 3 - x_2^* = 0$, т. е. все контейнеры распределены и на 1-й склад ни один из них не повезут.

Окончательно имеем, что оптимальный вектор рассматриваемой задачи $x^* = (0, 3, 0, 5, 0)$ приводит к минимальным затратам $S^* = 16$, связанным с перевозкой и хранением 8-ми контейнеров. В табл. 2.4 помечены ячейки, по значениям которых было восстановлено оптимальное решение на этапе обратного хода алгоритма.

Заметим, что для вычисления значений $S_k(y)$ нужны значения лишь предыдущего столбца $S_{k-1}(y)$. Не обязательно хранить всю таблицу. Правда, при этом мы потеряем значения условно-оптимальных решений, что приведет к увеличению трудоемкости. Таким образом, можно реализовать вариант алгоритма с трудоемкостью $O(n^2Y^2)$, уменьшив требуемую память до величины $O(Y)$. Такая реализация называется *релаксационным алгоритмом* ДП. Она состоит из $(n - 1)$-го прямого хода решения задач $<k, f, y_k^*>$, $k = n, n - 1, ..., 2$. В результате первого прямого хода будет найдено оптимальное значение целевой функции исходной задачи $<n, f, Y>$ и последняя компонента вектора решения x_n^*, что позволит определить $y_{n-1}^* = Y - x_n^*$.

Затем решаем задачу $<n-1, f, y^*_{n-1}>$ и получаем x^*_{n-1}. Продолжая выполнение прямого хода для задач $<k, f, y^*_k>$, $k = n-2, \ldots, 2$, определим оптимальное решение исходной задачи.

Пример 2.3. Решить задачу из примера 2.2 релаксационным алгоритмом динамического программирования.

Решение. Выполняя прямой ход для исходной задачи $<5, h, 8>$, найдем $S^* = 16$ и $x^*_5 = 0$. Значит, $y^*_4 = 8 - 0 = 8$. Теперь выполним прямой ход для задачи $<4, h, 8>$. Получим $x^*_4 = 5$. Следовательно, $y^*_3 = 8 - 5 = 3$. Выполним прямой ход для задачи $<3, h, 3>$. Имеем $x^*_3 = 0$. Следовательно, $y^*_2 = 3 - 0 = 3$. Выполним прямой ход для задачи $<2, h, 2>$ и получим $x^*_2 = 3$. Очевидно, $y^*_1 = 3 - 3 = 0$ и $x^*_1 = 0$.

2.2. Задача о ранце

Задача о ранце (ЗР) формулируется следующим образом. Пусть имеется множество предметов $k = 1, \ldots, n$, каждый из которых имеет объем (вес) $a_k \geq 0$ и ценность $f_k(x_k)$. Требуется заполнить ранец предметами, суммарная ценность которых максимальна, а суммарный объем не превосходит емкости ранца A. Задачу, математическая модель которой имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) \to \max_{x=(x_1,\ldots,x_n)\in Z_+^n};$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \leq A,$$

обозначим $<n, f, \leq A>$ и поместим в семейство подобных задач $\{<k, f, \leq \alpha>, k = 1, \ldots, n, \ 0 \leq \alpha \leq A\}$. Пусть $S_k(\alpha)$ – оптимальное значение целевой функции задачи $<k, f, \leq \alpha>$.

Справедливы рекуррентные соотношения

$$S_1(\alpha) = \max_{x_1=0,\ldots,[\alpha/a_1]} f_1(x_1), \ 0 \leq \alpha \leq A;$$

$$S_k(\alpha) = \max_{x_k=0,\ldots,[\alpha/a_k]} \{ S_{k-1}(\alpha - a_k x_k) + f_k(x_k)\}, \ k = 2, \ldots, n, \ 0 \leq \alpha \leq A,$$

которые верны для любых a_k и f_k. Для численной реализации схемы достаточно предположить целочисленность a_k. В этом случае $\alpha \in \{0, \ldots, A\}$, где A также можно считать целым числом.

Подробнее рассмотрим линейную задачу о ранце, которая имеет вид

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k \to \max\limits_{\{x_k\}};\\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k \le A;\\ x_k \in Z_+,\ k = 1,\dots,n.\end{cases}$$

Обозначим эту задачу $<n, \le A>$ и поместим в семейство $\{<n, \le \alpha>, 0 \le \alpha \le A\}$. Пусть $S(\alpha)$ – оптимальное значение функционала задачи $<n, \le \alpha>$.

Теорема 2.2. Справедливо соотношение

$$S(\alpha) = \max_{k=1,\dots,n | a_k \le \alpha} \{S(\alpha - a_k) + c_k\}, \quad 0 \le \alpha \le A. \tag{2.6}$$

Когда в результате прямого хода значения $S(\alpha)$, $\alpha = 0, \dots, A$ вычислены, можно восстановить оптимальный вектор x^* следующим образом. Сначала положим $x^* = 0$, $\alpha^* = A$. Затем последовательно выполним шаги, на каждом из которых найдем индекс k, при котором выполняется равенство $S(\alpha^*) = S(\alpha^* - a_k) + c_k$, $a_k \le \alpha^*$. Положим $x_k^* = x_k^* + 1$; $\alpha^* = \alpha^* - a_k$ и повторим шаг. Если допустимого индекса k нет, тогда полученный вектор x^* оптимален.

Использование рекуррентных соотношений (2.6) в случае целочисленных a_k приводит к трудоемкости $O(An)$ и объему требуемой памяти $O(A + n)$.

Наряду с задачей (I) рассмотрим задачу

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k \to \min\limits_{\{x_k\}};\\ \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k \ge B;\\ x \in Z_+^n,\end{cases}$$

которую обозначим $<n, \ge B>$ и назовем *обратной* к задаче (I). Как и ранее, поместим задачу (II) в семейство $\{<n, \ge \beta>, \ 0 \le \beta \le B\}$ и обозначим через $Q(\beta)$ оптимальное значение целевой функции, а через $x^0(\beta)$ – оптимальное решение задачи $<n, \ge B>$. Справедливы рекуррентные соотношения

$$Q(0) = 0;$$
$$Q(\beta) = \min_{1 \le k \le n} \{Q(\max\{0, \beta - c_k\}) + a_k\},\ 0 \le \beta \le B.$$

Лемма 2.1. Функция $Q(\beta)$ не убывает.

Теорема 2.3. Пусть $\widetilde{\beta} = \max\{\beta |\ Q(\beta) \le A,\ \beta \ge 0\}$. Тогда $S(A) = \widetilde{\beta}$ и оптимальное решение $x^0(\widetilde{\beta})$ задачи $<n, \ge \widetilde{\beta}>$ является также оптимальным решением задачи $<n, \le A>$.

Из неубывания функции $Q(\beta)$ и утверждений теоремы следует, что

$$S^* = \min\{\beta |\ A < Q(\beta + 1),\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots\}.$$

Это позволяет построить другой алгоритм решения задачи (I):

– на этапе прямого хода находим элементы таблицы $Q(\beta)$ по рекуррентным соотношениям для задачи (II), последовательно полагая $\beta = 0,1,\ldots$, пока для некоторого $\widetilde{\beta}$ не получим $A < Q(\widetilde{\beta}+1)$. Это значение $\widetilde{\beta}$ и есть оптимальное значение целевой функции S^* задачи $< n, \le A >$;

– по полученной таблице $\{Q(\beta),\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ S^*\}$ находим оптимальное решение $x^0(S^*)$ обратной задачи $<n, \ge S^*>$, совпадающее с искомым решением $x^*(A)$ прямой задачи $< n, \le A >$.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 2.4. Пусть $\widetilde{\alpha} = \min\{\alpha |\ S(\alpha) \ge B,\ \alpha \ge 0\}$. Тогда $Q(B) = \widetilde{\alpha}$ и оптимальное решение $x^*(\widetilde{\alpha})$ прямой задачи $< n, \le \widetilde{\alpha} >$ является также оптимальным решением $x^0(B)$ обратной задачи $<n, \ge B>$.

Утверждения последних двух теорем позволяют осуществлять переход от прямой задачи к обратной и наоборот. В каких случаях этот переход оправдан? Отметим два:

1) если в прямой (обратной) задаче параметры a_k (c_k) не целочисленные, а c_k (a_k) целочисленные;

2) если в прямой (обратной) задаче число A (B) большое и a_k (c_k) достаточно большие параметры, чтобы быстро выполнилось неравенство $A < Q(\beta + 1)$ $(S(\alpha - 1) < B)$.

В первом случае переход к обратной (прямой) задаче необходим для конечности реализации алгоритма. Во втором – переход к обратной (прямой) задаче может уменьшить трудоемкость.

Проиллюстрируем решение прямой задачи (ПЗ) путем перехода к обратной задаче (ОЗ) на примере булевой задачи о ранце. Запишем обе задачи:

$$(\text{ПЗ})\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \to \max\limits_{\{x_i\}};\\ \sum_{i=1}^{n} h_i x_i \le b;\\ x_i \in \{0,1\},\ i = 1, ..., n.\end{cases} \qquad (\text{ОЗ})\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} h_i x_i \to \min\limits_{\{x_i\}};\\ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \ge d;\\ x_i \in \{0,1\},\ i = 1, ..., n.\end{cases}$$

Так как переменные принимают два значения, рекуррентные соотношения для ОЗ запишем в виде

$$Q_1(y) = \begin{cases}0, & y = 0;\\ h_1, & 0 < y \le r_1;\\ +\infty, & y > r_1;\end{cases}, y = 0, ..., d;$$

$$Q_k(y) = \min\begin{cases}Q_{k-1}(y), & x_k = 0;\\ h_k + Q_{k-1}(\max\{0, y - r_k\}), & x_k = 1;\end{cases}, k = 2, ..., n, y = 0, ..., d.$$

Величины $Q_k(y)$, согласно приведенным выше утверждениям, нужно вычислять увеличивая $y = 0, 1, \ldots$, пока не будет выполнено неравенство $A < Q(\beta + 1)$. Тогда оптимальное значение функционала ПЗ $S^* = \beta$ и решение ОЗ с $d = \beta$ будет оптимальным и для ПЗ. Разберем следующий пример.

Пример 2.4. Пусть параметры ПЗ заданы табл. 2.5, а $b = 110$.

Таблица 2.5

i	1	2	3	4	5	6
r_i	6	5	4	3	2	1
h_i	45	33	28	16	13	9

Решение. Решение ПЗ приведет к заполнению таблицы размерностью 6×110. Чтобы избежать громоздких расчетов, перейдем к ОЗ и в процессе работы прямого хода алгоритма ДП вычислим $Q_k(y)$, $k = 1, ..., 6$ для тех $y = 0, 1, ...$, для которых выполняются неравенства $Q_k(y) \le 110$. Прочерками в таблице обозначим бесконечно большие величины (когда нет допустимых решений). В столбцах, соответствующих Q_4, Q_5, Q_6, вычисления прекращены, как только соответствующие величины стали больше $b = 110$. Кроме значений $Q_k(y)$, отразим в табл. 2.6 (через дробь) в соответствующей ячейке также значение условно-оптимального решения. Если условно-оптимальных решений несколько, то мы запоминаем одно из них.

Обратный ход. Максимальное значение y, при котором $Q_6(y) = 107 \le b = 110$, равно 16. Следовательно, оптимальное значение целевой функции ПЗ $S^* = 16$. При этом условно-оптимальное решение $x_6^0(16) = 0$ определяет значение последней компоненты оптимального вектора ПЗ $x_6^* = 0$. Отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{5} r_i x_i \ge 16$. Вот почему для определения x_5^* следует воспользоваться ячейкой $Q_5(16)$, в которой условно-оптимальное решение определяет $x_5^* = 1$. Значит, $\sum_{i=1}^{4} r_i x_i \ge 16 - r_5 = 16 - 2 = 14$. Переходим в ячейку $Q_4(14)$ табл. 2.6, откуда определяем $x_4^* = 1$.

Таблица 2.6

y	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6
0	0	0	0	0	0	0
1	45 / 1	33 / 1	28 / 1	16 / 1	13 / 1	9 / 1
2	45 / 1	33 / 1	28 / 1	16 / 1	13 / 1	13 / 0
3	45 / 1	33 / 1	28 / 1	16 / 1	16 / 0	16 / 0
4	45 / 1	33 / 1	28 / 1	28 / 1	28 / 0	25 / 1
5	45 / 1	33 / 1	33 / 1	33 / 1	29 / 1	29 / 0
6	**45 / 1**	45 / 1	45 / 1	44 / 1	41 / 1	38 / 1
7	–	78 / 1	61 / 1	44 / 1	44 / 0	44 / 0
8	–	78 / 1	61 / 1	49 / 1	49 / 0	49 / 0
9	–	78 / 1	61 / 1	61 / 0	57 / 1	57 / 0
10	–	78 / 1	73 / 1	73 / 0	62 / 1	62 / 0
11	–	**78 / 1**	**78 / 0**	77 / 1	74 / 1	71 / 1
12	–	–	106 / 1	77 / 1	77 / 0	77 / 0
13	–	–	106 / 1	89 / 1	89 / 0	86 / 1
14	–	–	106 / 1	**94 / 1**	90 / 1	90 / 0
15	–	–	106/1	106 / 0	101 / 1	99 / 1
16	–	–	–	122 / 1	**107 / 1**	**107 / 0**
17	–	–	–	–	119 / 1	116 / 0

Следовательно, $\sum_{i=1}^{3} r_i x_i \ge 14 - r_4 = 14 - 3 = 11$. Значение $x_3^* = 0$ оставляет нас в той же строке таблицы, но переводит в предыдущий столбец, из

которого имеем $x_2^* = 1$. Значит, $r_1 x_1 \geq 11 - r_2 = 11 - 5 = 6$. Шестая строка первого столбца определяет первую компоненту оптимального вектора $x_1^* = 1$ и решение задачи $x^* = (1, 1, 0, 1, 1, 0)$.

2.3. Задача о ближайшем соседе

Рассмотрим проблему оптимального разбиения линейного объекта на участки, известную под названием *задача о ближайшем соседе*. Пусть задано целое положительное число M и неотрицательная функция $f(x, y)$, отражающая затраты, связанные с «обслуживанием» отрезка $[x, y] \subseteq [0, M]$. Требуется разбить отрезок $[0, M]$ на n частей таким образом, чтобы суммарные затраты, соответствующие этому разбиению, были минимальны. Ниже приведена математическая постановка задачи:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}, x_k) \to \min\limits_{x}; \\ 0 = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = M, \end{cases}$$

которую обозначим $<n, M>$.

Пусть $S_n(M)$ – оптимальное значение целевой функции задачи $<n, M>$, которую поместим в семейство задач $\{<k, y>, k = 1, \ldots, n, y = 1, \ldots, M\}$. Пусть $S_k(y)$ – оптимальное значение целевой функции задачи $<k, y>$.

Справедливы рекуррентные соотношения:

$$S_k(y) = \begin{cases} f(0, y), k = 1, \quad y = 1, \ldots, M; \\ \min\limits_{1 \leq x \leq y} \{S_{k-1}(x) + f(x, y)\}, \quad k = 2, \ldots, n; \quad y = 1, \ldots, M. \end{cases}$$

Пример 2.5. Решить задачу $<4, 8>$ с функцией $f(x, y)$, заданной табл. 2.7.

Таблица 2.7

x / y	1	2	3	4	5	6	7	8
0	3	19	24	41	42	63	66	83
1	0	6	18	26	39	48	56	77
2	–	0	11	19	35	44	55	56
3	–	–	0	13	25	27	45	53
4	–	–	–	0	3	15	24	37
5	–	–	–	–	0	3	16	27
6	–	–	–	–	–	0	12	21
7	–	–	–	–	–	–	0	16
8	–	–	–	–	–	–	–	0

Решение. Прямой ход. Пользуясь рекуррентными соотношениями, заполним табл. 2.8, в каждой ячейке которой поместим соответствующее значение $S_k(y)$, k = 1, ..., 4, y = 0, ..., 8 и через дробь (/) условно-оптимальное решение $x(y)$, которое соответствует правой точке оптимального разбиения отрезка $[0, y]$.

Обратный ход. На последнем шаге прямого хода найдены минимальные затраты $S^* = S_4(8) = 59$, соответствующие оптимальному разбиению исходного отрезка [0, 8], и оптимальное значение последней точки разбиения $x_3^* = 5$. Следовательно, отрезок [0, 5] необходимо оптимально разбить на 3 части. Значение x_2^* получим как условно-оптимальное решение, соответствующее величине $S_3(5)$ табл. 2.8: $x_2^* = 4$. Последней точкой оптимального разбиения отрезка [0, 4] является $x_1^* = 1$. В результате получили следующие точки оптимального разбиения исходного отрезка [0, 8] на 4 части: $x_0^* = 0$, $x_1^* = 1$, $x_2^* = 4$, $x_3^* = 5$, $x_4^* = 8$. В табл. 2.8 выделены ячейки, по значениям которых восстанавливается оптимальное решение.

Таблица 2.8

y	$S_1(y)$	$S_2(y)$	$S_3(y)$	$S_4(y)$
0	0	0	0	0
1	**3**	3 / 0	3 / 0	3 / 0
2	19	9 / 1	9 / 1	9 / 1
3	24	21 / 1	20 / 2	20 / 2
4	41	**29 / 1**	28 / 2	28 / 2
5	42	42 / 0	**32 / 4**	31 / 4
6	63	45 / 5	44 / 4	35 / 5
7	66	58 / 5	53 / 4	48 / 5
8	83	69 / 5	65 / 2	**59 / 5**

Методом ДП можно решить также задачу о ближайшем соседе, в которой число отрезков разбиения n не задано:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}, x_k) \to \min\limits_{x,n} \\ 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = M, \quad n > 0, \end{cases}$$

которую обозначим $<M> \in \{<y> | y = 1, \ldots, M\}$. Эту задачу можно свести к последовательности задач $<n, M>$, n = 1, ..., M, вычислить $S_n(M)$ и найти $n^* = \arg\min\{S_n(M), n = 1, \ldots, M\}$. Такой подход имеет вычислительную сложность $O(M^3)$ и требует память $O(n^* M)$. Однако для такой задачи справедливы простые рекуррентные соотношения:

$$\widetilde{S}(0) = 0;$$

$$\widetilde{S}(y) = \min_{x=0,1,\ldots,y-1} \{\widetilde{S}(x) + f(x,y)\}, y = 1, \ldots, M.$$

Заметим, что в постановке задачи мы заменили нестрогие неравенства на строгие. Это можно сделать, если $f(x, x) \geq 0$. Таким образом, когда оптимальное решение не единственно, будет найдено то из них, в котором n минимально.

Пример 2.6. Решить задачу из примера 2.5 с произвольным $n > 0$.

Решение. Прямой ход. Вычислим значения $\widetilde{S}(y)$ для $y = 0, 1, \ldots, 8$ и запомним, как и прежде, соответствующие условно-оптимальные решения (табл. 2.9).

Таблица 2.9

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\widetilde{S}(y)$	0	**3 / 0**	**9 / 1**	20 / 2	**28 / 2**	**31 / 4**	**34 / 5**	46 / 6	**55 / 6**

Обратный ход. Имеем минимальные затраты, связанные с разбиением отрезка [0, 8] на оптимальное количество частей, $S^* = \widetilde{S}(M) = \widetilde{S}(8) = 55$ и последнюю точку оптимального разбиения, равную 6. Здесь необходимо отметить, что количество точек оптимального разбиения неизвестно, и мы не можем сказать, какой по счету является точка 6. Следующей (справа) точкой разбиения является 5 (см. столбец 6 табл. 2.9), затем – 4, 2 и 1. Значит, $x^*_0 = 0$, $x^*_1 = 1$, $x^*_2 = 2$, $x^*_3 = 4$, $x^*_4 = 5$, $x^*_5 = 6$, $x^*_6 = 8$. Следовательно, $n^* = 6$.

Если n является переменной, для которой дополнительно требуется выполнение неравенств $a \leq n \leq b$, то такую задачу о ближайшем соседе следует решать в четыре этапа:

1) решить задачу с произвольным $n > 0$. Получим некоторое оптимальное значение n^*. Если $n^* \in [a, b]$, то задача решена. Иначе переходим к выполнению следующего этапа;

2) выполнить прямой ход для задачи с фиксированным значением $n = b$;

3) найти n^*, для которого $S_{n^*}(M) = \min_{a \leq n \leq b} S_n(M)$;

4) для восстановления оптимального решения осуществить обратный ход при $n = n^*$.

Пример 2.7. Решить задачу из примера 2.5 с количеством отрезков разбиения n, удовлетворяющим неравенствам $2 \leq n \leq 5$.

Решение. Этап 1. Из предыдущего примера имеем, что $n^* = 6$, поэтому $n^* \notin [2, 5]$.

Этап 2. Положим $n = b = 5$ и выполним прямой ход для задачи <5, 8>. Результат помещен в табл. 2.10, в которой, как и прежде, кроме значений $S_k(y)$, $k = 1, \ldots, 5$, $y = 0, \ldots, 8$, в соответствующие ячейки через дробь (/) помещены условно-оптимальные решения.

Этап 3. Найдем n^*, для которого

$$S_{n^*}(8) = \min_{n=2,\ldots,5} S_n(8) = \min\{69, 65, 59, 56\} = 56.$$

Имеем $n^* = 5$.

Этап 4. Обратный ход для $n^* = 5$ позволяет восстановить оптимальное разбиение для последней задачи: $x_0^* = 0$, $x_1^* = 1$, $x_2^* = 4$, $x_3^* = 5$, $x_4^* = 6$, $x_5^* = 8$.

Таблица 2.10

y	$S_1(y)$	$S_2(y)$	$S_3(y)$	$S_4(y)$	$S_5(y)$
0	0	0	0	0	
1	**3**	3 / 0	3 / 0	3 / 0	
2	19	9 / 1	9 / 1	9 / 1	
3	24	21 / 1	20 / 2	20 / 2	
4	41	**29 / 1**	28 / 2	28 / 2	
5	42	42 / 0	**32 / 4**	31 / 4	
6	63	45 / 5	44 / 4	**35 / 5**	
7	66	58 / 5	53 / 4	48 / 5	
8	83	69 / 5	65 / 2	59 / 5	**56 / 6**

В табл. 2.10 выделены ячейки, значения которых позволяют осуществить обратный ход и получить оптимальное решение.

Упражнения

1. Решить распределительную задачу, в которой $f_i(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ и функция f – строго выпуклая и дифференцируемая.

2. Решить линейную задачу о ранце без требования целочисленности переменных.

3. Имеется 8 предметов, каждый из которых характеризуется своей ценностью и весом. Определить набор предметов максимальной ценности, общий вес которых не превосходит 55, если исходные данные заданы следующей таблицей:

Номер предмета	1	2	3	4	5	6	7	8
Вес предмета	2	8	17	4	26	2	23	9
Стоимость предмета	4	2	3	1	5	2	10	8

4. Завод может производить 4 вида продукции. Обозначим $g_i(x)$ – количество единиц сырья для производства x единиц продукции i-го вида, c_i – доход от реализации единицы продукции i-го вида. Пусть всего имеется 50 единиц сырья. Требуется определить, сколько производить продукции каждого типа, чтобы максимизировать доход, если доходы от реализации единицы продукции заданы таблицей

i	1	2	3	4
c_i	2	3	1	1

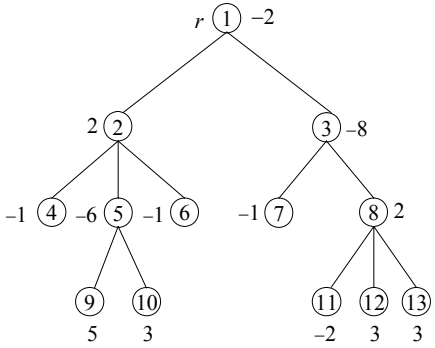
а расход сырья на единицу продукции – таблицей

x	g_1	g_2	g_3	g_4
1	15	20	20	15
2	25	30	21	18
3	35	35	22	20
4	44	40	23	23
5	48	50	28	25

5. Разбить отрезок [0, 8] с минимальными затратами на не более чем 4 части, если затраты $f(x, y)$, связанные с отрезком $[x, y]$ характеризуются следующей таблицей:

x / y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	14	21	95	77	58	81	83
1	–	0	7	8	26	100	59	60	98
2	–	–	0	9	5	1	88	98	64
3	–	–	–	0	0	8	1	78	97
4	–	–	–	–	0	1	9	10	82
5	–	–	–	–	–	0	2	0	0
6	–	–	–	–	–	–	0	2	8
7	–	–	–	–	–	–	–	0	8
8	–	–	–	–	–	–	–	–	0

6. На рисунке изображено дерево $T = (V, E)$ с корнем в $r \in V$ и весами вершин c_v, $v \in V$.



С помощью динамического программирования найти поддерево с корнем в r максимального веса.