

4. Метод ветвей и границ

Задачи дискретной оптимизации имеют конечное множество допустимых решений, которые теоретически можно перебрать и выбрать наилучшее (дающее минимум или максимум целевой функции). Практически же зачастую это бывает неосуществимо даже для задач небольшой размерности.

В методах неявного перебора делается попытка так организовать перебор, используя свойства рассматриваемой задачи, чтобы отбросить часть допустимых решений. Наибольшее распространение среди схем неявного перебора получил *метод ветвей и границ*, в основе которого лежит идея последовательного разбиения множества допустимых решений. На каждом шаге метода элементы разбиения (подмножества) подвергаются анализу – содержит ли данное подмножество оптимальное решение или нет. Если рассматривается задача на минимум, то проверка осуществляется путем сравнения нижней оценки значения целевой функции на данном подмножестве с верхней оценкой функционала. В качестве оценки сверху используется значение целевой функции на некотором допустимом решении. Допустимое решение, дающее наименьшую верхнюю оценку, называют *рекордом*. Если оценка снизу целевой функции на данном подмножестве не меньше оценки сверху, то рассматриваемое подмножество не содержит решения лучше рекорда и может быть отброшено. Если значение целевой функции на очередном решении меньше рекордного, то происходит смена рекорда. Будем говорить, что подмножество решений *просмотрено*, если установлено, что оно не содержит решения лучше рекорда.

Если просмотрены все элементы разбиения, алгоритм завершает работу, а текущий рекорд является оптимальным решением. В противном случае среди непросмотренных элементов разбиения выбирается множество, являющееся в определенном смысле перспективным. Оно подвергается разбиению (ветвлению). Новые подмножества анализируются по описанной выше схеме. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут просмотрены все элементы разбиения.

4.1. Формальное описание

Пусть рассматривается задача вида

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in D},$$

где $f(x)$ – вещественная функция, а D – конечное множество допустимых решений. Пусть $d \subseteq D$. Функцию $b(d)$, ставящую в соответствие множеству

d разбиение его на подмножества d_1, \dots, d_N , $N > 1$, будем называть *ветвлением*.

Вещественная функция $H(d)$ называется *нижней границей* для d , если

- 1) $H(d) \leq \min_{x \in d} f(x)$;
- 2) на одноэлементном множестве $\{x\}$ верно равенство $H(\{x\}) = f(x)$.

Алгоритм, реализующий метод ветвей и границ, состоит из последовательности одностипных шагов. На каждом шаге известен рекорд x^0 и подмножества t_1, t_2, \dots, t_L непросмотренных решений. В начале работы алгоритма $L = 1$, $t_1 = D$, x^0 – произвольный элемент множества D или пустое множество (на пустом множестве положим значение функционала равным бесконечности).

На каждом шаге алгоритм начинает работу с проверки элементов разбиения. Пусть проверяется множество t_j . Множество t_j отсекается в одном из двух, последовательно проверяемых случаев:

а) если $H(t_j) \geq f(x^0)$;

б) если $H(t_j) < f(x^0)$ и найден такой элемент $y_j \in t_j$, что $f(y_j) = \min_{x \in t_j} f(x) = H(t_j)$.

В случае б происходит смена рекорда $x^0 = y_j$.

Пусть t_1, t_2, \dots, t_M ($M \leq L$) – неотсеченные множества (будем считать, что отсечены множества с номерами $M + 1, \dots, L$).

В случае $M = 0$ алгоритм заканчивает работу, и в качестве решения задачи принимается рекорд x^0 . При $M \geq 1$ среди множеств t_1, \dots, t_M выбирается множество для нового ветвления. Пусть таковым является множество t_1 . Тогда осуществляется ветвление $b(t_1) = (d_1, \dots, d_N)$, в результате которого получаем список множеств $d_1, \dots, d_N, t_2, \dots, t_M$. Эти множества нумеруются числами от 1 до L , и начинается новый шаг алгоритма.

Нетрудно убедиться в том, что описанный алгоритм находит оптимальное решение за конечное число шагов.

Описанная последовательность действий является общей схемой метода ветвей и границ для решения задач на минимум. При решении конкретной задачи следует указать способы построения нижней и верхней оценок, метод ветвления, а также правило выбора перспективного множества для разбиения.

При определении «перспективного» элемента разбиения в основном применяются две схемы: *одновременного (многостороннего)* и *одностороннего* ветвления. При одновременном ветвлении функция b может быть применена к любому элементу разбиения. Часто в качестве такого элемента выбирается подмножество t_k с минимальной нижней границей

$$H(t_k) = \min_{1 \leq i \leq L} H(t_i).$$

При одностороннем ветвлении номер разбиваемого подмножества известен заранее. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что «перспективным» является подмножество t_1 . Отметим, что при односторонней схеме ветвления нет необходимости запоминать все элементы разбиения, достаточно иметь информацию о первом элементе разбиения и объединении остальных элементов.

Разбиения множеств решений (ветвление) удобно представлять в виде дерева решений. На рис. 4.1 приведены примеры одновременной (а) и односторонней (б) схем ветвления. Каждая вершина дерева соответствует некоторому подмножеству решений. Дуги, исходящие из вершины, означают, что на некотором шаге это подмножество отсечь не удалось и оно было разбито на подмножества. Вершины, в которые входят эти дуги, соответствуют подмножествам, полученным в результате ветвления. Зачеркнутые висячие вершины означают отсеченные подмножества. Незачеркнутые висячие вершины соответствуют непросмотренным множествам, среди которых на следующем шаге алгоритма выбирается подмножество для дальнейшего ветвления.

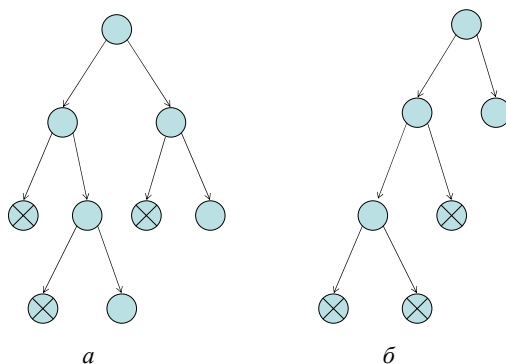


Рис. 4.1.

В схеме одностороннего ветвления выбирается первая (левая) вершина на нижнем уровне, а для схемы одновременного ветвления такой вершиной может быть любая. Алгоритм заканчивает работу, если зачеркнуты все висячие вершины дерева ветвлений.

Графическое представление метода ветвей и границ иллюстрирует его суть – отсечение ветвей дерева поиска, которое осуществляется на основании сравнения нижней границы и значения функционала на рекорде. Это объясняет название метода.

При использовании описанной выше схемы для решения конкретной задачи необходимо ее уточнение, учитывающее особенности рассматриваемой задачи. В разделе 4.2 приведен пример реализации метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжера.

Пример 4.1. Построить полное дерево ветвления (без отсечений) для

задачи $\sum_{i=1}^3 f_i(x_i) \rightarrow \max_{x \in D}$, где множество D задано условиями $\begin{cases} \sum_{i=1}^3 x_i \leq 2 \\ x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$.

Решение. Здесь исходное множество допустимых решений D разбито на два непересекающихся подмножества: векторы с фиксированным значением $x_1 = 1$ и векторы с $x_1 = 0$. Множество $\{x_1 = 1\}$ делится на два подмножества $\{x_2 = 1\}$ и $\{x_2 = 0\}$. Множество $\{x_1 = 1, x_2 = 1\}$ является одноэлементным (в силу ограничения задачи), поэтому $x_3 = 0$. Множество $\{x_1 = 1, x_2 = 0\}$ разбивается на два подмножества $\{x_3 = 1\}$ и $\{x_3 = 0\}$.

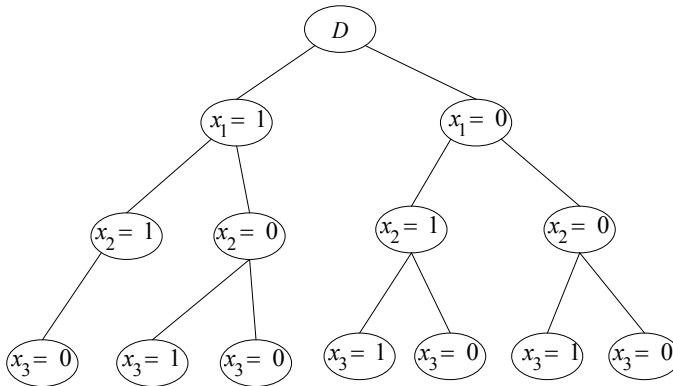


Рис. 4.2

Аналогично множество $\{x_1 = 0\}$ разбивается на подмножества $\{x_1 = 0, x_2 = 1\}$ и $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, и т. д. Полное дерево ветвления изображено на рис. 4.2.

4.2. Решение задачи коммивояжера

Напомним формулировку задачи коммивояжера (см. гл. 1).

Задан полный ориентированный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{1, \dots, n\}$ и множеством дуг E . Каждой дуге $(i, j) \in E$ приписана длина $c_{ij} \geq 0$. В общем случае задача коммивояжера формулируется на произвольном графе, поэтому длины некоторых (в частности, не существующих) ребер могут быть сколь угодно большими. Так, считаем, что $c_{ii} = +\infty$.

Требуется найти гамильтонов контур минимальной длины. Обозначим:

– $\{i_1, \dots, i_p\}$ – простой путь из i_1 в i_p ;

– $f(i_1, \dots, i_n)$ – длина контура $\{i_1, \dots, i_n, i_1\}$.

Будем считать, что $i_1 = 1$.

Подмножества допустимых решений зададим парой множеств (I, J) , где

– $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ – частичный маршрут (последовательность посещения первых p городов);

– $J = \{j_1, \dots, j_q\} \subset V \setminus I$ – совокупность запретов на переходы из последнего города i_p частичного маршрута I .

В случае $p = n - 1$ имеем $q = 0$ и пара (I, J) задает одноэлементное множество.

Для случая $p < n - 1$ определим функцию ветвления, которая разбивает множество контуров (I, J) на два подмножества. Первое подмножество включает в себя контуры, в которых коммивояжер из конечного пункта частичного маршрута переезжает в некоторый фиксированный город, а второе – все контуры, в которых этот переезд запрещен.

Для представления множеств разбиения выберем в $V' = V \setminus (I \cup J)$ некоторый элемент i . Если кроме элемента i в V' есть только один элемент k , то искомые множества $(I = \{i_1, \dots, i_p, i\}, J = \emptyset)$ и $(I = \{i_1, \dots, i_p, k\}, J = \emptyset)$. В противном случае первое множество – $(I = \{i_1, \dots, i_p, i\}, J = \emptyset)$, а второе – $(I = \{i_1, \dots, i_p\}, J = \{j_1, \dots, j_q, i\})$.

Опишем один из способов вычисления нижней границы $H(I, J)$ для подмножества (I, J) . Будем считать, что $i_2 = 2, \dots, i_p = p < n$. Рассмотрим матрицу $\|c'_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, n$, в которой $c'_{ij} = +\infty$, $i = 1, \dots, n$, $j \in I$ и $c'_{pj} = +\infty$, $j \in \{1, \dots, p - 1\} \cup J$, а все остальные элементы $c'_{ij} = c_{ij}$. Эти изменения в матрице расстояний сделаны для того, чтобы запрещенным маршрутам соответствовали бесконечные длины дуг.

Введем величины

$$\alpha_i = \min_{k=1, p+1, \dots, n} c'_{ik}, \quad i = p, \dots, n,$$

$$\beta_k = \min_{i=p, \dots, n} \{c'_{ik} - \alpha_i\}, \quad k = 1, p + 1, \dots, n$$

и определим нижнюю границу

$$H(I, J) = \sum_{i=1}^{p-1} c_{i,i+1} + \sum_{i=p}^n \alpha_i + \sum_{i=p+1}^{n+1} \beta_i,$$

полагая $\beta_{n+1} = \beta_1$.

Пример 4.2. Применяя метод ветвей и границ, решить задачу коммивояжера с матрицей расстояний, заданной табл. 4.1.

Таблица 4.1

		До города				
		1	2	3	4	5
От города	1	—	48	27	31	43
	2	33	—	28	44	43
	3	41	28	—	40	36
	4	37	35	29	—	46
	5	48	48	25	29	—

Решение. Полагаем рекорд x^0 равным пустому множеству и $f(x^0) = +\infty$. Вычислим нижнюю границу на всем множестве допустимых решений D . В этом случае имеем $p = 1$ (коммивояжер находится в первом городе), $(I = \{1\}, J = \emptyset)$, $c'_{ik} = c_{ik}$ для всех $i, k = 1, \dots, 5$.

Находим:

$$\alpha_1 = \min_{k=1,2,\dots,5} c'_{1k} = \min \{48, 27, 31, 43\} = 27,$$

$$\alpha_2 = \min_{k=1,2,\dots,5} c'_{2k} = \min \{33, 28, 44, 43\} = 28,$$

$$\alpha_3 = \min_{k=1,2,\dots,5} c'_{3k} = \min \{41, 28, 40, 36\} = 28,$$

$$\alpha_4 = \min_{k=1,2,\dots,5} c'_{4k} = \min \{37, 35, 29, 46\} = 29,$$

$$\alpha_5 = \min_{k=1,2,\dots,5} c'_{5k} = \min \{48, 48, 25, 29\} = 25.$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \min_{i=1,\dots,5} \{c'_{i1} - \alpha_i\} = \min \{33 - 28, 41 - 28, 37 - 29, 48 - 25\} = \\ &= \min \{5, 13, 8, 23\} = 5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \min_{i=1,\dots,5} \{c'_{i2} - \alpha_i\} = \min \{48 - 27, 28 - 28, 35 - 29, 48 - 25\} = \\ &= \min \{21, 0, 6, 23\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \min_{i=1,\dots,5} \{c'_{i3} - \alpha_i\} = \min \{27 - 27, 28 - 28, 29 - 29, 25 - 25\} = \\ &= \min \{0, 0, 0, 0\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_4 &= \min_{i=1, \dots, 5} \{c'_{i4} - \alpha_i\} = \min \{31 - 27, 44 - 28, 40 - 28, 29 - 25\} = \\ &= \min \{4, 16, 12, 4\} = 4, \\ \beta_5 &= \min_{i=1, \dots, 5} \{c'_{i5} - \alpha_i\} = \min \{43 - 27, 43 - 28, 36 - 28, 46 - 29\} = \\ &= \min \{16, 15, 8, 17\} = 8.\end{aligned}$$

Результаты вычислений можно представить в табл. 4.2, где к матрице $\|c'_{ik}\|$ добавлены столбец α и строка β .

Таблица 4.2

	1	2	3	4	5	α
1	–	48	27	31	43	27
2	33	–	28	44	43	28
3	41	28	–	40	36	28
4	37	35	29	–	46	29
5	48	48	25	29	–	25
β	5	0	0	4	8	

Находим нижнюю границу:

$$\begin{aligned}H(D) &= H(\{1\}, \emptyset) = \sum_{i=1}^{p-1} c_{i,i+1} + \sum_{i=p}^n \alpha_i + \sum_{i=p+1}^{n+1} \beta_i = \\ &= \sum_{i=1}^0 c_{i,i+1} + \sum_{i=1}^5 \alpha_i + \beta_i + \sum_{i=2}^5 \beta_i = \\ &= 0 + (27 + 28 + 28 + 29 + 25) + (5 + 0 + 0 + 4 + 8) = 154.\end{aligned}$$

Найдем верхнюю оценку на рассматриваемом множестве допустимых решений, построив допустимое решение *жадным алгоритмом*: «иди в ближайший допустимый город, где еще не был». Получим контур $y = (1, 3, 2, 5, 4, 1)$. Значение целевой функции $f(y) = 27 + 28 + 43 + 29 + 37 = 164$.

Поскольку $f(y) < f(x^0)$, то найден новый рекорд $x^0 = y = (1, 3, 2, 5, 4, 1)$, который дает верхнюю границу $f(x^0) = 164$.

Поскольку $H(\{1\}, \emptyset) < f(x^0)$, то осуществляем ветвление единственного множества D на два подмножества:

- 1) $I = \{1, 2\}, J = \emptyset$,
- 2) $I = \{1\}, J = \{2\}$.

Рассмотрим первое подмножество. В этом случае $p = 2$, а матрица $\|c'_{ik}\|$ принимает вид табл. 4.3 (затемненные элементы матрицы соответствуют недопустимым переходам, их значения равны бесконечности).

Таблица 4.3

	1	2	3	4	5
1	—	48	27	31	43
2	33	—	28	44	43
3	41	28	—	40	36
4	37	35	29	—	46
5	48	48	25	29	—

Вычислив величины α и β , получаем табл. 4.4.

Таблица 4.4

	1	2	3	4	5	α
1	—	48	27	31	43	—
2	33	—	28	44	43	28
3	41	28	—	40	36	36
4	37	35	29	—	46	29
5	48	48	25	29	—	25
β	5	—	0	4	0	

Нижняя граница

$$H(\{1, 2\}, \emptyset) = \sum_{i=1}^1 c_{i,i+1} + \sum_{i=2}^5 \alpha_i + \beta_1 + \sum_{i=3}^5 \beta_i =$$

$$= 48 + (28 + 36 + 29 + 25) + (5 + 0 + 4 + 0) = 175 > f(x^0).$$

Следовательно, согласно первому правилу отсечений, отсекаем множество решений $(\{1, 2\}, \emptyset)$.

Рассмотрим второе подмножество решений, $I = \{1\}, J = \{2\}$. Построив матрицу $\|c'_{ik}\|$ и вычислив величины α и β , получаем табл. 4.5.

Таблица 4.5

	1	2	3	4	5	α
1	—	48	27	31	43	27
2	33	—	28	44	43	28
3	41	28	—	40	36	28
4	37	35	29	—	46	29
5	48	48	25	29	—	25
β	5	0	0	4	8	

Нижняя граница

$$H(\{1\}, \{2\}) = \sum_{i=1}^0 c_{i,i+1} + \sum_{i=1}^5 \alpha_i + \beta_1 + \sum_{i=2}^5 \beta_i = \\ = 0 + (27 + 28 + 28 + 29 + 25) + (5 + 0 + 0 + 4 + 8) = 154.$$

Поскольку $H(\{1\}, \{2\}) < f(x^0)$, то отсечь рассматриваемое множество нельзя.

Вычислим верхнюю оценку для этого множества. Жадный алгоритм строит контур $y = (1, 3, 2, 5, 4, 1)$. Его длина $f(y) = 27 + 28 + 43 + 29 + 37 = 164 = f(x^0)$, и рекорд не меняется.

Текущее дерево ветвления изображено на рис. 4.3.

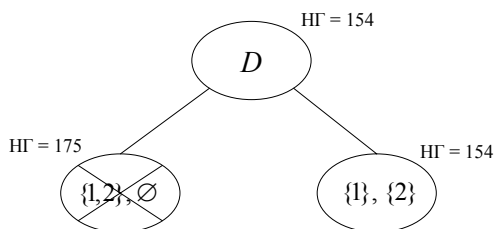


Рис. 4.3

Осуществим ветвление единственного неотсеченного множества ($I = \{1\}, J = \{2\}$) на два подмножества ($I = \{1, 3\}, J = \emptyset$) и ($I = \{1\}, J = \{2, 3\}$).

Рассмотрим первое из них. Имеем $p = 2, I = \{1, 3\}, J = \emptyset$. Получаем табл. 4.6.

Таблица 4.6

	1	2	3	4	5	α
1	—	48	27	31	43	—
2	33	—	28	44	43	33
3	41	28	—	40	36	28
4	37	35	29	—	46	35
5	48	48	25	29	—	29
β	0	0	—	0	8	

Нижняя граница

$$H(\{1, 3\}, \emptyset) = 27 + (33 + 28 + 35 + 29) + (0 + 0 + 0 + 8) = 160.$$

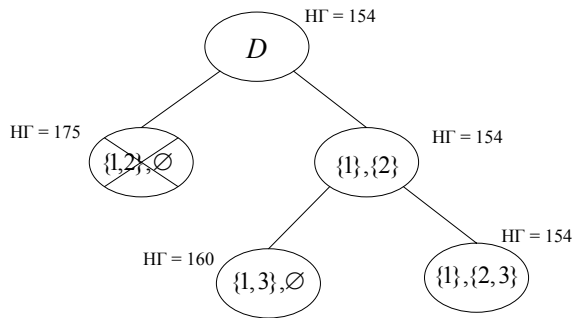
Имеем $H(\{1, 3\}, \emptyset) < f(x^0)$, следовательно, множество не отсекается.

Применяя жадный алгоритм для построения допустимого решения, в котором переход из 1 в 3 фиксирован, получаем обход $y = (1, 3, 2, 5, 4, 1)$ длиной $f(y) = 164 = f(x^0)$. Рекорд не меняется.

Нижняя граница для множества $I = \{1\}, J = \{2, 3\}$ равна $H(\{1\}, \{2, 3\}) = 0 + (31 + 28 + 28 + 29 + 25) + (5 + 0 + 0 + 0 + 8) = 154 < f(x^0)$, поэтому множество не отсекается.

Жадный алгоритм строит контур $y = (1, 4, 3, 2, 5, 1)$ длиной $f(y) = 179 > f(x^0)$, следовательно, рекорд не меняется.

Текущее дерево ветвления представлено на рис. 4.4.



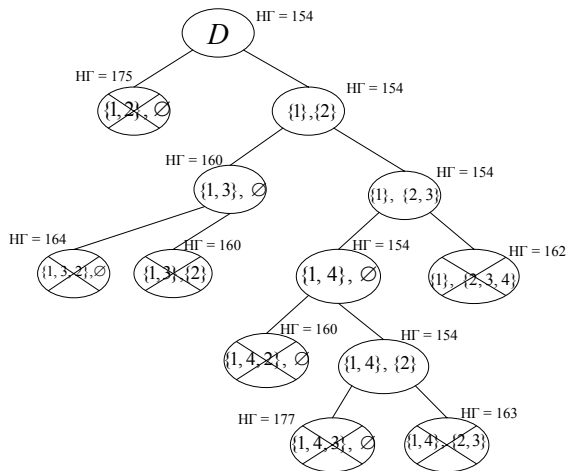


Рис. 4.5

Полное дерево ветвлений изображено на рис. 4.5.

Упражнения

1. Применяя метод ветвей и границ, решить задачу коммивояжера с матрицей расстояний

		До города			
		1	2	3	4
От города	1	—	27	44	28
	2	47	—	43	36
	3	29	26	—	29
	4	34	35	34	—

2. Применяя метод ветвей и границ, решить задачу коммивояжера с матрицей расстояний

		До города				
		1	2	3	4	5
От города	1	–	32	37	37	29
	2	40	–	40	28	31
	3	41	34	–	34	37
	4	36	37	33	–	27
	5	31	39	33	38	–

3. Применяя метод ветвей и границ, решить задачу коммивояжера с матрицей расстояний

		До города						
		1	2	3	4	5	6	7
От города	1	–	29	34	31	44	36	50
	2	31	–	34	34	49	47	31
	3	43	30	–	46	48	36	36
	4	43	28	28	–	45	25	34
	5	35	40	48	33	–	48	33
	6	25	50	45	47	46	–	44
	7	36	48	43	42	37	33	–