

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). $\vec{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$

Пример.

Решить СЛАУ методом Гаусса и методом простых итераций.

$$\begin{bmatrix} -7.000 & -2.000 & 2.000 \\ 1.000 & -7.000 & -3.000 \\ -3.000 & -1.000 & -5.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.000 \\ -7.000 \\ -5.000 \end{bmatrix}$$

Метод Гаусса.

Первый этап. Строим расширенную матрицу и преобразуем её к ступенчатому виду.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7.000 & -2.000 & 2.000 & -7.000 \\ 1.000 & -7.000 & -3.000 & -7.000 \\ -3.000 & -1.000 & -5.000 & -5.000 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7.000 & -2.000 & 2.000 & -7.000 \\ 0.000 & -7.286 & -2.714 & -8.000 \\ -3.000 & -1.000 & -5.000 & -5.000 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7.000 & -2.000 & 2.000 & -7.000 \\ 0.000 & -7.286 & -2.714 & -8.000 \\ 0.000 & -0.143 & -5.857 & -2.000 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7.000 & -2.000 & 2.000 & -7.000 \\ 0.000 & -7.286 & -2.714 & -8.000 \\ 0.000 & 0.000 & -5.804 & -1.843 \end{array} \right]$$

Второй этап. Вычисление неизвестных.

$$x_3 = \frac{-1.843}{-5.804} = 0.318$$

$$x_2 = \frac{(-8 - (-2.714 \cdot 0.318))}{-7.286} = 0.980$$

$$x_1 = \frac{(-7 - (-2 \cdot 0.980 + 2 \cdot 0.318))}{-7} = 0.811$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0.811 \\ 0.980 \\ 0.318 \end{bmatrix}$$

Метод простых итераций.

Преобразуем исходную систему к итерационному виду.

$$\vec{x}^k = \vec{d} - C \cdot \vec{x}^{k-1} \quad \text{где } k=1,2,3,\dots$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0.000 & -0.286 & 0.286 \\ 0.143 & 0.000 & -0.429 \\ -0.600 & -0.200 & 0.000 \end{bmatrix} \quad \vec{x}^0 = \vec{d}$$

$$\|\bar{C}\| = 0.876 < 1$$

	\vec{d}	\bar{C}	\vec{x}^{k-1}	\vec{x}^k	$\Delta \vec{x}$	$\ \Delta \vec{x}\ $			
$\vec{x}^1 =$	$\begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ 1,000 \end{bmatrix}$	$+$	$\begin{bmatrix} 0,000 & -0,286 & 0,286 \\ 0,143 & 0,000 & -0,429 \\ -0,600 & -0,200 & 0,000 \end{bmatrix}$	$*$	$\begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ 1,000 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,714 \\ 0,200 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,000 \\ -0,286 \\ -0,800 \end{bmatrix}$	0,849
$\vec{x}^2 =$	$\begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ 1,000 \end{bmatrix}$	$+$	$\begin{bmatrix} 0,000 & -0,286 & 0,286 \\ 0,143 & 0,000 & -0,429 \\ -0,600 & -0,200 & 0,000 \end{bmatrix}$	$*$	$\begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,714 \\ 0,200 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 0,853 \\ 1,057 \\ 0,257 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,147 \\ 0,343 \\ 0,057 \end{bmatrix}$	0,377
$\vec{x}^3 =$	$\begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ 1,000 \end{bmatrix}$	$+$	$\begin{bmatrix} 0,000 & -0,286 & 0,286 \\ 0,143 & 0,000 & -0,429 \\ -0,600 & -0,200 & 0,000 \end{bmatrix}$	$*$	$\begin{bmatrix} 0,853 \\ 1,057 \\ 0,257 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 0,771 \\ 1,012 \\ 0,277 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,082 \\ -0,045 \\ 0,020 \end{bmatrix}$	0,095
$\vec{x}^4 =$	$\begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ 1,000 \end{bmatrix}$	$+$	$\begin{bmatrix} 0,000 & -0,286 & 0,286 \\ 0,143 & 0,000 & -0,429 \\ -0,600 & -0,200 & 0,000 \end{bmatrix}$	$*$	$\begin{bmatrix} 0,771 \\ 1,012 \\ 0,277 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 0,790 \\ 0,992 \\ 0,335 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,019 \\ -0,020 \\ 0,058 \end{bmatrix}$	0,064
$\vec{x}^5 =$	$\begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ 1,000 \end{bmatrix}$	$+$	$\begin{bmatrix} 0,000 & -0,286 & 0,286 \\ 0,143 & 0,000 & -0,429 \\ -0,600 & -0,200 & 0,000 \end{bmatrix}$	$*$	$\begin{bmatrix} 0,790 \\ 0,992 \\ 0,335 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 0,812 \\ 0,969 \\ 0,328 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,022 \\ -0,022 \\ -0,007 \end{bmatrix}$	0,032
$\vec{x}^6 =$	$\begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ 1,000 \end{bmatrix}$	$+$	$\begin{bmatrix} 0,000 & -0,286 & 0,286 \\ 0,143 & 0,000 & -0,429 \\ -0,600 & -0,200 & 0,000 \end{bmatrix}$	$*$	$\begin{bmatrix} 0,812 \\ 0,969 \\ 0,328 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 0,817 \\ 0,976 \\ 0,319 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,004 \\ 0,006 \\ -0,009 \end{bmatrix}$	0,012
$\vec{x}^7 =$	$\begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ 1,000 \end{bmatrix}$	$+$	$\begin{bmatrix} 0,000 & -0,286 & 0,286 \\ 0,143 & 0,000 & -0,429 \\ -0,600 & -0,200 & 0,000 \end{bmatrix}$	$*$	$\begin{bmatrix} 0,817 \\ 0,976 \\ 0,319 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 0,812 \\ 0,980 \\ 0,315 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,004 \\ 0,004 \\ -0,004 \end{bmatrix}$	0,007

Задания. Системы заданы в виде расширенных матриц.

вариант:1				вариант:17			
-7.000	2.000	-2.000	-7.000	-5.000	-3.000	-3.000	-5.000
-2.000	5.000	-2.000	5.000	0.000	5.000	-3.000	5.000
-3.000	-1.000	-5.000	-5.000	2.000	2.000	5.000	5.000
вариант:2				вариант:18			
-7.000	-1.000	-3.000	-7.000	6.000	-2.000	1.000	6.000
2.000	-7.000	-2.000	-7.000	1.000	-5.000	0.000	-5.000
2.000	-1.000	5.000	5.000	-3.000	-2.000	6.000	6.000
вариант:3				вариант:19			
-6.000	1.000	2.000	-6.000	-5.000	-3.000	2.000	-5.000
1.000	-6.000	-3.000	-6.000	-2.000	-7.000	-3.000	-7.000
-2.000	-1.000	-6.000	-6.000	2.000	0.000	5.000	5.000
вариант:4				вариант:20			
5.000	-2.000	-1.000	5.000	-7.000	1.000	-3.000	-7.000
-3.000	6.000	-2.000	6.000	-2.000	6.000	0.000	6.000
1.000	2.000	-5.000	-5.000	-2.000	-1.000	6.000	6.000
вариант:5				вариант:21			
6.000	1.000	-3.000	6.000	-5.000	-1.000	-1.000	-5.000
-3.000	-7.000	0.000	-7.000	-3.000	6.000	1.000	6.000
-3.000	0.000	-7.000	-7.000	-2.000	2.000	-5.000	-5.000
вариант:6				вариант:22			
5.000	0.000	1.000	5.000	-7.000	2.000	-1.000	-7.000
1.000	4.000	-2.000	4.000	-2.000	5.000	0.000	5.000
1.000	0.000	6.000	6.000	-3.000	0.000	6.000	6.000
вариант:7				вариант:23			
4.000	2.000	-2.000	4.000	4.000	-2.000	-1.000	4.000
1.000	-6.000	-3.000	-6.000	-2.000	-6.000	1.000	-6.000
1.000	-1.000	6.000	6.000	2.000	0.000	5.000	5.000
вариант:8				вариант:24			
4.000	0.000	2.000	4.000	4.000	-3.000	1.000	4.000
1.000	-5.000	-3.000	-5.000	-3.000	-6.000	2.000	-6.000
1.000	2.000	5.000	5.000	1.000	-1.000	6.000	6.000
вариант:9				вариант:25			
5.000	-2.000	-3.000	5.000	-7.000	-3.000	-2.000	-7.000
2.000	5.000	0.000	5.000	-3.000	-5.000	-1.000	-5.000
2.000	1.000	-6.000	-6.000	-1.000	-3.000	-5.000	-5.000
вариант:10				вариант:26			
-7.000	0.000	-2.000	-7.000	4.000	-1.000	1.000	4.000
2.000	-7.000	-2.000	-7.000	1.000	4.000	-2.000	4.000
0.000	2.000	-6.000	-6.000	-1.000	0.000	6.000	6.000
вариант:11				вариант:27			
-7.000	-2.000	-2.000	-7.000	4.000	-2.000	1.000	4.000
0.000	-5.000	-2.000	-5.000	0.000	6.000	-1.000	6.000
-3.000	0.000	5.000	5.000	-1.000	0.000	5.000	5.000
вариант:12				вариант:28			
5.000	-3.000	-3.000	5.000	-5.000	-2.000	1.000	-5.000
-3.000	-7.000	1.000	-7.000	2.000	5.000	2.000	5.000
1.000	-1.000	4.000	4.000	-2.000	1.000	-6.000	-6.000
вариант:13				вариант:29			
-5.000	1.000	-1.000	-5.000	-6.000	1.000	-1.000	-6.000
-1.000	5.000	1.000	5.000	2.000	-6.000	-3.000	-6.000
-3.000	-3.000	-7.000	-7.000	-2.000	2.000	-6.000	-6.000
вариант:14				вариант:30			
-7.000	-2.000	1.000	-7.000	6.000	1.000	2.000	6.000
-2.000	4.000	-2.000	4.000	-2.000	-5.000	2.000	-5.000
-1.000	2.000	-6.000	-6.000	-3.000	-2.000	-7.000	-7.000
вариант:15				вариант:31			
-6.000	0.000	1.000	-6.000	4.000	-1.000	-3.000	4.000
2.000	-6.000	-1.000	-6.000	-3.000	5.000	-2.000	5.000
-2.000	1.000	5.000	5.000	-1.000	0.000	-6.000	-6.000
вариант:16				вариант:32			
4.000	1.000	-1.000	4.000	-7.000	-2.000	-3.000	-7.000
0.000	4.000	2.000	4.000	1.000	-6.000	1.000	-6.000
1.000	-3.000	-5.000	-5.000	0.000	0.000	6.000	6.000