Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»
Институт радиоэлектроники и информационных технологий - РТФ
Кафедра информационных технологий

Домашняя работа (образец**)**

По дисциплине «**Методы оптимизации»**

Тема работы: **Динамическое программирование**

Вариант № ___

Семестр № 1

Оценка (баллы) ______

Преподаватель: доцент Черногородова Г. М. Студент гр. РИМ-150209

______________________ ______________________
(подпись, дата) (ФИО, подпись)

Екатеринбург 2015

Динамическое программирование

Задача о загрузке самолета

Рассмотрим ***задачу целочисленного программирования с нелинейной целевой функцией***.

$$\sum_{j=1}^{n} \omega(C_j, x_j) \to \max ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \ ,$$

$$x_j \ge 0, \quad x_j \text{ - целые.}$$

Будем интерпретировать эту задачу как задачу загрузки самолета, который может быть заполнен различными по весу и ценности грузами.

Пусть известны:

x_j - количество груза j-го типа,

C_j - стоимость единицы груза j-го типа,

a_j - вес единицы груза j-го типа,

ω_j - функция эффективности решения на j-м шаге,

b - максимальная грузоподъемность самолета.

Необходимо выбрать такой набор грузов, при котором максимизируется общая ценность груза.

Индивидуальное задание

Математическая модель задачи

Целевая функция

$$\boldsymbol{Z = c_1 x_1^2 + \sum_{j=2}^{4} c_j x_j \to \max}$$

при ограничениях:

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{4} a_j x_j \le b ,\ \ x \ge 0, \ ,\ \ x_1 \le 3, \quad x \text{ - целое.}}$$

Пусть имеется 4 типа грузов и заданы следующие параметры:

$C=(2,4,1,3), \quad a=(2,3,1,2), \quad b=15.$

Процесс загрузки разобьем на 4 шага по типам грузов так, чтобы на каждом шаге загружался груз только одного типа. Введем обозначения:

b_j - ресурс загрузки на начало j-го шага,

b_0 - начальный ресурс $(b_0=b), \quad b_j=b_{j-1}-a_j x_j, \ (j=1,2,3,4)$,

u_j - решение, принимаемое на j-м шаге: $u_j=x_j$,

ω_j - функция эффективности принятого решения на j-м шаге.

$\omega_j=c_j x_j^{\ 2}$ при $j=1$; $\quad \omega_j=c_j x_j$ при $j=2, 3, 4$.

$$O \xrightarrow[\substack{\omega_1=c_1x_1\\ u_1=x_1}]{b_0=b} O \xrightarrow[\substack{\omega_2=c_2x_2\\ u_2=x_2}]{b_1=b_0-a_1x_1} O \xrightarrow[\substack{\omega_3=c_3x_3\\ u_3=x_3}]{b_2=b_1-a_2x_2} O \xrightarrow[\substack{\omega_4=c_4x_4\\ u_4=x_4}]{b_3=b_2-a_3x_3} O \ \ {\scriptstyle b_4=b_3-a_4x_4}$$

Процесс вычислений начинаем с последнего шага, т.е. из состояния b_3 переходим в состояние b_4, затем последовательно $b_2 \to b_3, b_1 \to b_2, b_0 \to b_1$.

***Шаг* 1**: $b_3 \to b_4$. Вычисляем при $C=(2,4,1,3), \quad a=(2,3,1,2)$

$$f_1(b_3)=\max_{0\le x_4\le\left[b_3/a_4\right]} C_4x_4=3\left[\frac{b_3}{2}\right] \text{ достигается при } x_4^0=\left[\frac{b_3}{2}\right].$$

***Шаг* 2**: $b_2 \to b_3$. Вычисляем

$$f_2(b_2)=\max_{0\le x_3\le\left[b_2/a_3\right]}\left(C_3x_3+f_1(b_3)\right)=$$

$$=\max_{0\le x_3\le b_2}\left(C_3x_3+f_1(b_2-a_3x_3)\right)=\max_{0\le x_3\le b_2}\left(x_3+3\left[\frac{b_2-x_3}{2}\right]\right).$$

Выполним табулирование функции $f_2(b_2)$ для чётных и нечётных значений $0\le x_3 \ge b_2$. Таблица 1

Табулирование функции $\boldsymbol{f_2(b_2)}$

x_3	**0**	**1**	2	3	4 …	b_2
$\boldsymbol{f_2(b_2)}$	$3\left[\frac{b_2}{2}\right]$	$1+3\left[\frac{b_2-1}{2}\right]$	$2+3\left[\frac{b_2-2}{2}\right]$	$3+3\left[\frac{b_2-3}{2}\right]$	$4+3\left[\frac{b_2-4}{2}\right]$	b_2
$b_2=14$	21	19	20	18	19	14
$b_2=15$	21	22	20	21	19	15

Получаем: $f_2(b_2)=1+3\left[\frac{b_2-1}{2}\right]$ при $x_3^0=1$ для ***нечётных*** значений b_2;

$f_2(b_2)=3\left[\frac{b_2}{2}\right]$ при $x_3^0=0$ для ***чётных*** значений b_2.

Для дальнейшего расчёта выберем, например, $x_3^0=1$.

***Шаг* 3**: $b_1 \to b_2$.

$$f_3(b_1)=\max_{0\le x_2\le\left[b_1/a_2\right]}\left(C_2x_2+f_2(b_2)\right) = \max_{0\le x_2\le\left[b_1/3\right]}\left(4x_2+1+3\left[\frac{b_1-3x_2-1}{2}\right]\right).$$

Выполним табулирование функции $f_3(b_1)$ для чётных и нечётных значений $0\le x_2\ge\left[b_1/3\right]$.

Таблица 2

Табулирование функции $f_3(b_1)$

x_2	**0**	**1**	2	3	4	$\left[b_1/3\right]$
$f_3(b_1)$	$1+3\left[\frac{b_1-1}{2}\right]$	$5+3\left[\frac{b_1-4}{2}\right]$				
b_1=9	13	10	12	10	-	-
b_1=10	13	14	12	13	-	-
b_1=14	19	20	18	19	17	-
b_1=15	22	20	21	19	20	18

Получаем $f_3(b_1)=1+3\left[\frac{b_1-1}{2}\right]$, при $x_2^0=0$ для ***нечётных*** значений b_1.

$f_3(b_1)=5+3\left[\frac{b_1-4}{2}\right]$ при $x_2^0=1$ для ***чётных*** значений b_1.

Для дальнейшего расчёта выберем, например, $x_2^0=0$.

***Шаг* 4**: $b_0 \to b_1$

$$f_4(b_0) = \max_{0 \le x_1 \le \left[b_0 / a_1 \right]} \left(C_1 x_1^2 + f_3(b_1) \right) =$$

$$= \max_{0 \le x_1 \le \left[b_0 / a_1 \right]} \left(2x_1^2 + 1 + 3\left[\frac{b_0 - 2x_1 - 1}{2} \right] \right) =$$

$$= \max_{0 \le x_1 \le 7} \left(2x_1^2 + 1 + 3(7 - x_1) \right) = \max_{0 \le x_1 \le 7} \left(2x_1^2 + 22 - 3x_1 \right);$$

Выполним табулирование. Учтём условие $x_1 \le 3$.

Таблица 3

Табулирование функции $f_4\,(b_0)$

x_1	0	1	2	**3**
$f_4(b_0)$	22	21	24	**31**

$f_4(b_0) = 31$, при $x_1^0 = 3$.

Выпишем результаты проделанных шагов:

$f_1(b_3) = 3\left[\frac{b_3}{2} \right]$ при $x_4^0 = \left[\frac{b_3}{2} \right]$;

$f_2(b_2) = 1 + 3\left[\frac{b_2 - 1}{2} \right]$ при $x_3^0 = 1$ и ***нечётном*** значении b_2;

$f_3(b_1) = 1 + 3\left[\frac{b_1 - 1}{2} \right]$ при $x_2^0 = 0$ и b_1 – ***нечётном***;

$f_4(b_0) = 31$ при $x_1^0 = 3$.

Выполним пересчёт результатов b_j, выполняя последовательно шаги, начиная из начального состояния: $b_0 \to b_1$, $b_1 \to b_2$, $b_2 \to b_3$, $b_3 \to b_4$.

$$\mathrm{O} \xrightarrow[\substack{\omega_1 = c_1 x_1 \\ u_1 = x_1}]{b_0 = b} \mathrm{O} \xrightarrow[\substack{\omega_2 = c_2 x_2 \\ u_2 = x_2}]{b_1 = b_0 - a_1 x_1} \mathrm{O} \xrightarrow[\substack{\omega_3 = c_3 x_3 \\ u_3 = x_3}]{b_2 = b_1 - a_2 x_2} \mathrm{O} \xrightarrow[\substack{\omega_4 = c_4 x_4 \\ u_4 = x_4}]{b_3 = b_2 - a_3 x_3} \mathrm{O} \quad b_4 = b_3 - a_4 x_4$$

1. $x_1^0 = 3$, $b_1 = b_0 - a_1 x_1^0 = 9$. b_1 – ***нечётное***!
2. $x_2^0 = 0$, $b_2 = b_1 - a_2 x_2^0 = 9$. b_2 – ***нечётное***!
3. $x_3^0 = 1$, $b_3 = b_2 - a_3 x_3^0 = 8$.
4. $x_4^0 = 4$, $b_4 = b_3 - a_4 x_4^0 = 8 - 2 * 4 = 0$.

Получили оптимальное решение $x^0 = (3, 0, 1, 4)$, при котором значение целевой функции $Z(x^0)$ = 2*3^2+1*1+3*4 = 31.

Список литературы

1. Аттетков А.В. Методы оптимизации: учеб. для вузов / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 440 с.
2. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Книга 1. Учебник для вузов. М.: МЦМНО, **2011**.- 620 с.
3. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации. Практический курс. Учеб. пособие. М.: Логос, **2011**.- 424 с.
4. Черногородова Г.М. Методы оптимизации. Нелинейное программирование: учебное пособие/ Г.М. Черногородова. Екатеринбург: УГТУ - УПИ, 2007. 113 с.
5. Черногородова Г.М. Теория принятия решений: учебное пособие/ Г.М. Черногородова. Екатеринбург: УГТУ - УПИ, 2006. 183 с.