

Министерство образования и науки РФ

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»

Анализ электрических цепей

Учебное пособие к курсовой работе по теоретической электротехнике

Санкт-Петербург
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2011

УДК 621.3
ББК 3 21
Б 95

Авторы: Барков А.П., Бычков Ю.А., Дегтярев С.А., Завьялов А.Е.,
Золотницкий В.М., Зубарев А.В., Иншаков Ю.М., Морозов Д.А.,
Панкин В.В., Портной М.С., Соклакова М.В., Соколов В.Н.,
Соловьева Е.Б., Чернышев Э.П.

Анализ электрических цепей. Учебное пособие к курсовой работе по
теоретической электротехнике / Под ред. Бычкова Ю.А., Соловьевой Е.Б.,
Чернышева Э.П. СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011. – 176 с.

Рассматриваются разнообразные вопросы качественного и
количественного анализа характеристик электрических цепей и
проходящих через цепи сигналов, исследования и проектирования
линейных, нелинейных, активных и дискретных цепей, использования
машинных методов моделирования цепей.

Предназначено для самостоятельной работы студентов всех
направлений и специальностей электротехнического университета.

УДК 621.3
ББК 3 21
Б 95

КУРСОВОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Курсовое проектирование по теории электрических цепей занимает важное место в формировании знаний студентов по дисциплинам электротехнической подготовки: основам теории цепей, теоретической электротехнике, теоретическим основам электротехники.

Курсовые работы выполняются студентами электротехнического университета, во-первых, в различных семестрах обучения в соответствии с учебными планами, и, во-вторых, с учетом специфики факультетов и специальностей. Этим обусловлено и различное построение изложения материала, и многообразие приведенных ниже тем выполняемых студентами курсовых работ, в которых рассматриваются разнообразные вопросы качественного и количественного анализа характеристик электрических цепей и проходящих через цепи сигналов, исследования линейных, нелинейных, активных и дискретных цепей, использования машинных методов моделирования цепей и методов оценки чувствительности цепи к изменению ее параметров. Ряд пунктов курсовых расчетов выполняется в плане научно-исследовательской работы студентов (НИРС).

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ

Курсовую работу выполняют в соответствии с действующими стандартами в виде пояснительной записки на листах бумаги одиннадцатого формата (210×297) или на листах формата А4. Титульный лист оформляют в соответствии с образцом, помещенным на стенде кафедры ТОЭ.

Первым листом пояснительной записки должно быть оглавление, вторым – техническое задание; в конце пояснительной записки приводят заключение (выводы по курсовой работе в целом) и список использованной литературы. Все листы пояснительной записки следует пронумеровать.

Схемы и графики с указанием порядкового номера и названия рисунка размещают в соответствующих местах записки. На все рисунки и таблицы должны быть ссылки по тексту.

Расчеты следует сопровождать краткими, ясными комментариями и ссылками на использованную литературу. *Промежуточные цифровые преобразования опускают.* Необходимые для построения графиков результаты расчетов сводят в таблицы. Данные машинных расчетов и программ

приводят с соответствующими пояснениями.

Схемы, обозначения элементов, таблицы, графики, обозначения величин и единиц измерения должны соответствовать действующим стандартам; по осям графиков указывают размерность и масштаб величин. Заголовки основных пунктов курсовой работы должны быть выделены.

Защита курсовой работы осуществляется путем индивидуального собеседования преподавателя (комиссии) со студентом. К защите допускаются студенты, представившие полностью и правильно выполненную работу. При выставлении оценки учитываются: понимание студентом выполненных расчетов и графических построений, знание использованных понятий и методов, умение трактовать и контролировать полученные результаты, а также оценка ответов на контрольные вопросы по курсовой работе.

Тема 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Целью курсовой работы является практическое освоение различных методов анализа во временной области характеристик цепей и искажений проходящих через цепи сигналов.

В процессе работы требуется определить основные характеристики цепи и исследовать реакцию цепи при действии на входе одиночного импульса.

1.1. Задание к курсовой работе

На вход электрической цепи в момент $t = 0$ подается импульс напряжения u_1 (варианты схем 1...6) или импульс тока i_1 (варианты схем 7...12). Реакцией цепи в первом случае является напряжение $u_2 = u_{R2}$, во втором – ток $i_2 = i_{R2}$. Параметры импульсов и значения элементов схем приведены в табл. 1.1, 1.2, графики импульсов – на рис. 1.1. Номер варианта задания соответствует порядковому номеру студента в списке группы.

Варианты схем заданы тройками чисел.

Схема 1: 114 – u_1 , 212 – R_1 , 324 – C_1 , 423 – L_1 , 534 – C_2 , 634 – R_2 .

Схема 2: 115 – u_1 , 212 – R_1 , 323 – L_1 , 435 – C_1 , 534 – L_2 , 645 – R_2 .

Схема 3: 114 – u_1 , 212 – R_1 , 323 – L_1 , 423 – C_1 , 534 – C_2 , 634 – R_2 .

Схема 4: 114 – u_1 , 212 – R_1 , 324 – C_1 , 423 – L_1 , 523 – C_2 , 634 – R_2 .

Схема 5: 115 – u_1 , 212 – R_1 , 323 – L_1 , 435 – C_1 , 524 – L_2 , 645 – R_2 .

Схема 6: $115 - u_1, 212 - R_1, 323 - L_1, 434 - L_2, 545 - C_1, 635 - R_2$.

Схема 7: $131 - i_1, 213 - R_1, 313 - C_1, 412 - L_1, 523 - C_2, 623 - R_2$.

Схема 8: $141 - i_1, 214 - R_1, 312 - L_1, 424 - C_1, 523 - L_2, 634 - R_2$.

Схема 9: $131 - i_1, 213 - R_1, 312 - L_1, 412 - C_1, 523 - C_2, 623 - R_2$.

Схема 10: $131 - i_1, 213 - R_1, 313 - C_1, 412 - L_1, 512 - C_2, 623 - R_2$.

Схема 11: $141 - i_1, 214 - R_1, 312 - L_1, 424 - C_1, 513 - L_2, 634 - R_2$.

Схема 12: $141 - i_1, 214 - R_1, 312 - L_1, 423 - L_2, 534 - C_1, 624 - R_2$.

Таблица 1.1

Вариант		Импульс		
задания	схемы	Рис.1.1	Амплитуда $U_m, В$ или $I_m, А$	Длительность $t_{и}, мкс$
1	1	д	100	12,56
2	2	г	100	9,42
3	3	а	100	12,56
4	4	б	100	3,14
5	5	в	100	31,4
6	6	г	100	62,8
7	7	д	2	25,12
8	8	а	2	4,71
9	9	г	2	15,7
10	10	в	2	62,8
11	11	б	2	12,56
12	12	а	2	3,14
13	1	г	100	4,71
14	2	д	100	25,12
15	3	б	100	62,8
16	4	в	100	1,57
17	5	а	100	31,4
18	6	д	100	12,56
19	7	б	2	25,12
20	8	в	2	3,14

Таблица 1.2

Схема	$R_1 = R_2, кОм$	$L_1, мГн$	$L_2, мГн$	$C_1, пФ$	$C_2, пФ$
1	0,5	0,5	–	1000	1000
2	2	2	2	1000	–
3	0,9	0,8	–	555	1000
4	1,8	0,4	–	123,6	69,5
5	0,36	0,45	0,8	6180	–
6	3,6	16	9	1236	–
7	0,5	1	–	2000	2000
8	2	1	1	500	–
9	2,78	6,18	–	450	800
10	0,28	1,236	–	16000	9000
11	1,11	0,555	1	800	–
12	0,555	0,1236	0,0695	400	–

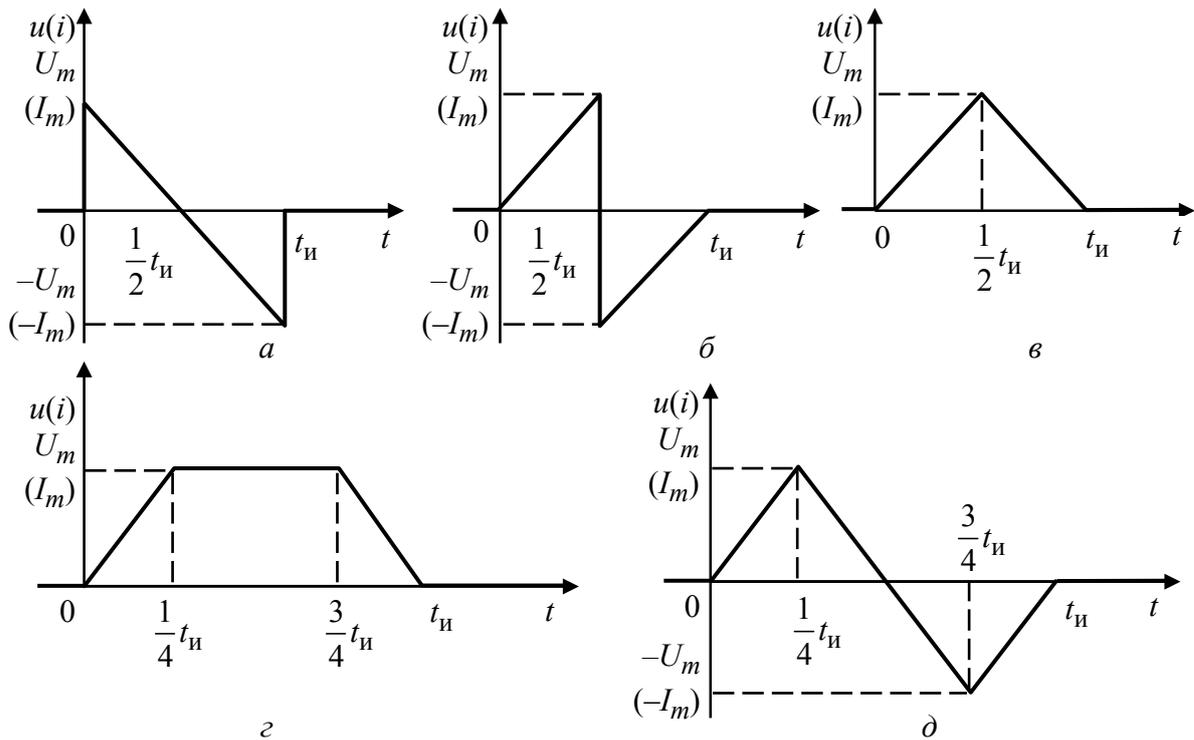


Рис.1.1

В курсовой работе должны быть выполнены следующие пункты:

1. Нормирование параметров и переменных цепи.
2. Составление уравнений переменных состояния цепи.
3. Определение корней характеристического уравнения цепи (частот собственных колебаний цепи).
4. Определение переходной характеристики цепи $h_1(t)$ аналитическим и численным методами.
5. Определение импульсной характеристики цепи $h(t)$ и характеристики $h_2(t)$.
6. Расчет реакции цепи при действии на входе одиночного импульса.

При выполнении п. 4 следует построить (на одном рисунке) графики переходных характеристик, сравнить их в трех характерных точках, а также приблизительно оценить длительность переходного процесса в цепи по 5 %-му критерию относительно $h_{1\text{уст}}$.

При выполнении п. 5 необходимо построить графики $h(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$, расположив их один под другим и указав на графике $h_1(t)$ составляющие переходного процесса.

При выполнении п. 6 следует построить (на одном рисунке) график реакции цепи и график входного одиночного импульса с амплитудой $0,5U_m$ (или

$0,5I_m$), а также оценить качественные изменения формы сигнала на выходе, изменения амплитуды сигнала и его запаздывание относительно воздействия.

1.2. Указания к выполнению курсовой работы

Нормирование параметров и переменных цепи

В курсовой работе при нормировке (т. е. масштабировании) времени t_* , частоты ω_* , сопротивлений R_* , индуктивностей L_* и емкостей C_* используют формулы [1 – 3]

$$\begin{cases} t_* = t / t_0, \omega_* = \omega / \omega_0, \\ R_* = R / R_0, L_* = L\omega_0 / R_0, C_* = C\omega_0 R_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

при этом базисные значения времени (или частоты) целесообразно принять $t_0 = 10^{-6}$ с (т. е. $\omega_0 = 10^6$ с $^{-1}$), так как продолжительность действия входных импульсов составляет микросекунды. В качестве базисного сопротивления R_0 удобно выбрать сопротивление нагрузки $R_H = R_2$.

В случае нормирования воздействия в качестве базисного значения обычно принимают его максимальное значение:

$$u_{1*} = u_1 / U_{m1}; \quad i_{1*} = i_1 / I_{m1}. \quad (1.2)$$

Формулы (1.1), (1.2) также используют для денормировки, т. е. определения действительных значений переменных и параметров цепи по их нормированным безразмерным величинам.

Составление уравнений переменных состояния цепи

Уравнения состояния цепи n -го порядка имеют вид [1, 2]

$$[x'(t)] = [A][x(t)] + [B][y(t)], \quad (1.3)$$

где $[x(t)]$, $[y(t)]$ – матрицы переменных состояния и воздействий; $[A]$, $[B]$ – матрицы, определяемые параметрами цепи.

В качестве переменных состояния выбирают напряжения емкостных элементов u_{Ck} и токи индуктивных элементов i_{Lj} . Наиболее простым методом формирования (1.3) является следующий: заменив индуктивные элементы источниками тока i_{Lj} , а емкостные элементы – источниками напряжения u_{Ck} , получают R -цепь с источниками. Одним из методов расчета R -цепей определяют напряжение u_{Lj} источников тока i_{Lj} и токи i_{Ck} ис-

точников напряжения u_{Ck} как функции переменных состояния $i_{Lj}(t)$, $u_{Ck}(t)$ и воздействующих источников $u_{0m}(t), i_{0n}(t)$. Уравнения состояния (1.3) находят, используя формулы

$$u'_{Ck} = i_{Ck} / C_k; \quad i'_{Lj} = u_{Lj} / L_j.$$

Если искомая реакция $f_2(t)$ не является переменной состояния, то ее находят по переменным состояния и воздействиям на основании алгебраических уравнений связи [1].

Определение корней характеристического уравнения

Как известно [1], характеристическое уравнение цепи (характеристический полином) имеет вид:

$$\det([A] - p[E]) = 0,$$

где $[E]$ – единичная матрица n -го порядка.

В курсовой работе исследуются цепи третьего порядка, поэтому характеристическое уравнение имеет вид:

$$p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. \quad (1.4)$$

Для нахождения корней уравнения (1.4) используют, например, метод итераций, метод Ньютона–Рафсона [4] и др.

Определение переходной характеристики цепи $h_1(t)$.

А. Аналитический метод расчета

Для определения $h_1(t)$ находят точное решение уравнений состояния (1.3) относительно тех переменных состояния $x(t)$, с которыми связаны искомые переменные (реакции), приняв воздействие $u_1(t)$ или $i_1(t)$ равным $\delta_1(t)$.

Общий вид решения в случае простых корней

$$x(t) = x_{\text{вын}} + \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (1.5)$$

где $x_{\text{вын}}$ – вынужденная составляющая, которая может быть определена по уравнениям состояния (1.3) для вынужденного режима, когда $[x'(t)] = [0]$, или по эквивалентной схеме замещения, в которой L -элементы эквивалентны короткозамкнутым элементам (КЗ), а C -элементы – разомкнутому участку, т. е. холостому ходу (ХХ).

Постоянные A_k в (1.5) определяют, используя начальные значения переменных состояния $x(0+) = 0$ и начальные значения $(n - 1)$ производных переменных состояния, которые получают в результате последовательного дифференцирования уравнений состояния (1.3).

Б. Численный метод расчета $h_1(t)$

При численном интегрировании уравнений состояния (1.3) на ЦВМ используют различные методы [1], наиболее простым из которых, не отличающимся, однако, высокой точностью, является метод Эйлера.

Алгоритм явной формы метода Эйлера имеет вид:

$$[x_{k+1}] = [x_k] + ([A][x_k] + [B][y_k])\Delta t,$$

где $[x_{k+1}]$ и $[x_k]$ – значения переменных состояния на $(k + 1)$ -м и k -м шагах расчета; $[y_k]$ – значения воздействий на k -м шаге (при расчете переходной характеристики $[y_k] = 1$); $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ – продолжительность шага, которую выбирают достаточно малой в соответствии с требуемой точностью расчета (см. также тему 2).

При численном анализе можно избежать составления дифференциальных уравнений цепи, если применить приближенные резистивные дискретные схемы замещения [1, 3] емкостных и индуктивных элементов.

Определение импульсной характеристики $h(t)$, характеристики $h_2(t)$ и расчет реакции цепи при действии на входе одиночного импульса

Для получения импульсной характеристики цепи $h(t)$ дифференцируют переходную характеристику [2]:

$$h(t) = \frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{d[h_1(t)^* \delta_1(t)]}{dt} = h_1'(t)^* \delta_1(t) + h_1(0+) \delta(t),$$

где $h_1(t)^*$ – аналитическое продолжение $h_1(t)$ при $t < 0$.

Интегрируя $h_1(t)$, получают характеристику $h_2(t)$:

$$h_2(t) = \int_0^t h_1(t) dt; \quad t > 0.$$

Полученные характеристики $h_1(t)$, $h(t)$, $h_2(t)$ используют для расчета реакции при действии на входе одиночного импульса, который в курсо-

вой работе представляет собой кусочно-линейную функцию (с разрывами первого рода в некоторых вариантах).

Такой импульс можно представить суммой стандартных функций $\delta_2(t)$, $\delta_1(t)$ с постоянными коэффициентами методом разложения его на элементарные составляющие или методом двойного дифференцирования [2].

Тогда и реакцию можно определить как сумму стандартных реакций $h_1(t)$, $h_2(t)$ с теми же коэффициентами. Например, если воздействие $f_1(t) = \sum_{(k)} A_k \delta_2(t - t_k)$, то реакция $f_2(t) = \sum_{(k)} A_k h_2(t - t_k)$.

1.3. Контрольные вопросы

1. Что такое уравнения состояния?
2. Что такое уравнения связи в курсовой работе?
3. Как расположение корней на комплексной плоскости влияет на вид переходного процесса?
4. Как определяется время переходного процесса по виду корней характеристического полинома?
5. Зачем нужна нормировка?
6. Применяется ли в курсовой работе принцип пропорциональности?
7. Применяется ли в курсовой работе метод наложения?
8. Применяется ли в курсовой работе принцип дифференцируемости?
9. Что такое свободная составляющая решения и свободный режим в цепи?
10. Почему корни характеристического полинома располагаются в левой полуплоскости?
11. Почему свободная составляющая затухает?
12. Что такое переходная характеристика?
13. Что такое импульсная характеристика?
14. Что такое $\delta_2(t)$ и $h_2(t)$?
15. Что такое $h_1(t)$ и $h_1(t)^*$?
16. Используется ли в курсовой работе дельта-функция?
17. Как найти производную в точке разрыва первого рода?
18. Чем отличаются производные от непрерывной и разрывной функций?
19. Чему равно произведение $f(t)$ на $\delta_1(t)$?
20. Чем отличаются графики $f(t)\delta_1(t)$ от $f(t)\delta_1(t-2)$?
21. Чем отличаются графики $f(t)\delta_1(t)$ от $f(t-2)\delta_1(t-2)$?

22. Как проверить $h_1(0+)$ по схеме?
23. Как проверить $h_{1\text{ВЫХ}}$?
24. Почему в курсовой работе $h_1(0+) = 0$?
25. Почему $h_2(t)$ – непрерывная функция?
26. Какую форму в курсовой работе имеет $h_{2\text{ВЫХ}}(t)$?
27. Чему равно $h_1(0+)$, если элементы L и C поменять местами?
28. Чему равно $h_{1\text{ВЫХ}}$, если элементы L и C поменять местами?
29. Будет ли $h(t)$ содержать δ -функцию, если элементы L и C поменять местами?
30. Как построить график реакции цепи с $h_1(t) = e^{-t}\delta_1(t)$ при действии на входе прямоугольного импульса с длительностью $t_{\text{И}} = 3\text{с}$?
31. Как построить график $(4 + 10 e^{-5t})\delta_1(t)$?
32. Как построить графики $\sin(\pi t)\delta_1(t)$ и $\sin \pi(t-1)\delta_1(t-1)$?
33. Как построить график $10 e^{-5(t-2)}\delta_1(t)$?
34. Как построить график $10 \cos(2t + 135^\circ)$?
35. Как построить график $10 \cos(2t - 135^\circ)$?
36. Как построить график $10 e^{-t/2} \cos(\pi t)$?
37. Как построить график $10 e^{-t/2} \sin(\pi t)$?
38. Как построен график $h_1(t)$?
39. Как построен график $h(t)$?
40. Как получена фаза затухающей синусоиды в $h_1(t)$?
41. Как получена фаза затухающей синусоиды в $h(t)$?
42. Подтверждает ли сравнение графиков $h(t)$ и $h_1(t)$ правильность расчетов?
43. Как построен график $f_{\text{ВЫХ}}(t)$?
44. Почему составляющие $f_{\text{ВЫХ}}(t)$ содержат множители $\delta_1(t-t_k)$ и как это отражено на графике $f_{\text{ВЫХ}}(t)$?
45. Почему $f_{\text{ВЫХ}}(t)$ не равно 0 по окончании входного импульса?
46. Как оценить длительность переходных процессов по графикам $h(t)$, $h_1(t)$, $f_{\text{ВЫХ}}(t)$?

47. Как выбран шаг численного расчета?
48. Соответствуют ли друг другу данные аналитического и численного расчетов?
49. Как осуществляется численное решение уравнений состояния?
50. Как построить графики $e^{-t}\delta_1(t)$, $e^{-t}\delta_1(t-2)$, $e^{-(t-2)}\delta_1(t-2)$?

1.4. Типовой пример

Цепь задана тройками чисел [3]: 115-ИН u_1 ; 212- R_1 ; 325- R_3 ; 423- L , 535- C ; 634- R_4 ; 745- R_2 . Рассматриваемая в примере цепь имеет вид, приведенный на рис. 1.2. На вход цепи подается импульс напряжения $u_1(t)$, изображенный на рис.1.3. Параметры элементов цепи и данные импульса:

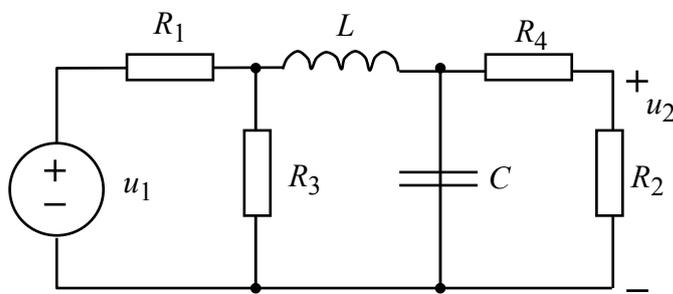


Рис. 1.2

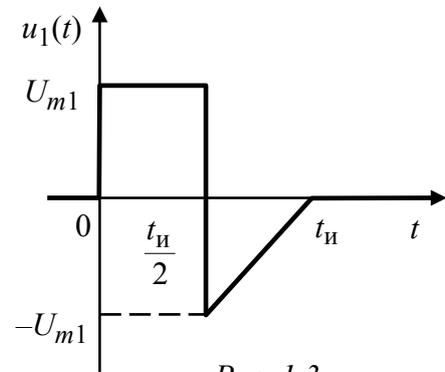


Рис. 1.3

$R_1 = 0,25$ кОм; $R_2 = 4$ кОм; $R_3 = 1$ кОм; $R_4 = 1$ кОм; $L = 0,1$ мГн; $C = 100$ пкФ; $U_{m1} = 20$ В; $t_{И} = 2 \cdot 10^{-6}$ с.

Нормирование параметров и переменных цепи

За базисные величины принимаем $t_{\bar{6}} = 10^{-6}$ с (т. е. $\omega_{\bar{6}} = 10^6$ с $^{-1}$), $R_{\bar{6}} = R_2 = 4$ кОм. Согласно (1.1) нормированные безразмерные параметры $R_{1*} = 0,0625$; $R_{2*} = 1$; $R_{3*} = R_{4*} = 0,25$; $L^* = 0,025$; $C^* = 0,4$. В дальнейшем «звездочки» у нормированных параметров опускаем, считая все параметры нормированными.

Составление уравнений состояния

Схема замещения исходной цепи с вспомогательными источниками $u_C(t)$ и $i_L(t)$ при $t > 0$ приведена на рис. 1.4.

Применяя методику расчета R -цепей, находим $i_C(t)$ и $u_L(t)$:

$$\begin{cases} i_C = -\frac{1}{R_2 + R_4} u_C + i_L, \\ u_L = -u_C - \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} i_L + \frac{R_3}{R_1 + R_3} u_1. \end{cases}$$

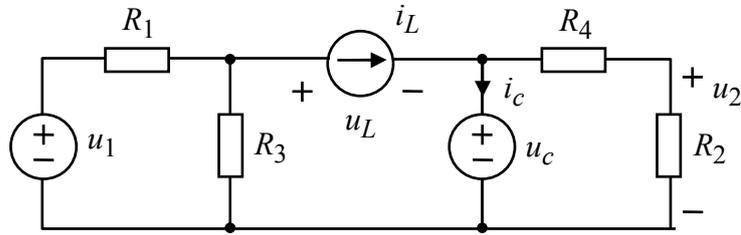


Рис. 1.4

Переходим к уравнениям состояния, используя формулы $u'_C = i_C / C$, $i'_L = u_L / L$:

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C(R_2 + R_4)} u_C + \frac{1}{C} i_L, \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} u_C - \frac{R_1 R_3}{L(R_1 + R_3)} i_L + \frac{R_3}{L(R_1 + R_3)} u_1. \end{cases} \quad (1.6)$$

После подстановки численных значений элементов записываем уравнение (1.6) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} u'_C \\ i'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2,5 \\ -40 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 32 \end{bmatrix} [u_1], \quad (1.7)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} -2 & 2,5 \\ -40 & -2 \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

Уравнение связи реакции цепи u_C с переменными состояния и входным сигналом имеет согласно рис. 1.4 вид

$$u_2(t) = 0 \cdot i_L(t) + \frac{4}{5} u_C(t) + 0 \cdot u_1 = \frac{4}{5} u_C(t). \quad (1.8)$$

Определение корней характеристического уравнения цепи

Характеристическое уравнение цепи равно $\det([A] - p[E]) = 0$, т. е. с учетом (1.7) находим

$$\det \begin{pmatrix} -2 - p & 2,5 \\ -40 & -2 - p \end{pmatrix} = p^2 + 4p + 104 = 0,$$

откуда корни характеристического уравнения цепи (частоты собственных колебаний цепи)

$$p_{1, 2} = -2 \pm \sqrt{4 - 104} = -2 \pm j10.$$

По виду корней можно сделать вывод о характере свободного режима в цепи и практической длительности переходного процесса.

Определение переходной характеристики цепи

Вначале находим переходную характеристику $h_1(t)$ относительно $u_C(t)$, а затем по уравнению связи (1.8) определяем $h_1(t)$ относительно заданной реакции $u_2(t)$.

А. Аналитический метод расчета

Решение ищем в виде

$$u_C(t) = u_{C\text{ВЫН}} + u_{C\text{СВ}}(t) = u_{C\text{ВЫН}} + A_1 e^{-2t} \cos 10t + A_2 e^{-2t} \sin 10t. \quad (1.9)$$

Вынужденную составляющую определяем из уравнений состояния (1.7), приравнивая левую часть уравнения нулю (причем $u_1(t) = \delta_1(t) = 1$):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2,5 \\ -40 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C\text{ВЫН}} \\ i_{L\text{ВЫН}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 32 \end{bmatrix} [1],$$

откуда

$$u_{C\text{ВЫН}} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2,5 \\ -32 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 2,5 \\ -40 & -2 \end{vmatrix}} \cong 0,769 \text{ В.}$$

Вынужденную составляющую можно также найти из схемы замещения рис. 1.5, составленной для вынужденного (установившегося) режима при $t \rightarrow \infty$.

Для определения A_1 и A_2 в (1.9) необходимо знать начальные условия $u_C(0+)$ и $u'_C(0+)$. Значение $u'_C(0+)$ находим из уравнений состояния (1.7) с учетом $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$, $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$:

$$u'_C(0+) = -2u_C(0+) + 2,5i_L(0+) = 0.$$

Дифференцируем уравнение (1.9):

$$\begin{aligned} u'_C(t) = & 0 - 2A_1 e^{-2t} \cos 10t - 10A_1 e^{-2t} \sin 10t - \\ & - 2A_2 e^{-2t} \sin 10t + 10A_2 e^{-2t} \cos 10t. \end{aligned} \quad (1.10)$$

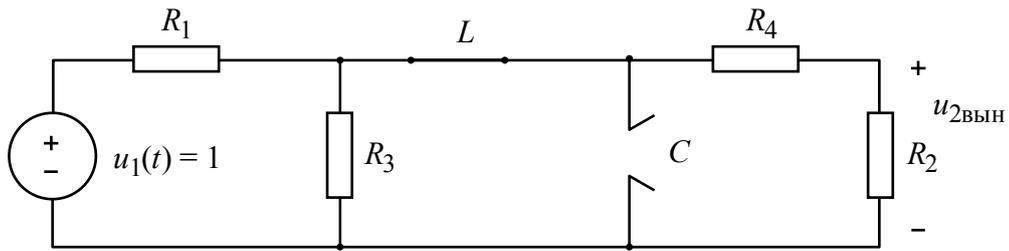


Рис. 1.5

Решаем систему уравнений (1.9) и (1.10) при $t = 0 +$

$$\begin{cases} u_C(0+) = u_{C\text{ВЫИ}} + A_1 \\ u'_C(0+) = -2A_1 + 10A_2 \end{cases}$$

где $u_C(0+) = 0, u'_C(0+) = 0, u_{C\text{ВЫИ}} \simeq 0,769$; получим $A_1 \simeq -0,769$, $A_2 \simeq -0,154$. Тогда

$$u_C(t) = (0,769 - 0,769e^{-2t} \cos 10t - 0,154e^{-2t} \sin 10t) \delta_1(t).$$

Учитывая уравнение связи (1.8), находим переходную характеристику $h_1(t)$ для реакции $u_2(t)$

$$h_1(t) = (0,615 - 0,615e^{-2t} \cos 10t - 0,123e^{-2t} \sin 10t) \delta_1(t). \quad (1.11)$$

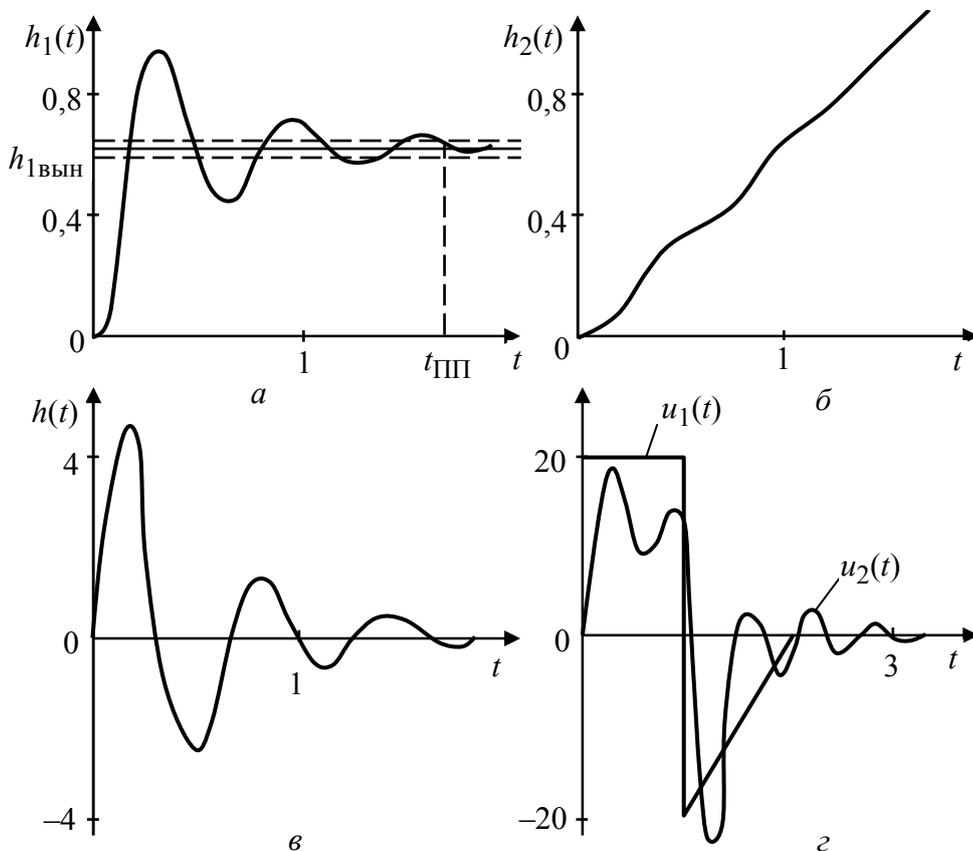


Рис. 1.6

Для построения графика $h_1(t)$ следует упростить выражение (1.11), сложив два гармонических колебания одной и той же частоты [1, 2]. Окончательно находим

$$h_1(t) = [0,615 + 0,624e^{-2t} \cos(10t + 169^\circ)] \delta_1(t). \quad (1.12)$$

Выражение (1.12) следует проконтролировать по схемам замещения, составленным для предельных значений времени $t = 0+$ и $t \rightarrow \infty$.

График, рассчитанный на основании (1.12), показан на рис. 1.6, а сплошной линией, на графике приближенно определена длительность переходного процесса $t_{\text{ПП}}$ в цепи по 5%-му критерию (относительно установившегося значения $h_{1\text{вын}}$).

Б. Численный метод расчета

Численный расчет на ЦВМ выполнен с использованием алгоритма Рунге–Кутты. При реализации стандартной программы возникает вопрос о выборе шага численного интегрирования, для решения которого следует исходить из длительности переходного процесса, периода собственных затухающих колебаний цепи и ее постоянной времени. В приведенном примере $t_{\text{ПП}} \simeq 1,5$. $T = 0,628$, $\tau = 0,5$. Чтобы не потерять характерных точек кривой, достаточно в данном примере взять на четверти периода 5–10 точек. Поэтому выбран шаг вычислений $\Delta t = 0,02$. Графики $h_1(t)$, полученные в результате численного и аналитического расчетов (см. рис. 1.6, а), в данном случае практически совпадают.

Определение импульсной характеристики цепи и характеристики $h_2(t)$

Импульсную характеристику $h(t)$ получаем в результате дифференцирования переходной характеристики (1.11) с учетом того, что $h_1(0+) = 0$:

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-2t} (1,23 \cos 10t + 6,15 \sin 10t + 0,246 \sin 10t - 1,23 \cos 10t) \delta_1(t) = \\ &= 6,4e^{-2t} \sin 10t \delta_1(t). \end{aligned}$$

Для нахождения характеристики $h_2(t)$ необходимо проинтегрировать переходную характеристику. Для $t > 0$ находим

$$h_2(t) = \int_0^t h_1(t) dt = \left(\int_0^t 0,615 dt - 0,615 \int_0^t e^{-2t} \cos 10t dt - 0,123 \int_0^t e^{-2t} \sin 10t dt \right).$$

Используя табличные интегралы вида $\int_0^t e^{-ax} \cos bx dx$ и

$\int_0^t e^{-ax} \sin bx dx$ из [4], получим

$$-0,615 \int_0^t e^{-2t} \cos 10t dt = -0,615 \left[\frac{e^{-2t}}{4+100} (-2 \cos 10t + 10 \sin 10t) \right]_0^t =$$

$$= 0,0118 e^{-2t} \cos 10t - 0,0592 e^{-2t} \sin 10t - 0,0118;$$

$$-0,123 \int_0^t e^{-2t} \sin 10t dt = -0,123 \left[\frac{e^{-2t}}{4+100} (-2 \sin 10t - 10 \cos 10t) \right]_0^t =$$

$$= 0,00237 e^{-2t} \sin 10t + 0,0118 e^{-2t} \cos 10t - 0,0118;$$

тогда $h_2(t) = 0,615t - 0,0236 + e^{-2t} (0,0236 \cos 10t - 0,0568 \sin 10t)$.

Для удобства построения графика $h_2(t)$ два гармонических колебания одной частоты приводим к одному колебанию той же частоты; в результате получим для $-\infty < t < +\infty$

$$h_2(t) = \left[0,615t - 0,0236 + 0,0615 e^{-2t} \cos(10t + 67^\circ) \right] \delta_1(t);$$

для проверки вычислений имеет смысл проконтролировать $h_2(0+) = 0$.

Графики полученных характеристик $h(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ для реакции $u_2(t)$ приведены на рис. 1.6 а, б, в. Проанализировав характер изменения $h(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$, следует убедиться в правильности графиков.

Расчет реакции цепи при действии на входе одиночного импульса

На рис. 1.7 показаны два метода аналитического описания входного импульса $u_1(t)$ (см. рис. 1.3).

Так, на рис. 1.7, *а* реализован метод разложения сигнала на элементарные составляющие, где импульс $u_1(t)$ описан совокупностью следующих элементарных функций 1, 2, 3, 4, т.е.: $u_1(t) = 20\delta_1(t) - 40\delta_1(t-1) + 20\delta_2(t-1) - 20\delta_2(t-2)$.

Рис. 1.7, *б* иллюстрирует метод двойного дифференцирования. Здесь представлены исходный сигнал $u_1(t)$, его первая и вторая производные:

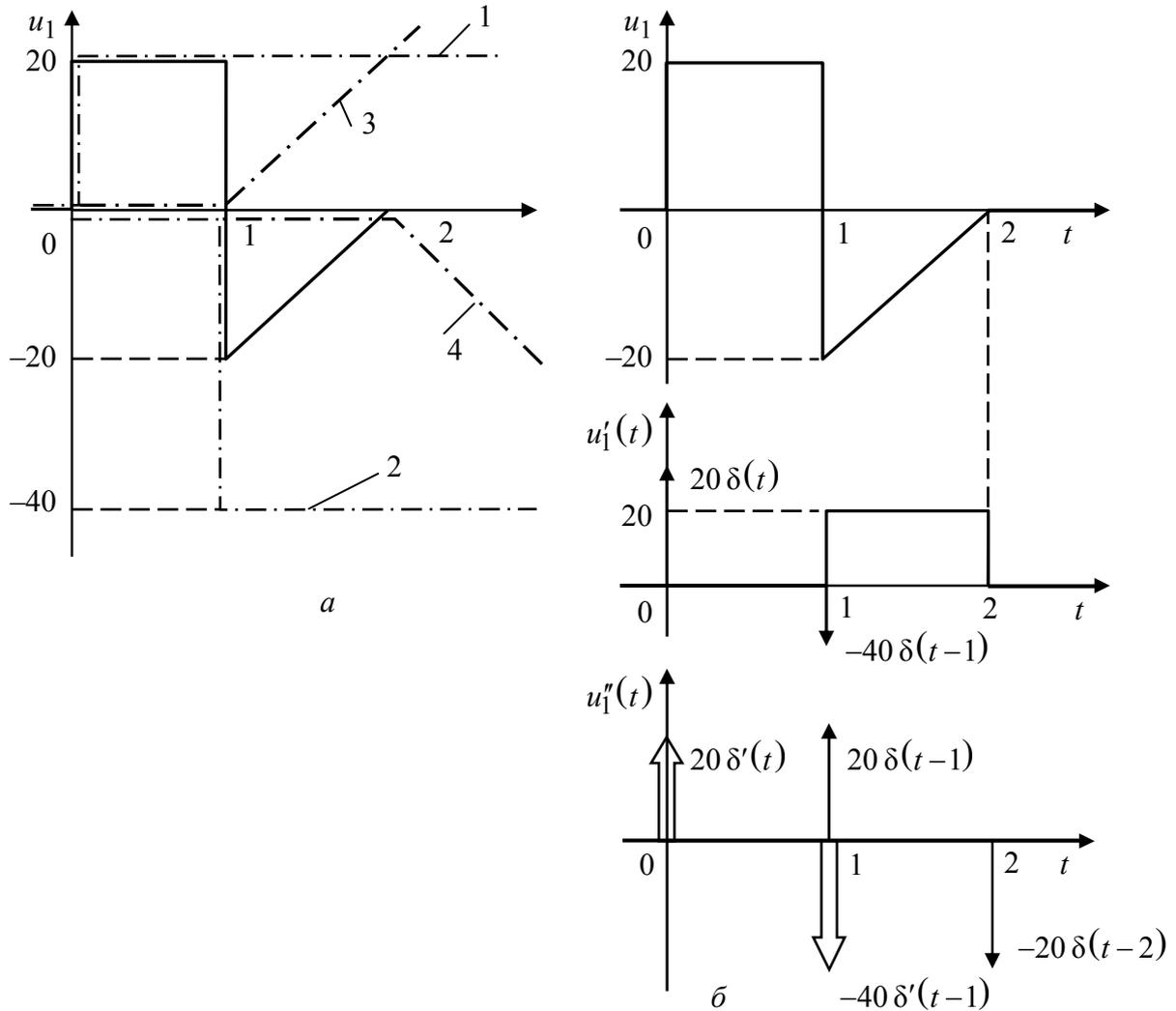


Рис. 1.7

В соответствии с рис. 1.7, *б* имеем

$$u_1''(t) = 20\delta'(t) - 40\delta'(t-1) + 20\delta(t-1) - 20\delta(t-2),$$

следовательно

$$u_1(t) = \int_0^t \int_0^t [u_1''(t) dt] dt = 20\delta_1(t) - 40\delta_1(t-1) + 20\delta_2(t-1) - 20\delta_2(t-2).$$

Аналитическая запись реакции $u_2(t)$ имеет вид

$$u_2(t) = 20h_1(t) - 40h_1(t-1) + 20h_2(t-1) - 20h_2(t-2).$$

График реакции $u_2(t)$ и график входного одиночного импульса с амплитудой $U_{m1} = 20$ В приведены на рис. 1.6, з. Из сравнения воздействия и реакции следует сделать выводы о том, как изменились амплитуда и форма сигнала при прохождении его через исследуемую цепь, какова временная задержка выходного сигнала относительно входного, каков характер переходного процесса в цепи. Необходимо также объяснить причины искажения формы сигнала на выходе цепи.

Тема 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ИСКАЖЕНИЙ СИГНАЛОВ НА ВЫХОДЕ ФИЛЬТРА НИЖНИХ ЧАСТОТ

Целью курсовой работы является практическое освоение и сравнение различных методов расчета цепей, прогноза ожидаемых реакций и оценки полученных результатов.

2.1. Задание к курсовой работе

На вход электрической цепи с момента $t = 0$ подается импульс напряжения u_1 (нечетные варианты) или тока (четные варианты). Реакцией цепи в первом случае является напряжение $u_2 = u_{R2}$, во втором – ток $i_2 = i_{R2}$. График импульса представлен на рис. 2.1, параметры схем и данные импульсов сведены в табл. 2.1 и 2.2.

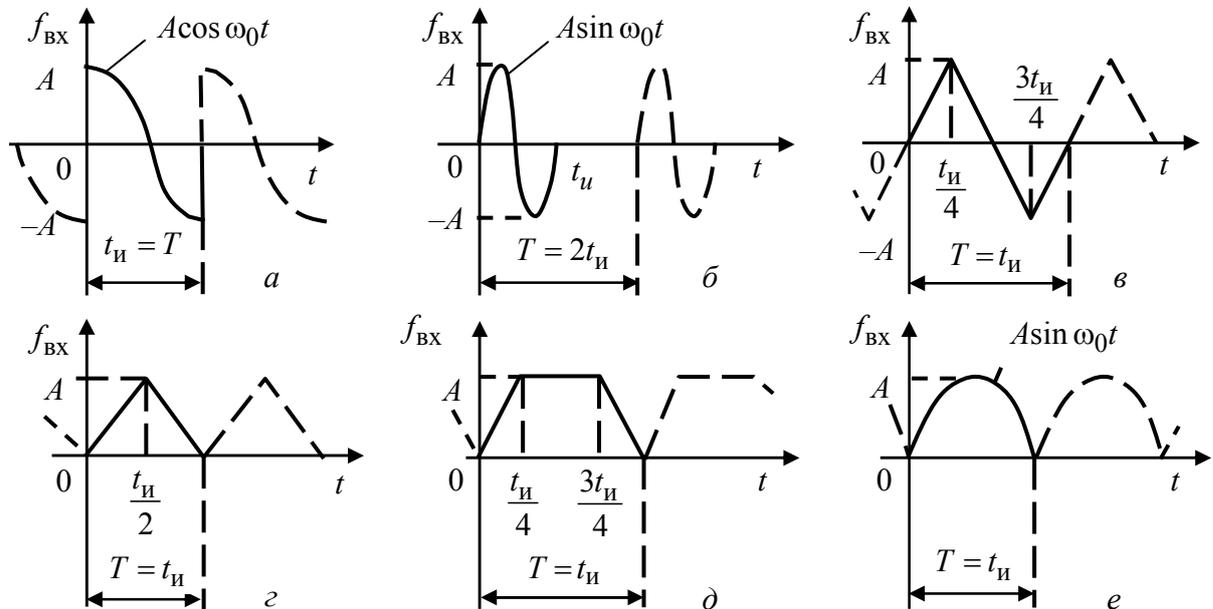


Рис. 2.1

Варианты схем заданы тройками чисел [3].

Схема 1: 114 – u_1 , 212 – R_1 , 324 – C_1 , 423 – L_1 , 534 – C_2 , 634 – R_2 .

Схема 2: 115 – u_1 , 212 – R_1 , 323 – L_1 , 435 – C_1 , 534 – L_2 , 645 – R_2 .

Схема 3: 114 – u_1 , 212 – R_1 , 323 – L_1 , 423 – C_1 , 534 – C_2 , 634 – R_2 .

Схема 4: 114 – u_1 , 212 – R_1 , 324 – C_1 , 423 – L_1 , 523 – C_2 , 634 – R_2 .

Схема 5: 115 – u_1 , 212 – R_1 , 324 – L_1 , 445 – C_1 , 523 – L_2 , 635 – R_2 .

Схема 6: 115 – u_1 , 212 – R_1 , 323 – L_1 , 434 – L_2 , 545 – C_1 , 635 – R_2 .

Схема 7: 131 – i_1 , 213 – R_1 , 313 – C_1 , 412 – L_1 , 523 – C_2 , 623 – R_2 .

Схема 8: 141 – i_1 , 214 – R_1 , 312 – L_1 , 424 – C_1 , 523 – L_2 , 634 – R_2 .

Схема 9: $131 - i_1, 213 - R_1, 312 - L_1, 412 - C_1, 523 - C_2, 623 - R_2$.

Схема 10: $131 - i_1, 213 - R_1, 313 - C_1, 412 - L_1, 512 - C_2, 623 - R_2$.

Схема 11: $141 - i_1, 214 - R_1, 313 - L_1, 434 - C_1, 512 - L_2, 624 - R_2$.

Схема 12: $141 - i_1, 214 - R_1, 312 - L_1, 423 - L_2, 534 - C_1, 624 - R_2$.

Таблица 2.1

Вариант схемы	$R_1 = R_2$, кОм	L_1 , мГн	L_2 , мГн	C_1 , пФ	C_2 , пФ
1	0,5	0,5	–	1000	1000
2	2	2	2	1000	–
3	0,9	0,8	–	555	1000
4	1,8	0,4	–	123,6	69,5
5	0,36	0,45	0,8	6180	–
6	3,6	16	9	1236	–
7	0,5	1	–	2000	2000
8	2	1	1	500	–
9	2,78	6,18	–	450	800
10	0,28	1,236	–	16000	9000
11	1,11	0,555	1	800	–
12	0,555	0,1236	0,0695	400	–

Таблица 2.2

Вариант	Схема	Импульс					Вариант	Схема	Импульс				
		Рис. 2.1,	Амплитуда		$t_{и}$, мкс	T			Рис. 2.1,	Амплитуда		$t_{и}$, мкс	T
			U_m , В	I_m , А						U_m , В	I_m , А		
1	1	д	100		12,56	t_u	11	6	в	100		62,8	t_u
2	7	д		2	25,12	t_u	12	12	г		2	3,14	t_u
3	2	е	100		9,42	t_u	13	1	е	100		4,71	t_u
4	8	е		2	4,71	t_u	14	7	е		2	9,42	t_u
5	3	а	100		12,56	t_u	15	2	д	100		25,12	t_u
6	9	б		2	15,7	t_u	16	8	д		2	12,56	t_u
7	5	а	100		31,4	$2t_u$	17	3	в	100		12,56	t_u
8	10	а		2	62,8	t_u	18	9	г		2	31,4	t_u
9	5	г	100		31,4	t_u	19	4	б	100		1,57	$2t_u$
10	11	б		2	6,28	$2t_u$	20	10	в		2	62,8	t_u

В курсовой работе требуется: 1) определить передаточную функцию, частотные и временные характеристики цепи; 2) исследовать реакцию цепи при воздействии одиночного импульса; 3) исследовать установившуюся реакцию цепи при воздействии периодической последовательности импульсов.

Рекомендуется использовать следующий порядок выполнения пунктов курсовой работы:

1. Нормирование параметров и переменных цепи.
2. Определение передаточной функции цепи $H(s)$. Необходимо также найти нули и полюсы функции цепи; изобразить их координаты на комплексной плоскости; оценить практическую длительность переходных процессов.
3. Расчет частотных характеристик цепи $H(j\omega)$. Кроме того, следует построить графики АЧХ $A(\omega)$ и ФЧХ $\Phi(\omega)$, а также график амплитудно-фазовой характеристики (АФХ); определить полосу пропускания цепи и дать оценку ожидаемым изменениям амплитуды, времени запаздывания сигналов на выходе в предположении, что спектр входных сигналов попадает в полосу пропускания.
4. Составление уравнений состояния цепи. Полученные уравнения необходимо проконтролировать.
5. Определение переходной $h_1(t)$ и импульсной $h(t)$ характеристик. Для расчета переходной характеристики использовать аналитический и численный методы. Построить графики, изобразив тонкими линиями составляющие аналитического расчета, дать оценку точности численного расчета (по трем характерным точкам).
6. Вычисление реакции цепи при воздействии одиночного импульса на входе. Следует использовать аналитический (и численный*) способ расчета; построить на одном рисунке графики реакции и измененного в $A(0)$ раз воздействия; привести выводы относительно правомерности оценок, сделанных в п. 3.
7. Определение спектральных характеристик одиночного импульса воздействия. Необходимо построить графики амплитудного и фазового спектров воздействия; установить ширину спектра, сравнить ее с полосой пропускания цепи и оценить искажения формы импульса при прохождении его через цепь, сопоставив их с данными, полученными в п.б.
8. Вычисление спектра реакции при одиночном импульсе на входе. Построить графики амплитудного и фазового спектров.
- 9.* Приближенный расчет реакции по спектру при одиночном импульсе воздействия. Следует построить график реакции и сравнить с данными п.б.
10. Определение спектра периодического входного сигнала. Необходимо построить амплитудный и фазовый дискретные спектры воздействия, а также графики входного периодического сигнала – исходного и после аппроксимации его отрезком ряда Фурье (рекомендуется ограничиться

тремя слагаемыми ряда, не считая постоянной составляющей); указать тонкими линиями отдельные составляющие. При использовании компьютера рекомендуется исследовать влияние числа членов ряда Фурье на точность аппроксимации.*

11. Приближенный расчет реакции при периодическом воздействии. Следует построить амплитудный и фазовый дискретные спектры, а также график реакции; сравнить его с графиком воздействия (измененным в $A(0)$ раз) и оценить искажения передачи.

12.* Определение в «замкнутой» форме вынужденной составляющей реакции при периодическом входном сигнале. Необходимо построить график реакции и сравнить его с данными п.11.

Примечание: пункты и их части, помеченные «звездочкой» (*), выполняются по указанию преподавателя в плане научно-исследовательской работы студентов (НИРС).

2.2. Контрольные вопросы

Перечень типовых контрольных вопросов по «Аналізу цепи во временной области» был приведен при рассмотрении темы 1. Типовые вопросы к «Аналізу цепи в частотной области» могут быть из следующего набора:

1. Что такое передаточная функция (ПФ) цепи?
2. Как проконтролировать значения ПФ при $s \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$?
3. Как проконтролировать нули ПФ?
4. Как проконтролировать АЧХ цепи при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$? Что характеризуют эти значения?
5. Как проконтролировать нули АЧХ цепи? Что такое АЧХ?
6. Что такое ФЧХ цепи?
7. Что такое обобщенная частотная характеристика $H(j\omega)$?
8. Каковы фильтрующие свойства Вашей цепи? Как по АЧХ и ФЧХ оценить сигнал на выходе? Какова полоса пропускания?
9. Что такое АФХ? Поясните ее построение.
10. $H(s) = 0,5(s^2 + 2)/[(s + 1)(s + 2)]$. Как приближенно выглядят АЧХ, ФЧХ, АФХ?
11. Как изменится АЧХ, если элементы L и C поменять местами?
12. Что такое уравнения состояния цепи? Как Вы их составили и использовали?

13. Проконтролируйте уравнения состояния. Что такое уравнение связи?
14. Источник напряжения и R -, L -, C -элементы соединены последовательно. Составьте уравнения состояния.
15. Что такое переходная характеристика (ПХ) цепи? Как ее найти?
16. Проконтролируйте значения ПХ цепи при $t = (0+)$ и $t \rightarrow \infty$.
17. Что такое импульсная характеристика (ИХ) цепи? Как ее найти? Изобразите приближенно ИХ Вашей цепи.
18. Как изменятся $h_1(0+)$ и $h_1(\infty)$, если элементы L и C поменять местами?
19. Является ли ПХ Вашей цепи непрерывной функцией? Дайте обоснование как во временной, так и в частотной областях.
20. Как Вы рассчитали ПХ численно? Как выбрали шаг численного расчета? Сравните результаты аналитического и численного расчетов.
21. Как выглядит график функции $10e^{-2t} \cos(100t - 45^\circ) \delta_1(t)$?
22. Чем отличаются графики функций $10t \delta_1(t - 2)$ и $10(t - 2) \delta_1(t - 2)$? Как Вы строили график ПХ?
23. Как Вы нашли изображение одиночного импульса воздействия? Использовали ли метод двойного дифференцирования?
24. $H(s) = 10(s + 1) / (2s + 1)$. Найдите ПХ и ИХ и постройте их графики.
25. $F(s) = 10(s + 1)e^{-3s} / (2s + 1)$. Найдите оригинал и постройте график.
26. Как построить график функции $10e^{-2(t-3)} \sin 10(t - 3) \delta_1(t - 3)$?
27. Почему $f_{\text{ВЫХ}}(t) \neq 0$ по окончании действия одиночного импульса на входе?
28. Как Вы построили график $f_{\text{ВЫХ}}(t)$? Является ли $f_{\text{ВЫХ}}(t)$ непрерывной функцией?
29. Соответствует ли график $f_{\text{ВЫХ}}(t)$ фильтрующим свойствам цепи и значению АЧХ при $\omega \rightarrow \infty$?
30. $F(s) = 10 / [s(s^2 + 1)]$. Найдите оригинал и постройте график.
31. Что такое спектр сигнала? Как его найти? Спектр каких сигналов не существует? Чему равно значение спектра на нулевой частоте? Какова его размерность?

32. В чем сходство и различие спектральных и частотных характеристик (ЧХ)?
33. Как оценить ширину спектра сигнала по различным критериям?
34. Как связана ширина спектра сигнала с длительностью и крутизной сигнала? Как выглядит спектр дельта-функции?
35. Как Вами найдено выражение для амплитудного спектра воздействия? В чем его особенности?
36. Как Вами найдено выражение для фазового спектра воздействия? В чем его особенности?
37. Каковы выводы из сравнения спектра сигнала с ЧХ цепи?
38. Как Вы проконтролировали график амплитудного спектра воздействия?
39. Как найти спектр реакции?
40. Нужен ли расчет спектра выходного сигнала?
41. Что такое ряд Фурье? Как его найти? Каков смысл нулевой гармоники? Оцените постоянную составляющую Вашего периодического сигнала.
42. Какими свойствами обладают ряды Фурье симметричных сигналов?
43. Что такое дискретный спектр периодического сигнала? Почему его называют линейчатым? Каков частотный интервал между гармониками?
44. Чем принципиально отличаются графики первой и третьей гармоник ряда Фурье? Поясните это на примере курсовой работы.
45. Проанализируйте график входного сигнала, представленного суммой гармоник ряда Фурье.
46. Как выглядит фазовый спектр симметричных периодических сигналов? Нашло ли это отражение в Вашей работе?
47. Как найдены ряд Фурье и дискретный спектр реакции? Что характеризует начальное значение спектра?
48. Как построен график периодической реакции? Укажите отдельные составляющие.
49. Соответствует ли график периодической реакции фильтрующим свойствам цепи?
50. Постройте приближенно график сигнала $f(t) = 10 + 12\sin t + 4\sin 3t$ для $-\infty < t < +\infty$.

2.3. Указания к выполнению курсовой работы

Основные рекомендации и указания к курсовой работе в целом соответствуют изложенным для темы 1. Рекомендуемые базисные величины (сопротивление и частота) при нормировке $R_{\text{б}} = R_{\text{н}}$, $\omega_{\text{б}} = 10^6 \text{ с}^{-1}$. При выполнении пунктов задания, помеченных звездочкой (*), рекомендуется использовать следующую литературу:

- 1) численный расчет в п. 6 – [2, с. 196 – 198];
- 2) расчет сигнала по вещественному, или мнимому, или амплитудному и фазовому спектрам в п. 9 – [2, с. 235, 236];
- 3) точный расчет реакции при периодическом несинусоидальном воздействии в п. 12 – [2, с. 229, 230].

2.4. Типовой пример

Схема анализируемой цепи приведена на рис. 2.1, а, график импульсного воздействия $u_0(t)$ – на рис. 2.1, б; причем $R_{\text{н}} = 2 \text{ кОм}$, $R_1 = R_2 = 4 \text{ кОм}$, $L_1 = 2 \text{ мГн}$, $L_2 = 10 \text{ мГн}$, $C_1 = 500 \text{ пФ}$, $U_{0\text{м}} = 100 \text{ В}$, $t_{\text{и}} = 47,12 \text{ мкс}$, $T = 2t_{\text{и}}$.

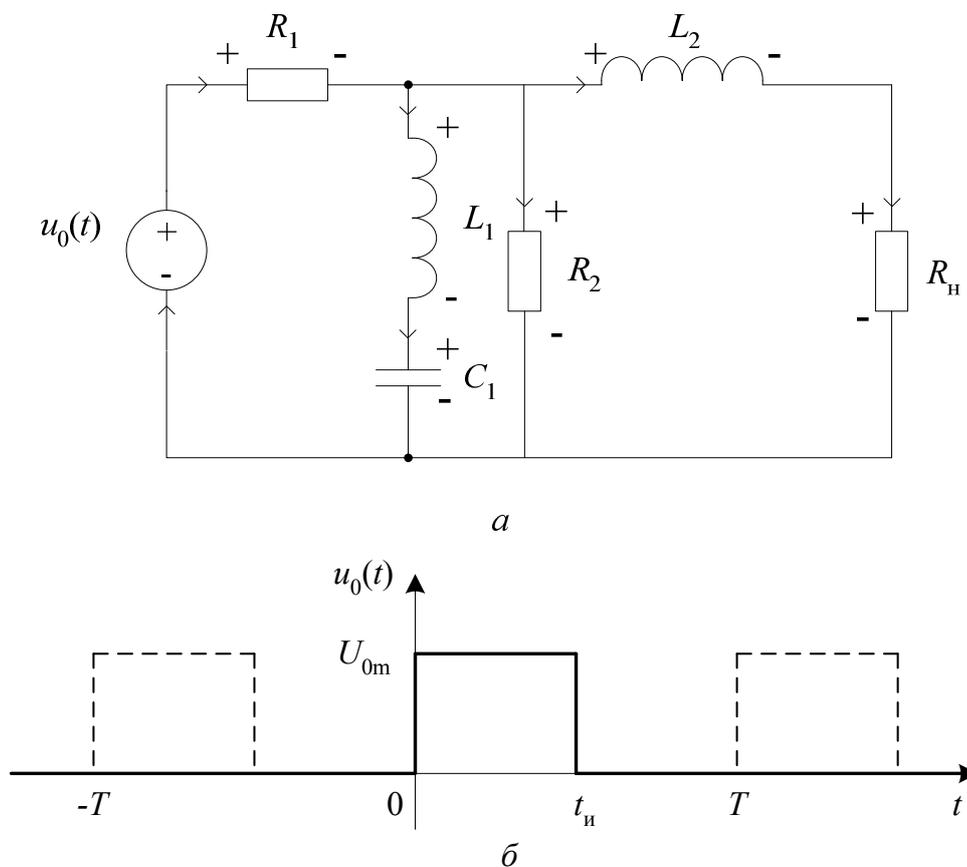


Рис. 2.1

Пример использования пакета MATLAB для анализа рассматриваемой цепи приведен в приложении Б.

2.4.1. Нормирование параметров и переменных цепи

Выбрав в качестве базисных параметров $R_{\sigma} = R_H = 2 \cdot 10^3$ Ом, $\omega_{\sigma} = 10^6$ с⁻¹, получим следующие значения нормированных параметров:

$$R_{H*} = \frac{R_H}{R_{\sigma}} = 1; \quad R_{1*} = R_{2*} = \frac{R_2}{R_{\sigma}} = 2;$$

$$L_{1*} = \frac{L_1}{(R_{\sigma}/\omega_{\sigma})} = 1; \quad L_{2*} = \frac{L_2}{(R_{\sigma}/\omega_{\sigma})} = 5; \quad C_{1*} = C_1 R_{\sigma} \omega_{\sigma} = 1.$$

Для простоты записи знак нормировки «*» в дальнейшем опускаем.

2.4.2. Определение передаточной функции цепи

Функция передачи цепи по напряжению $H(s) = \frac{U_H(s)}{U_0(s)}$,

где s – переменная Лапласа. Используем операторную схему замещения цепи при нулевых начальных условиях, причем операторные сопротивления $Z_{R_H} = R_H = 1$; $Z_{R_1} = Z_{R_2} = R_2 = 2$; $Z_{L_1} = sL_1 = s$; $Z_{L_2} = sL_2 = 5s$; $Z_{C_1} = 1/sC_1 = 1/s$. Для нахождения $H(s)$ применим метод пропорциональных величин.

$$\text{Пусть } U'_H(s) = 1, \quad \text{тогда: } I'_H(s) = 1, \quad U'_{L_2}(s) = I'_H(s)Z_{L_2} = 5s;$$

$$U'_{L_1 C_1}(s) = U'_{R_2}(s) = U'_{L_2}(s) + U'_H(s) = 5s + 1; \quad I'_{R_2}(s) = \frac{U'_{R_2}(s)}{Z_{R_2}} = \frac{5s + 1}{2};$$

$$I'_{L_1}(s) = I'_{C_1}(s) = \frac{U'_{L_1 C_1}(s)}{Z_{L_1} + Z_{C_1}} = \frac{5s^2 + s}{s^2 + 1};$$

$$I'_{R_1}(s) = I'_{L_1}(s) + I'_{R_2}(s) + I'_{R_H}(s) = \frac{5s^3 + 13s^2 + 7s + 3}{2s^2 + 2};$$

$$U'_{R_1}(s) = I'_{R_1}(s)Z_{R_1} = \frac{5s^3 + 13s^2 + 7s + 3}{s^2 + 1};$$

$$U'_0(s) = U'_{R_1}(s) + U'_{L_1 C_1}(s) = \frac{10s^3 + 14s^2 + 12s + 4}{s^2 + 1}; \quad H(s) = \frac{U'_H(s)}{U'_0(s)}.$$

Таким образом,

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{10(s^3 + 1,4s^2 + 1,2s + 0,4)} \approx \frac{s^2 + 1}{10(s + 0,545)(s^2 + 0,856s + 0,743)}. \quad (2.1)$$

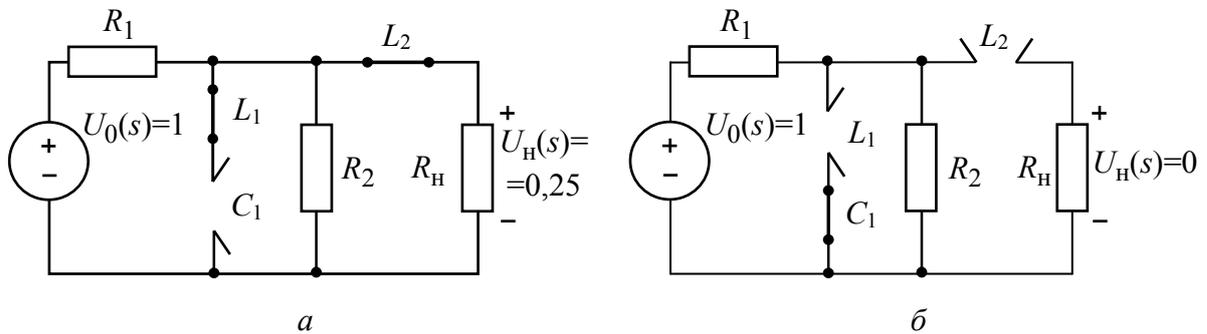


Рис. 2.2

Проконтролируем функцию $H(s)$. Из (2.1) следует, что $H(0) = 0,25$; $H(\infty) = 0$, что соответствует результатам, полученным по схемам замещения цепи при $s = 0$ и при $s \rightarrow \infty$, приведенным на рис. 2.2, а, б соответственно.

Полюсы $H(s)$, т.е. корни характеристического полинома цепи, равны $s_1 = -0,545$; $s_{2,3} = -0,428 \pm j0,743$; нули $H(s)$ равны $s_{1,2}^0 = \pm j$. Расположение нулей и полюсов передаточной функции показано на рис. 2.3.

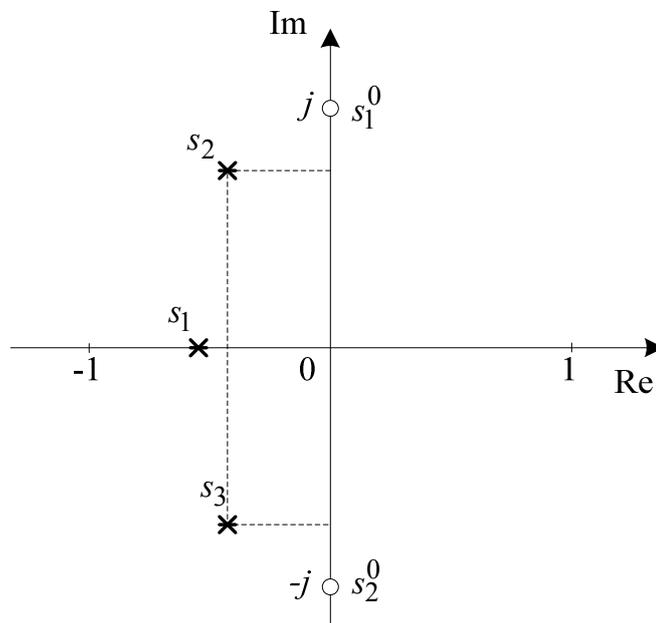


Рис. 2.3

Оценим практическую длительность переходных процессов в цепи:

$$t_{\text{III}} = 3\tau_{\text{max}} = \frac{3}{\min_k |\operatorname{Re}\{s_k\}|} \approx 7.$$

2.4.3. Расчет частотных характеристик цепи

Обобщенная частотная характеристика:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= H(s)|_{s=j\omega} = \frac{1-\omega^2}{(4-14\omega^2) + j\omega(12-10\omega^2)} = \\ &= \frac{1-\omega^2}{10(j\omega+0,545)(-\omega^2 + j\omega 0,856 + 0,552)}. \end{aligned}$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ):

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |H(j\omega)| = \frac{|1-\omega^2|}{\sqrt{(4-14\omega^2)^2 + \omega^2(12-10\omega^2)^2}} \\ &= \frac{|1-\omega^2|}{10\sqrt{\omega^2 + (0,545)^2} \sqrt{(0,856\omega)^2 + (0,552 - \omega^2)^2}}. \end{aligned}$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ)

$$\Phi(\omega) = \arg\{H(j\omega)\} = \alpha(\omega) - \beta(\omega),$$

где $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ – аргументы числителя и знаменателя обобщенной частотной характеристики соответственно, причем

$$\alpha(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq 1, \\ \pi, & \omega > 1; \end{cases}$$

$$\beta(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left[\frac{\omega(12-10\omega^2)}{4-14\omega^2} \right], & 4-14\omega^2 \geq 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \left[\frac{\omega(12-10\omega^2)}{4-14\omega^2} \right], & 4-14\omega^2 < 0. \end{cases}$$

Графики АЧХ, ФЧХ, АФХ приведены на рис. 2.4, а, б, в соответственно.

Определим полосу пропускания по графику АЧХ на уровне $0,707 A_{\max}(\omega) \approx 0,18$. Частота среза $\omega_{\text{ср}} \approx 0,43$; полоса пропускания $\Delta\omega_{\text{ПП}} \in [0; 0,43]$, что соответствует фильтру нижних частот. Значение АЧХ на нулевой частоте, определяющее соотношение площадей под графиками входного и выходного сигналов, $A(0) = 0,25$. Так как $A(\infty) = 0$, то график выходного сигнала должен быть непрерывным (без скачков).

Анализ рис. 2.4, б показывает, что ФЧХ в полосе пропускания близка к линейной. Следовательно, в случае попадания спектра воздействия в полосу пропускания цепи искажения формы сигнала не будут существенными.

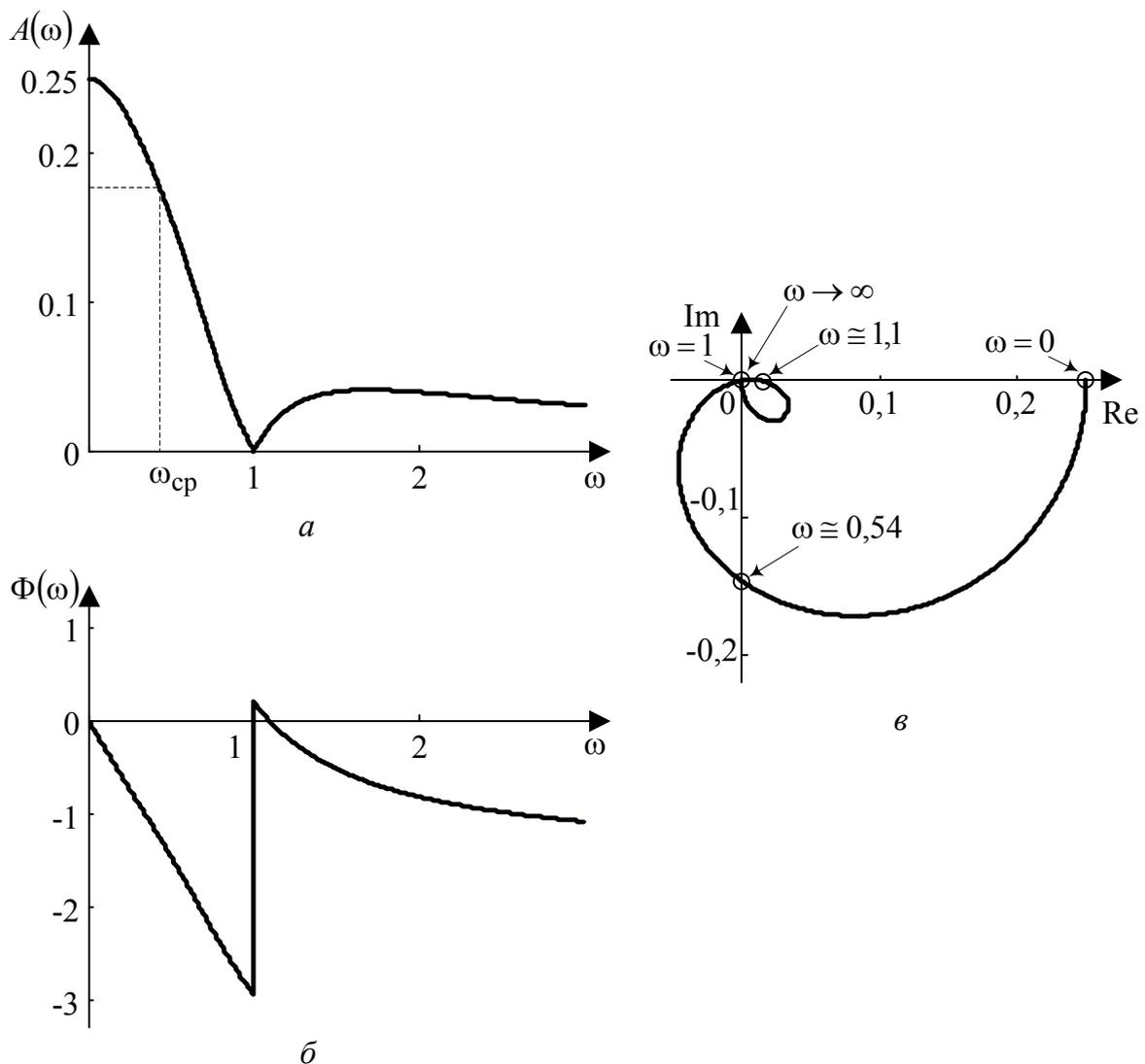


Рис. 2.4

Оценим время запаздывания по наклону графика ФЧХ в области низких частот:

$$t_3 = \frac{|\Delta\Phi(\omega)|}{\Delta\omega},$$

где $\Delta\Phi(\omega)$ – приращение фазы, измеренное в радианах; $\Delta\omega$ – приращение частоты в области низких частот. Для ФНЧ можно также использовать формулу $t_3 = \Phi'(0)$. Таким образом, $t_3 \approx 3$.

2.4.4. Составление уравнений состояния цепи

Получим уравнения состояния цепи с помощью формальной процедуры, для чего заменим L -элементы на источники тока $i_{L_1}(t)$ и $i_{L_2}(t)$, а C -элемент на источник напряжения $u_{C_1}(t)$. Соответствующая схема замещения приведена на рис. 2.5.

В полученной резистивной цепи любым методом расчета найдем $u_{L_1}(t)$, $u_{L_2}(t)$, $i_{C_1}(t)$. Для примера выберем метод контурных токов:

$$\begin{cases} i_1^k = i_{L_1}(t), \\ i_2^k = i_{L_2}(t), \\ R_1 i_1^k - R_2 i_2^k + (R_1 + R_2) i_3^k = u_0(t); \end{cases}$$

Следовательно,

$$i_3^k = \frac{R_2 i_{L_2}(t) - R_1 i_{L_1}(t) + u_0(t)}{R_1 + R_2} = -0,5 i_{L_1}(t) + 0,5 i_{L_2}(t) + 0,25 u_0(t),$$

тогда:

$$\begin{cases} i_{C_1}(t) = i_{L_1}(t), \\ u_{L_1}(t) = u_0(t) - u_{C_1}(t) - R_1(i_1^k + i_3^k) = -u_{C_1}(t) - i_{L_1}(t) - i_{L_2}(t) + 0,5 u_0(t), \\ u_{L_2}(t) = R_2(i_3^k - i_2^k) - R_1 i_2^k = -i_{L_1}(t) - 2 i_{L_2}(t) + 0,5 u_0(t); \end{cases}$$

Используя соотношения $i_{C_1}(t) = C_1 u'_{C_1}(t)$, $u_{L_1}(t) = L_1 i'_{L_1}(t)$, $u_{L_2}(t) = L_2 i'_{L_2}(t)$, получим уравнения состояния:

$$\begin{cases} u'_{C_1}(t) = 0 \cdot u_{C_1}(t) + 1 \cdot i_{L_1}(t) + 0 \cdot i_{L_2}(t) + 0 \cdot u_0(t), \\ i'_{L_1}(t) = -1 \cdot u_{C_1}(t) - 1 \cdot i_{L_1}(t) - 1 \cdot i_{L_2}(t) + 0,5 \cdot u_0(t), \\ i'_{L_2}(t) = 0 \cdot u_{C_2}(t) - 0,2 \cdot i_{L_1}(t) - 0,4 \cdot i_{L_2}(t) + 0,1 \cdot u_0(t); \end{cases} \quad (2.2)$$

Для расчета реакции – напряжения $u_H(t)$ запишем уравнение связи:

$$u_H(t) = R_H i_2^K = i_{L_2}(t) \quad (2.3)$$

Уравнения состояния (2.2) в матричной форме:

$$\begin{aligned} [f'_{\text{ПС}}(t)] &= [A][f_{\text{ПС}}(t)] + [B][f_1(t)], \\ \begin{bmatrix} u'_{C_1}(t) \\ i'_{L_1}(t) \\ i'_{L_2}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -0,2 & -0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_1}(t) \\ i_{L_1}(t) \\ i_{L_2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,1 \end{bmatrix} u_0(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

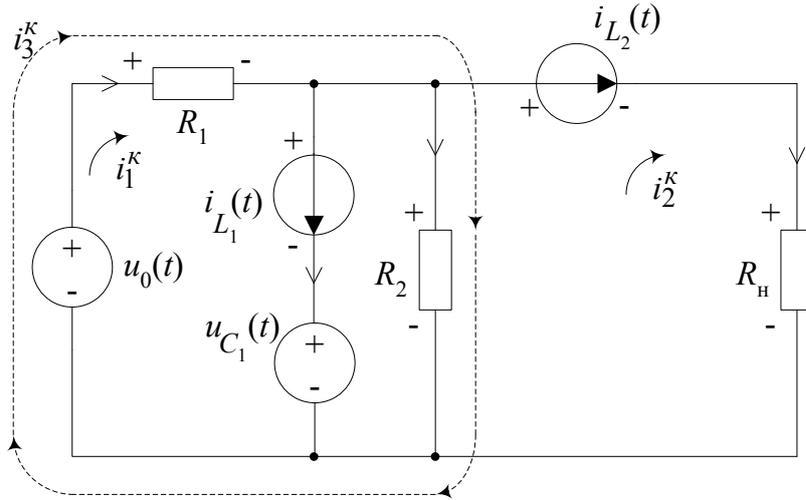


Рис. 2.5

Проконтролируем полученные уравнения (2.4). Для этого можно рассмотреть приведенные на рис. 2.6 схемы замещения цепи при единичном ступенчатом воздействии $u_0(t) = \delta_1(t)$ при $t \rightarrow 0+$ (рис. 2.6, а) и $t \rightarrow \infty$ (рис. 2.6, б). Схемы аналогичны приведенным на рис. 2.2.

Для схемы на рис. 2.6, а имеем:

$$\begin{cases} i_{C_1}(0+) = 0, \\ u_{L_1}(0+) = 0,5, \\ u_{L_2}(0+) = 0,5; \end{cases} \quad \begin{cases} u'_{C_1}(0+) = \frac{i_{C_1}(0+)}{C_1} = 0, \\ i'_{L_1}(0+) = \frac{u_{L_1}(0+)}{L_1} = 0,5, \\ i'_{L_2}(0+) = \frac{u_{L_2}(0+)}{L_2} = 0,1; \end{cases}$$

Такие же значения производных получаем из (2.4) при $t \rightarrow 0+$. Для схемы на рис. 2.6, б имеем: $u_{C_1}(\infty) = 0,25$, $i_{L_1}(\infty) = 0$, $i_{L_2}(\infty) = 0,25$. Такие же вынужденные значения получаем по уравнениям (2.4), приравняв их левые части к нулю.

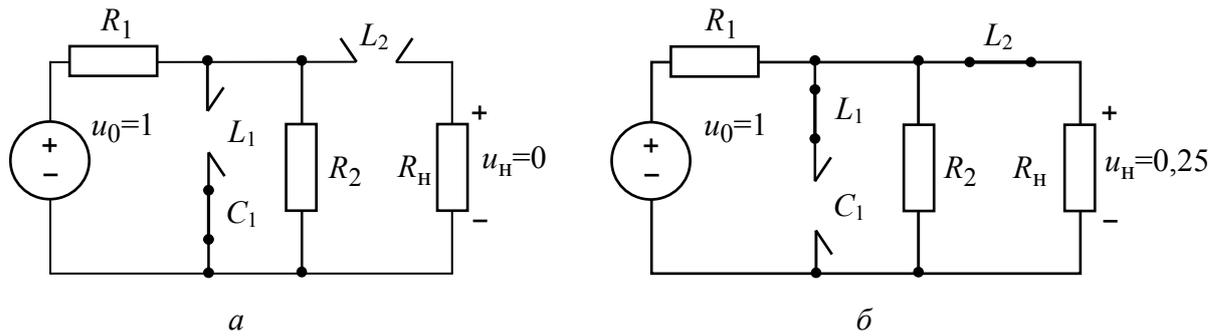


Рис. 2.6

Контроль также можно осуществлять по характеристическому полиному цепи, который здесь определяют как

$$\det([A] - p[E]) = 0.$$

2.4.5. Определение переходной и импульсной характеристик

Для аналитического расчета переходной характеристики используем операторный метод:

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2 + 1}{10s(s + 0,545)(s + 0,856s + 0,743)}\right].$$

Применим теорему разложения:

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{1}{10} \cdot \frac{s^2 + 1}{s(s + 0,545)(s + 0,428 - j0,743)(s + 0,428 + j0,743)} = \\ &= \frac{D_1}{s} + \frac{D_2}{s + 0,545} + \frac{D_3}{s + 0,428 - j0,743} + \frac{D_4}{s + 0,428 + j0,743}. \end{aligned}$$

Вычеты в полюсах равны: $D_1 = 0,25$; $D_2 = -0,421$; $D_3 = 0,094e^{j0,415}$; $D_4 = 0,094e^{-j0,415}$.

При наличии комплексно-сопряженных полюсов вида $s_{k,k+1} = -\alpha \pm j\omega_0$ (в рассматриваемом примере такими являются $s_{3,4} = -0,428 \pm j0,743$) оригинал суммы соответствующих дробей может быть найден следующим образом:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\dot{D}_k}{s - s_k} + \frac{\dot{D}_{k+1}}{s - s_{k+1}}\right] = 2|\dot{D}_k|e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \arg\{\dot{D}_k\})\delta_1(t),$$

где \dot{D}_k, \dot{D}_{k+1} – вычеты, соответствующие полюсам s_k, s_{k+1} , причем \dot{D}_k соответствует полюсу с положительной мнимой частью ($s_k = -\alpha + j\omega_0$).

Таким образом, переходная характеристика имеет вид:

$$h_1(t) = \left[0,25 - 0,421e^{-0,545t} + 0,188e^{-0,428t} \cos(0,743t + 0,415) \right] \delta_1(t) \quad (2.5)$$

График переходной характеристики приведен на рис. 2.7, а.

Проконтролируем конечное $h_1(\infty)$ и начальное $h_1(0+)$ значения переходной характеристики по выражению (2.5): $h_1(\infty) = 0,25$; $h_1(0+) = 0$, а также по выражению (2.1), используя теоремы о конечном и начальном значениях: $h_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH_1(s) = 0,25$; $h_1(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH_1(s) = 0$. Значения сов-

падают.

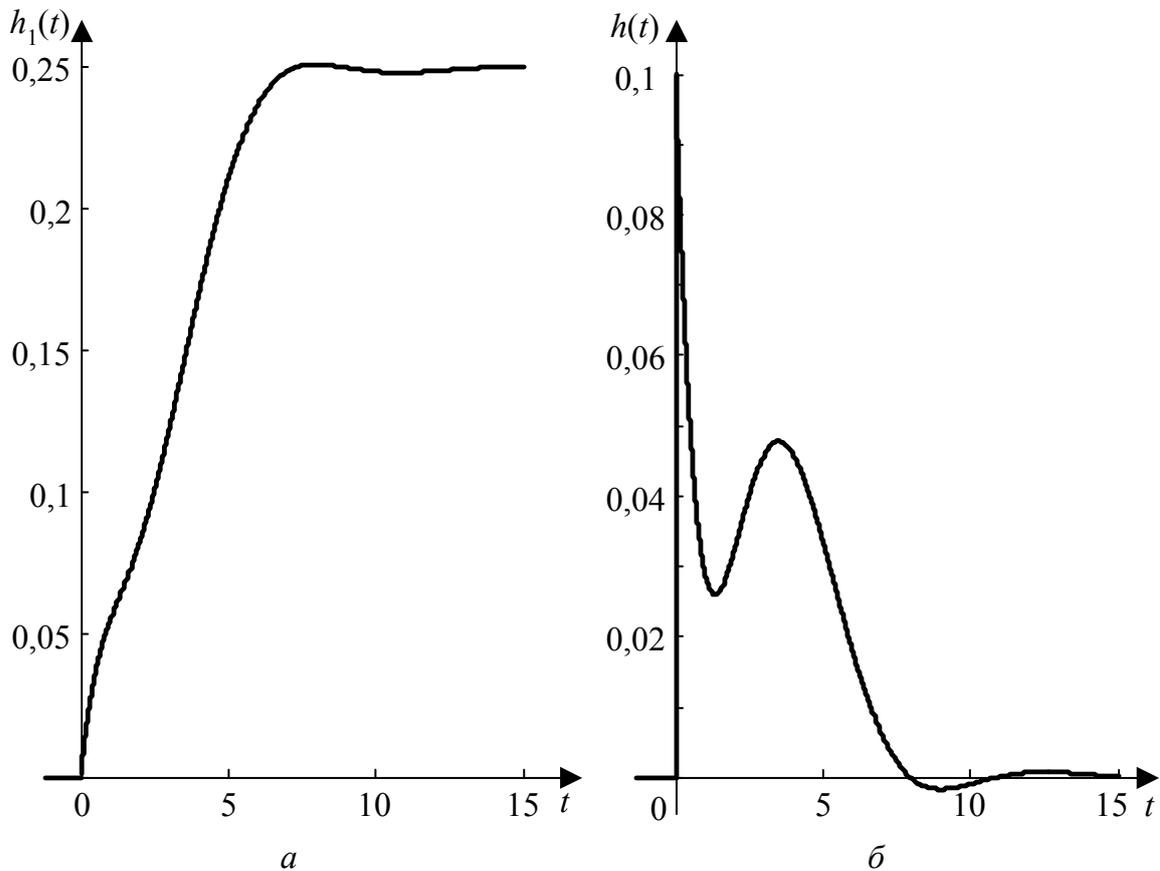


Рис. 2.7

Найдем импульсную характеристику:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2 + 1}{10(s + 0,545)(s + 0,428 - j0,743)} \right].$$

Используем теорему разложения:

$$H(s) = \frac{D_5}{s + 0,545} + \frac{D_6}{s + 0,428 - j0,743} + \frac{D_7}{s + 0,428 + j0,743},$$

где $D_5 = 0,229$; $D_6 = 0,08e^{j2,509}$; $D_7 = 0,08e^{-j2,509}$.

Тогда:

$$h(t) = [0,229e^{-0,545t} + 0,16e^{-0,428t} \cos(0,743t + 2,509)] \delta_1(t).$$

График импульсной характеристики приведен на рис. 2.7, б.

Выполним численный расчет переходной характеристики, для чего получим численное решение уравнений состояния на основе алгоритма Эйлера:

$$[f_{\text{ПС}n}] = [f_{\text{ПС}(n-1)}] + \Delta t ([A][f_{\text{ПС}(n-1)}] + [B][f_{1(n-1)}]);$$

$$\begin{bmatrix} u_{C_1n} \\ i_{L_1n} \\ i_{L_2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{C_1(n-1)} \\ i_{L_1(n-1)} \\ i_{L_2(n-1)} \end{bmatrix} + \Delta t \left([A] \begin{bmatrix} u_{C_1(n-1)} \\ i_{L_1(n-1)} \\ i_{L_2(n-1)} \end{bmatrix} + [B]u_{0(n-1)} \right).$$

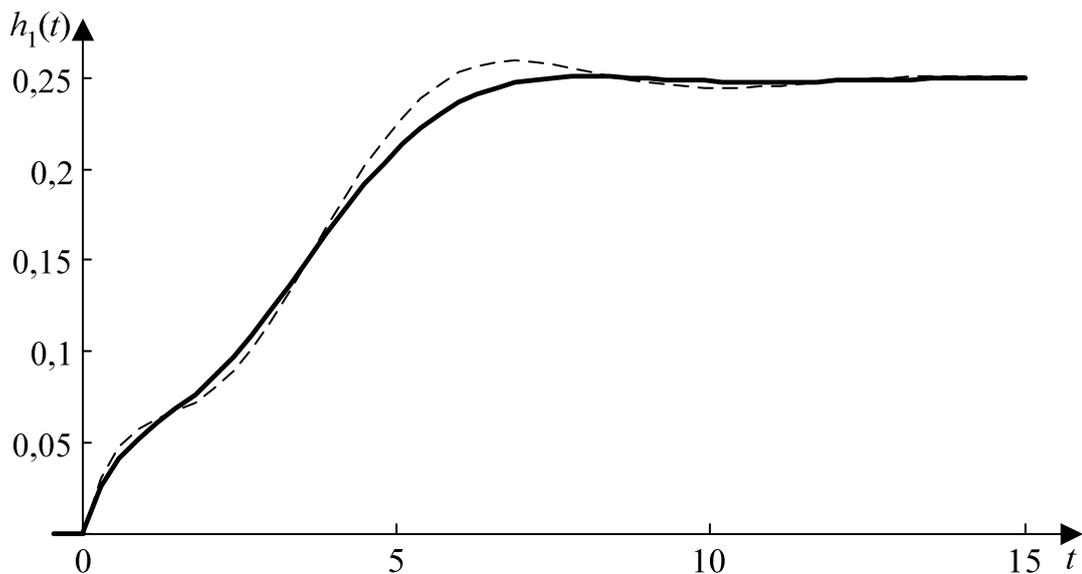


Рис. 2.8

Шаг расчета выбираем, исходя из условия $\Delta t < \frac{1}{5} \min \left\{ \tau_{\min}, \frac{T_{\min}}{4} \right\}$, где $T_{\min} \approx 8,5$ – минимальный период колебаний синусоидальной составляющей в описании процессов в цепи, $\tau_{\min} = \frac{1}{\max_k |\operatorname{Re}\{s_k\}|} \approx 1,8$ – минимальная постоянная времени, s_k – полюсы передаточной функции цепи. Выбираем шаг расчета равным 0,3. Тогда:

$$\begin{cases} u_{C1n} = u_{C1(n-1)} + 0,3i_{L1(n-1)}, \\ i_{L1n} = i_{L1(n-1)} + 0,3[-u_{C1(n-1)} - i_{L1(n-1)} - i_{L2(n-1)} + 0,5 \cdot u_0(n-1)], \\ i_{L2n} = i_{L2(n-1)} + 0,3[-0,2i_{L2(n-1)} - 0,4 \cdot i_{L2(n-1)} + 0,1u_0(n-1)]. \end{cases}$$

На основе полученного численного решения для переменных состояния с помощью уравнения связи (2.3) вычислим значения переходной характеристики:

$$u_{нн} = i_{L2n}.$$

Графики переходной характеристики, полученные на основе аналитического и численного расчета, приведены на рис. 2.8. График, соответствующий численному расчету, изображен штриховой линией.

2.4.6. Вычисление реакции при воздействии одиночного импульса

Найдем изображение по Лапласу входного одиночного импульса, для чего с помощью метода двойного дифференцирования (применение данного метода описано в типовом примере к теме 1) представим указанный импульс в виде $u_0(t) = U_{0m}\delta_1(t) - U_{0m}\delta_1(t - t_{и})$ тогда:

$$U_0(s) = \frac{U_{0m}}{s}(1 - e^{-st_{и}}) \quad (2.6)$$

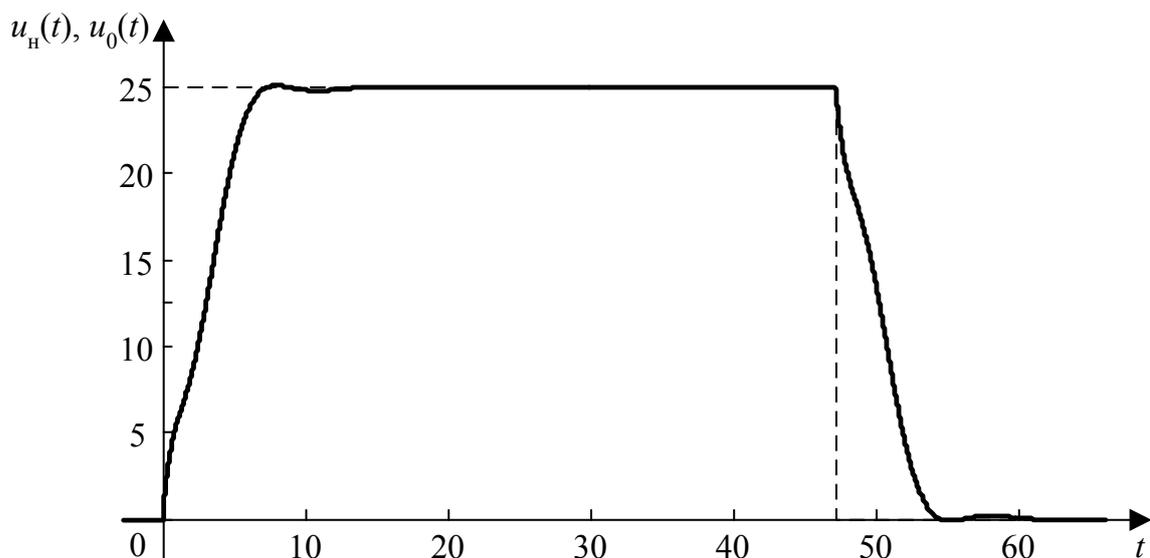


Рис. 2.9

Запишем выражение для изображения реакции цепи на входной одиночный импульс:

$$U_{\text{H}}(s) = H(s)U_0(s) = \frac{s^2 + 1}{10s^3 + 14s^2 + 12s + 4} \cdot \frac{U_{0m}}{s} (1 - e^{-st_{\text{H}}}) = U_{\text{H1}}(s) - U_{\text{H1}}(s)e^{-st_{\text{H}}},$$

где
$$U_{\text{H1}}(s) = \frac{U_{0m}(s^2 + 1)}{s(10s^3 + 14s^2 + 12s + 4)}.$$

Тогда

$$u_{\text{H}}(t) = u_{\text{H1}}(t)\delta_1(t) - u_{\text{H1}}(t - t_{\text{H}})\delta_1(t - t_{\text{H}}),$$

причем $u_{\text{H1}}(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_{\text{H1}}(s)]$. Используя теорему разложения, получим

$$u_{\text{H1}}(t) = 25 - 42,1e^{-0,545t} + 18,8e^{-0,428t} \cos(0,743t + 0,415).$$

Графики реакции (сплошная линия) и измененного в $A(0)$ раз воздействия (штриховая линия) приведены на рис. 2.9. Анализ рис. 2.9 подтверждает правильность предположений, сделанных в п. 2.4.3.

2.4.7. Определение спектральных характеристик одиночного импульса воздействия

Определим спектральные характеристики одиночного импульса, изображенного на рис. 2.1, б.

С учетом (2.6) комплексный спектр импульсного воздействия:

$$\begin{aligned} U_0(j\omega) = U_0(s)|_{s=j\omega} &= \frac{U_{0m}}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_{\text{H}}}) = \frac{U_{0m}}{j\omega} e^{-j\frac{\omega t_{\text{H}}}{2}} \left(e^{j\frac{\omega t_{\text{H}}}{2}} + e^{-j\frac{\omega t_{\text{H}}}{2}} \right) = \\ &= \frac{2U_{0m}}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t_{\text{H}}}{2}\right) e^{-j\frac{\omega t_{\text{H}}}{2}}. \end{aligned}$$

Амплитудный спектр входного сигнала:

$$A_1(\omega) = \frac{2U_{0m}}{\omega} \left| \sin\left(\frac{\omega t_{\text{H}}}{2}\right) \right|.$$

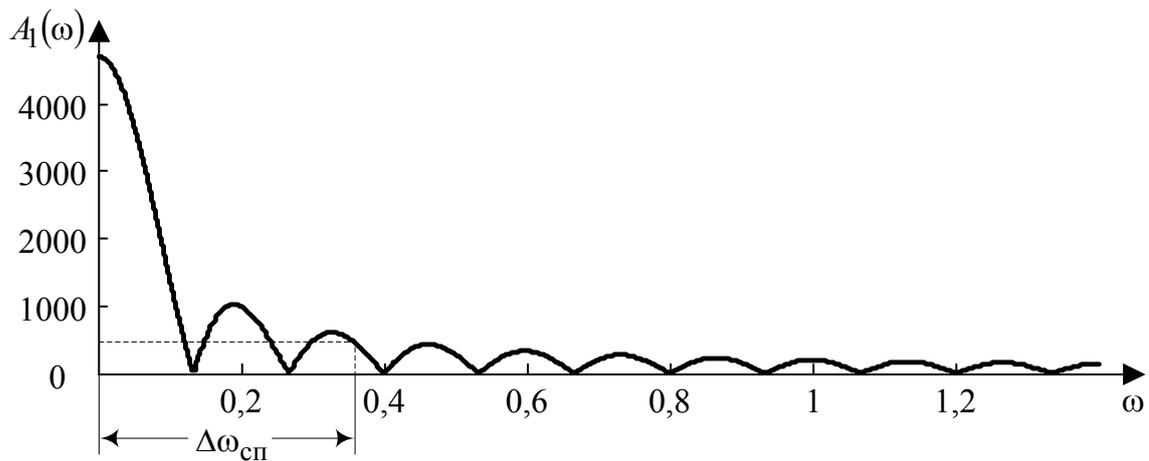
Фазовый спектр входного сигнала:

$$\Phi_1(\omega) = \begin{cases} -\frac{\omega t_{\text{H}}}{2}, & \sin\left(\frac{\omega t_{\text{H}}}{2}\right) \geq 0, \\ \pi - \frac{\omega t_{\text{H}}}{2}, & \sin\left(\frac{\omega t_{\text{H}}}{2}\right) < 0. \end{cases}$$

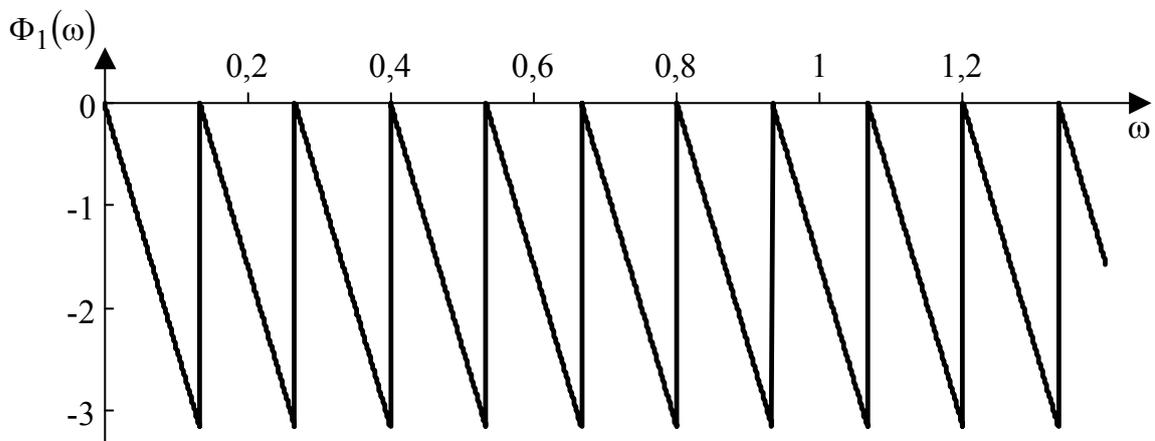
Для построения графика амплитудного спектра сигнала найдем его узлы – значения частот ω_{yk} , при которых указанный спектр равен нулю: $A_1(\omega) = 0$ при $\sin\left(\frac{\omega t_{\text{И}}}{2}\right) = 0$, т.е. $\frac{\omega t_{\text{И}}}{2} = k\pi$; следовательно, $\omega_{yk} \approx 0,133k$; $k = 1, 2, 3, \dots$. При вычислении значения амплитудного спектра на частоте $\omega = 0$ возникает неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия неопределенности используем правило Лопиталья:

$$A_1(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2U_{0m}}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t_{\text{И}}}{2}\right) = 2U_{0m} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin'\left(\frac{\omega t_{\text{И}}}{2}\right)}{\omega'} =$$

$$= 2U_{0m} \frac{\frac{t_{\text{И}}}{2} \cos\left(\frac{\omega t_{\text{И}}}{2}\right)}{1} \Bigg|_{\omega=0} = U_{0m} t_{\text{И}}.$$



a



б

Рис. 2.10

Графики амплитудного и фазового спектров одиночного импульса воздействия показаны на рис. 2.10, *а*, *б* соответственно.

Ширина спектра импульсного входного сигнала, определенная по 10%-му амплитудному критерию (см. рис. 2.10, *а*), $\Delta\omega_{\text{СП}} \in [0; 0,36]$.

Сравнение ширины спектра воздействия и полосы пропускания цепи показывает, что спектр входного сигнала укладывается в полосу пропускания, следовательно, оценки, сделанные в п. 2.4.3, справедливы, что подтверждается данными точного расчета, проведенного в п. 2.4.6.

2.4.8. Вычисление спектра реакции при одиночном импульсе на входе цепи

Выражение для амплитудного спектра реакции:

$$A_2(\omega) = A_1(\omega) \cdot A(\omega).$$

Фазовый спектр реакции:

$$\Phi_2(\omega) = \Phi_1(\omega) + \Phi(\omega).$$

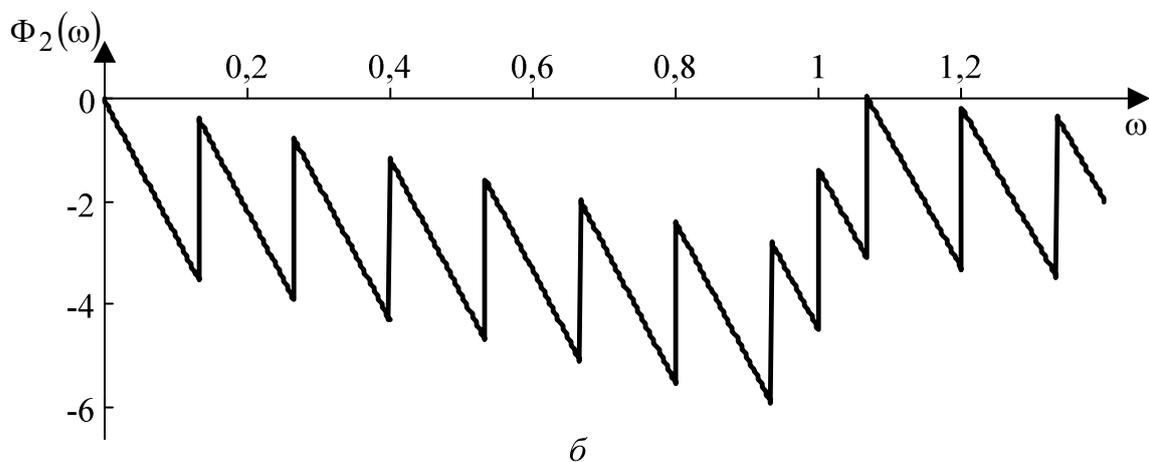
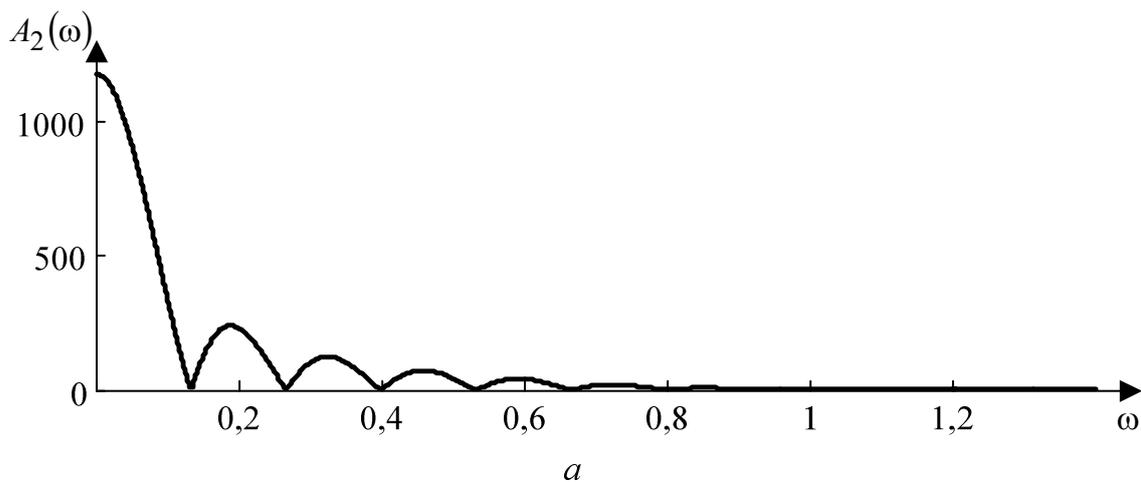


Рис. 2.11

Графики амплитудного и фазового спектров реакции на импульсное воздействие приведены на рис. 2.11, *a*, *б* соответственно.

2.4.9. Определение спектра периодического входного сигнала

Для получения спектральных характеристик входного периодического сигнала используем их связь со спектральными характеристиками входного одиночного импульса:

$A_{1k} = \frac{2}{T} A_1(\omega)|_{\omega=k\omega_1}$ – амплитудный спектр входного периодического сигнала;

$\Phi_{1k} = \Phi_1(\omega)|_{\omega=k\omega_1}$ – фазовый спектр входного периодического сигнала, где $k = 0, 1, 2, \dots, N$; N – число гармоник ряда Фурье, используемых при расчете; $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \approx 0,067$ – частота основной гармоники.

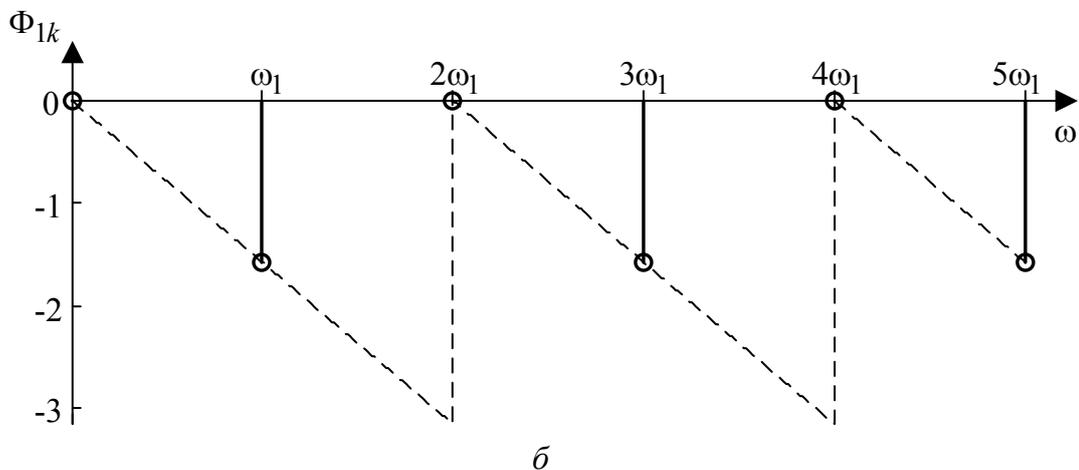
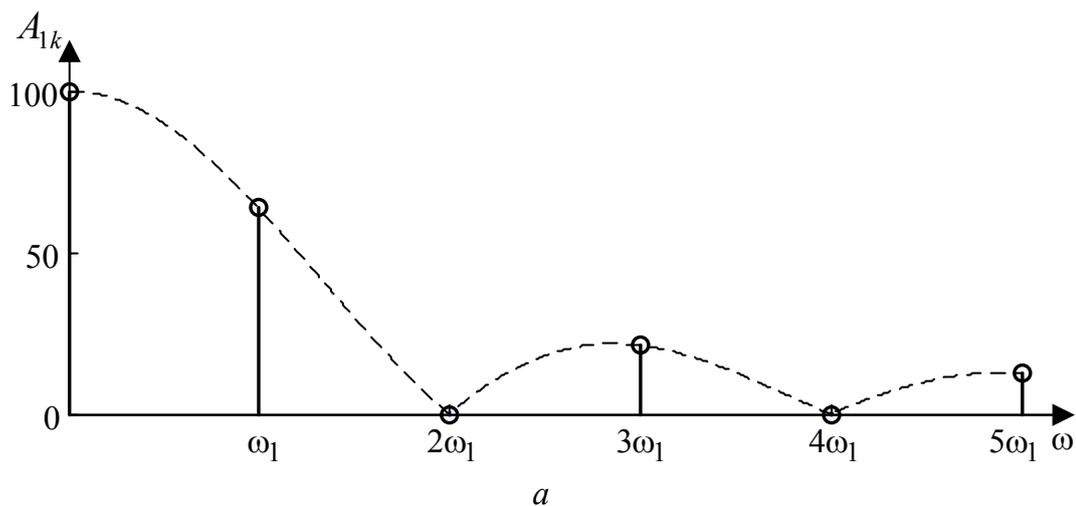


Рис. 2.12

Запишем отрезок ряда Фурье, аппроксимирующий входное периодическое воздействие при $N = 5$:

$$u_0(t) \approx \frac{A_{10}}{2} + \sum_{k=1}^N A_{1k} \cos(k\omega_1 t + \Phi_{1k}) = 50 + 63,662 \cos\left(0,067t - \frac{\pi}{2}\right) + \\ + 21,221 \cos\left(0,2t - \frac{\pi}{2}\right) + 12,732 \cos\left(0,333t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Графики амплитудного и фазового дискретных спектров приведены на рис. 2.12, а, б соответственно (штриховыми линиями показаны графики спектров одиночного импульса воздействия с учетом множителя $\frac{2}{T}$).

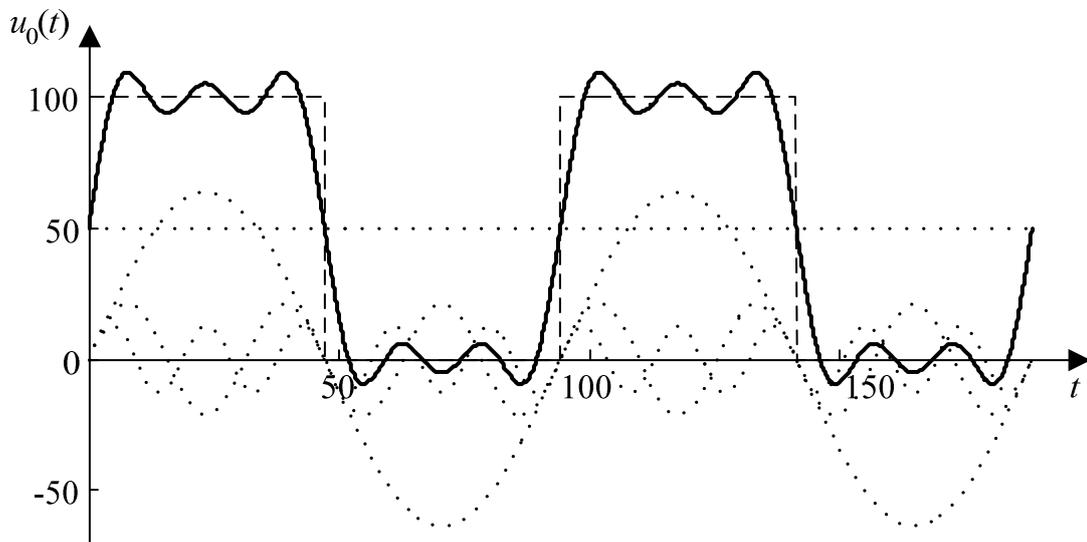


Рис. 2.13

На рис. 2.13 приведены графики периодического воздействия (штриховая линия) и его аппроксимации отрезком ряда Фурье (сплошная линия). Тонкими пунктирными линиями на рис. 2.13 обозначены составляющие, соответствующие отдельным гармоникам отрезка ряда Фурье.

2.4.10. Приближенный расчет реакции при периодическом воздействии

Запишем выражения для амплитудного и фазового дискретных спектров реакции при периодическом воздействии:

$$A_{2k} = A_{1k} \cdot A(k\omega_1); \\ \Phi_{2k} = \Phi_{1k} + \Phi(k\omega_1).$$

Полученные значения отсчетов дискретных спектров приведены в таблице 2.3.

Отрезок ряда Фурье, аппроксимирующий реакцию, имеет вид:

$$u_H(t) = 12,5 + 15,788 \cos(0,067t - 1,771) + 4,902 \cos(0,2t - 2,164) + 2,585 \cos(0,333t - 2,549).$$

Таблица 2.3

k	ω	$A(\omega)$	$\Phi(\omega)$	A_{1k}	α_{1k}	A_{2k}	α_{2k}
0	0	0,25	0	100	0	25	0
1	0,067	0,248	-0,200	63,662	-1,571	15,788	-1,771
2	0,133	0,241	-0,398	0	0	0	-0,398
3	0,200	0,231	-0,593	21,221	-1,571	4,902	-2,164
4	0,267	0,218	-0,786	0	0	0	-0,786
5	0,333	0,203	-0,978	12,732	-1,571	2,585	-2,549

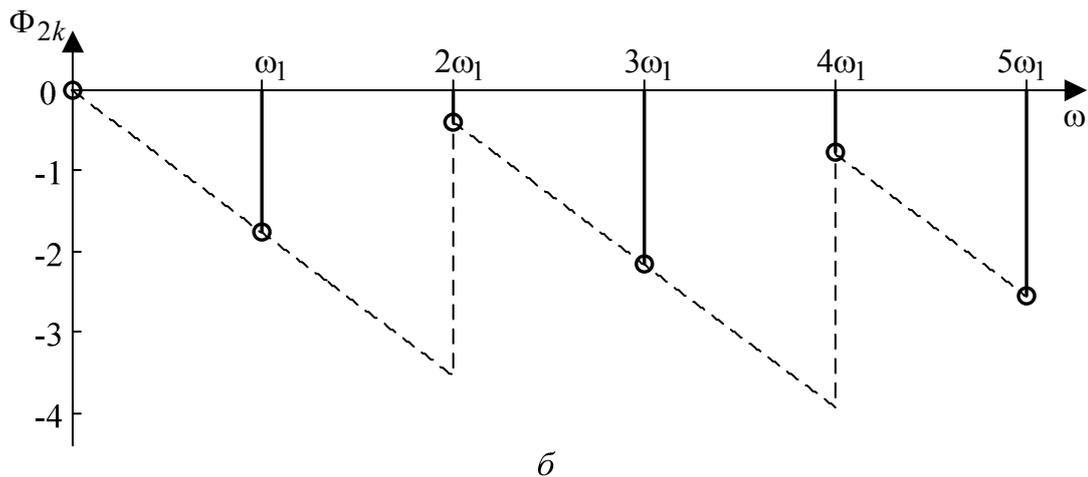
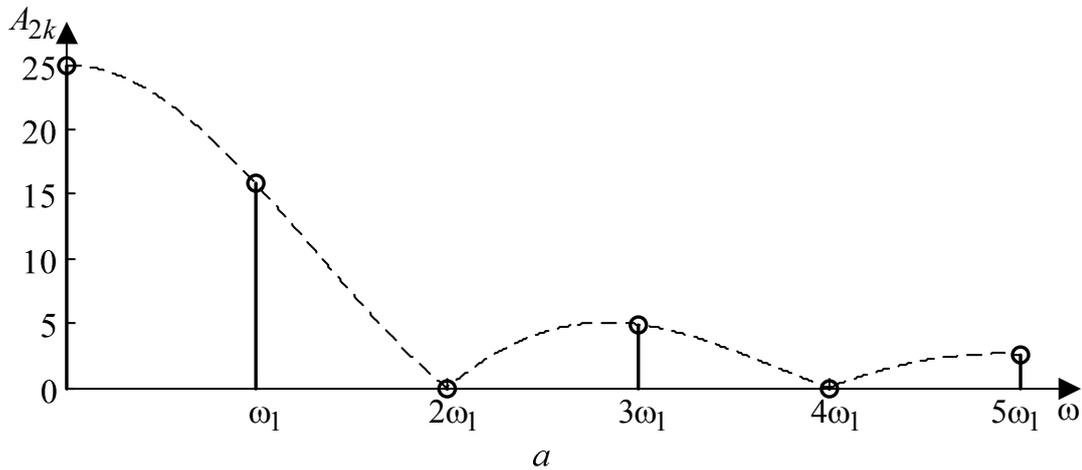


Рис. 2.14

Графики амплитудного и фазового дискретных спектров реакции на периодическое воздействие приведены на рис. 2.14 (штриховыми линиями

показаны графики спектров одиночного импульса воздействия с учетом множителя $\frac{2}{T}$).

График реакции цепи при периодическом воздействии, аппроксимированном отрезком ряда Фурье, приведен на рис. 2.15.

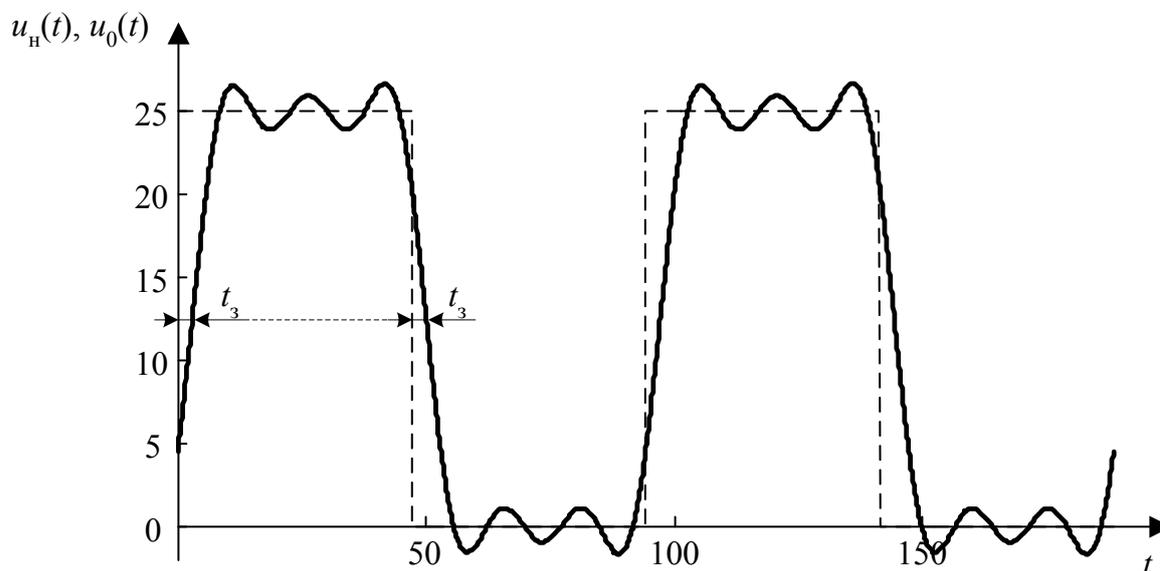


Рис. 2.15

Штриховой линией на рис. 2.15 обозначено периодическое воздействие, измененное в $A(0)$ раз, сплошной линией – реакция, аппроксимированная отрезком ряда Фурье.

Анализ приведенного на рис. 2.15 графика подтверждает правильность оценки времени запаздывания ($t_3 \approx 3$), данной в п. 2.4.3.

Тема 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ В ПЕРЕХОДНЫХ И УСТАНОВИВШЕМСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕЖИМАХ

Целью курсовой работы является практическое освоение современных методов количественного и качественного анализа линейной электрической цепи при различных воздействиях в переходном и установившемся режимах с применением вычислительной техники.

3.1. Задание к курсовой работе

Индивидуальное задание студент выбирает в соответствии со своим номером в списке группы. Выбор сложности варианта предоставляется студенту. В курсовой работе должны быть выполнены следующие пункты задания.

1. Анализ цепи во временной области методом переменных состояния при постоянных воздействиях.

Аналізу подлежат одна из цепей, схемы которых приведены на рис. 3.1. Содержание ветвей в зависимости от сложности варианта курсового расчета приведено в табл. 3.1 и табл. 3.2. В табл. 3.1 заданы параметры, соответствующие лестничной цепи второго порядка, в табл. 3.2 – лестничной цепи третьего порядка.

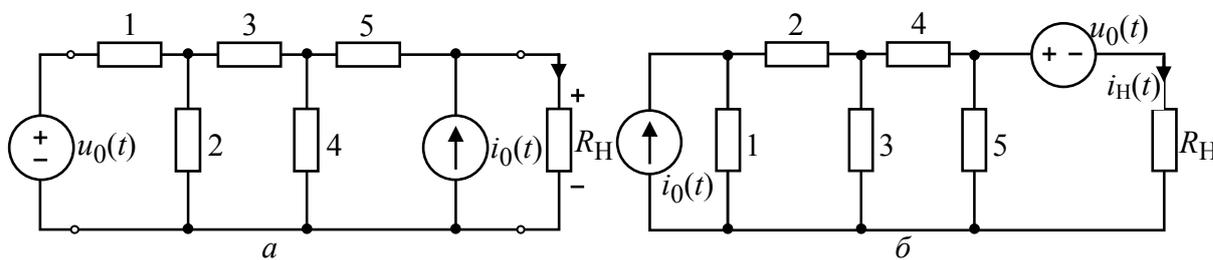


Рис. 3.1

Таблица 3.1

Вариант	Рис. 3.1,	Ветвь					Вариант	Рис. 3.1,	Ветвь				
		1	2	3	4	5			1	2	3	4	5
1	а	R_1	R_3	R_3	L_1	C_1	13	а	R_1	C_4	R_1	L_2	R_1
2	б	R_2	R_1	L_2	R_5	C_3	14	б	R_2	C_4	R_5	R_1	L_3
3	а	R_1	C_3	R_1	R_6	L_2	15	а	R_1	R_2	L_1	R_6	C_1
4	б	R_2	L_1	R_5	C_1	R_4	16	б	R_2	R_1	L_1	R_5	C_1
5	а	R_1	C_6	L_3	R_4	R_3	17	а	R_1	R_6	R_1	L_3	C_6
6	б	R_2	C_1	L_1	R_3	R_6	18	б	R_2	C_1	R_6	R_1	L_1
7	а	R_1	R_4	L_1	C_2	R_1	19	а	R_1	C_2	R_2	R_5	L_2
8	б	R_2	R_1	C_1	L_1	R_1	20	б	R_2	C_4	L_2	R_2	R_4
9	а	R_1	R_5	L_3	R_3	C_3	21	а	R_1	L_3	C_1	R_6	R_1
10	б	R_2	L_3	R_4	C_6	R_6	22	б	R_2	R_1	C_3	R_1	L_2
11	а	R_1	L_3	R_2	R_4	C_6	23	а	R_1	R_1	L_1	C_1	R_3
12	б	R_2	L_2	C_2	R_1	R_5	24	б	R_1	L_3	R_1	R_6	C_6

Таблица 3.2

Вариант	Рис. 3.1,	Ветвь					Вариант	Рис. 3.1,	Ветвь				
		1	2	3	4	5			1	2	3	4	5
1	а	R_1	L_2	C_2	R_5	L_1	13	а	R_1	R_5	L_1	L_2	C_6
2	б	R_2	C_1	C_4	L_1	R_1	14	б	R_2	C_3	L_2	R_5	C_6
3	а	R_1	C_1	L_1	L_3	R_2	15	а	R_1	L_1	C_2	R_4	C_3
4	б	R_2	L_1	C_3	L_2	R_5	16	б	R_2	C_2	C_6	L_2	R_2
5	а	R_1	R_6	C_4	L_1	L_2	17	а	R_1	L_1	C_3	R_6	L_2
6	б	R_2	L_2	R_5	L_1	C_2	18	б	R_2	L_2	C_6	L_1	R_6
7	а	R_1	C_3	C_4	R_5	L_1	19	а	R_1	C_2	L_3	L_1	R_1
8	б	R_2	C_3	C_4	L_2	R_6	20	б	R_2	L_1	R_6	L_3	C_5
9	а	R_1	L_1	C_3	C_6	R_1	21	а	R_1	R_4	C_3	L_2	L_3
10	б	R_2	L_3	R_1	L_2	C_4	22	б	R_2	C_2	C_1	L_1	R_5
11	а	R_1	L_3	R_1	C_2	L_1	23	а	R_1	C_5	C_1	R_6	L_2
12	б	R_2	C_2	L_1	R_1	C_2	24	б	R_1	L_2	R_2	L_1	C_6

Примечание. В табл. 3.1, 3.2 $R_1 = 0,5 \cdot 10^3$ Ом, $R_2 = 1 \cdot 10^3$ Ом, $R_3 = 2 \cdot 10^3$ Ом, $R_4 = 4 \cdot 10^3$ Ом, $R_5 = 8 \cdot 10^3$ Ом, $R_6 = 12 \cdot 10^3$ Ом, $C_1 = 0,033 \cdot 10^{-6}$ Ф, $C_2 = 0,05 \cdot 10^{-6}$ Ф, $C_3 = 0,1 \cdot 10^{-6}$ Ф, $C_4 = 0,5 \cdot 10^{-6}$ Ф, $C_6 = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф, $L_1 = 0,03$ Гн, $L_2 = 0,08$ Гн, $L_3 = 0,1$ Гн.

Для всех схем $R_H = 10^3$ Ом. В цепях на рис. 3.1, а $u_0(t) = U_0 = \text{const}$, $i_0(t) = I_0 \delta_1(t)$, а на рис. 3.1, б – $i_0(t) = I_0 = \text{const}$, $u_0(t) = U_0 \delta_1(t)$. Значения U_0 и I_0 даны в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Вариант	Параметр						Рис.
	U_0 , В	I_0 , А	U_m , В	I_m , А	$t_{и}$, с	T , с	
1	6	$4 \cdot 10^{-3}$	10	–	$6 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-5}$	3.2, д
2	6	$3 \cdot 10^{-3}$	–	$5 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$32 \cdot 10^{-5}$	3.2, б
3	5	$3 \cdot 10^{-3}$	10	–	$6 \cdot 10^{-5}$	$24 \cdot 10^{-5}$	3.2, а
4	4	$1 \cdot 10^{-3}$	–	$5 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$32 \cdot 10^{-5}$	3.2, д
5	5	$2 \cdot 10^{-3}$	10	–	$6 \cdot 10^{-5}$	$18 \cdot 10^{-5}$	3.2, в
6	10	$6 \cdot 10^{-3}$	–	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-5}$	3.2, д
7	5	$3 \cdot 10^{-3}$	8	–	$10 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-5}$	3.2, а
8	6	$4 \cdot 10^{-3}$	–	$4 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-5}$	3.2, д
9	2	$1 \cdot 10^{-3}$	10	–	$6 \cdot 10^{-5}$	$24 \cdot 10^{-5}$	3.2, б
10	4	$2 \cdot 10^{-3}$	–	$5 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$24 \cdot 10^{-5}$	3.2, г

Вариант	Параметр						Рис.
	$U_0, \text{В}$	$I_0, \text{А}$	$U_m, \text{В}$	$I_m, \text{А}$	$t_{\text{и}}, \text{с}$	$T, \text{с}$	
11	8	$3 \cdot 10^{-3}$	8	—	$10 \cdot 10^{-5}$	$40 \cdot 10^{-5}$	3.2, д
12	9	$3 \cdot 10^{-3}$	—	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-5}$	3.2, б
13	12	$3 \cdot 10^{-3}$	8	—	$10 \cdot 10^{-5}$	$40 \cdot 10^{-5}$	3.2, в
14	10	$5 \cdot 10^{-3}$	—	$5 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$12 \cdot 10^{-5}$	3.2, а
15	12	$4 \cdot 10^{-3}$	6	—	$8 \cdot 10^{-5}$	$24 \cdot 10^{-5}$	3.2, д
16	4	$1 \cdot 10^{-3}$	—	$5 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$32 \cdot 10^{-5}$	3.2, д
17	6	$2 \cdot 10^{-3}$	8	—	$10 \cdot 10^{-5}$	$40 \cdot 10^{-5}$	3.2, б
18	10	$6 \cdot 10^{-3}$	—	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-5}$	3.2, д
19	3	$1 \cdot 10^{-3}$	10	—	$6 \cdot 10^{-5}$	$24 \cdot 10^{-5}$	3.2, г
20	8	$2 \cdot 10^{-3}$	—	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$20 \cdot 10^{-5}$	3.2, а
21	6	$4 \cdot 10^{-3}$	10	—	$6 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-5}$	3.2, д
22	7	$4 \cdot 10^{-3}$	—	$4 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-5}$	$40 \cdot 10^{-5}$	3.2, б
23	8	$3 \cdot 10^{-3}$	8	—	$10 \cdot 10^{-5}$	$40 \cdot 10^{-5}$	3.2, д
24	5	$2 \cdot 10^{-3}$	—	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$20 \cdot 10^{-5}$	3.2, в

Требуется следующее.

1.1. Составить уравнения состояния цепи для $t \geq 0$.

1.2. Найти аналитические решения уравнений состояния.

1.3. Найти решения уравнений состояния, используя по выбору студента один из численных методов (например, Эйлера или Рунге–Кутты третьего, четвертого порядка).

1.4. Построить аналитические и численные решения уравнений состояния, совместив их попарно для каждой из переменных состояния.

2. Анализ цепи операторным методом при апериодическом воздействии.

Аналізу подлежат цепь, изображенная на рис. 3.1, причем в цепях рис. 3.1, а следует положить $i_0(t) = 0$, а в цепях рис. 3.1, б – $u_0(t) = 0$. Независимые предначальные условия нулевые. В момент времени $t = 0$ на вход цепи подан сигнал в виде одиночного импульса напряжения $u_0(t)$ (цепи рис. 3.1, а) или тока $i_0(t)$ (цепи рис. 3.1, б). Форма импульса показана на рис. 3.2, а его амплитуда и длительность приведены в табл. 3.3.

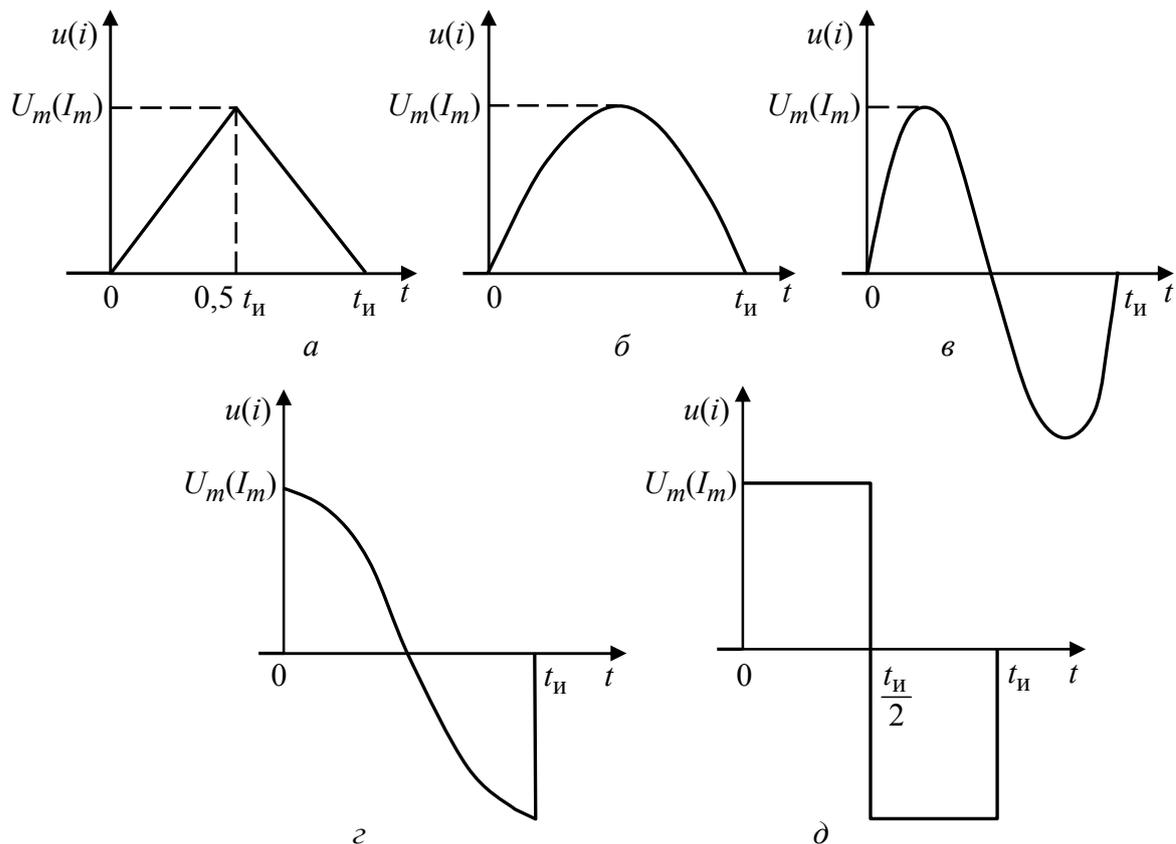


Рис. 3.2

Требуется следующее.

2.1. Определить для цепей рис. 3.1, *а* функцию передачи $H_U(s) = U_H(s)/U_0(s)$, а для цепей рис. 3.1, *б* – функцию $H_I(s) = I_H(s)/I_0(s)$, причем u_H , i_H – напряжение и ток нагрузки; символом s в указанных функциях обозначена переменная Лапласа.

2.2. Найти нули и полюсы функции передачи и нанести их на плоскость комплексной частоты.

2.3. По найденной функции передачи определить переходную $h_1(t)$ и импульсную $h(t)$ характеристики для выходного сигнала.

2.4. Определить изображение по Лапласу входного одиночного импульса.

2.5. Определить напряжение $u_H(t)$ или ток $i_H(t)$ на выходе цепи, используя $H_U(s)$ или $H_I(s)$ соответственно.

2.6. Построить графики переходной и импульсной характеристик цепи, а также входного и выходного сигналов, совместив их попарно.

3. Качественный анализ цепи частотным методом при аperiodическом воздействии.

Условия заданы в п. 2. Требуется следующее.

3.1. Найти и построить амплитудно-фазовую (АФХ), амплитудно-частотную (АЧХ) и фазочастотную (ФЧХ) характеристики функции передачи цепи $H_U(s)$ или $H_I(s)$.

3.2. Определить полосу пропускания цепи по уровню $0,707|H(j\omega)|_{\max}$.

3.3. Найти и построить амплитудный и фазовый спектры апериодического входного сигнала и определить ширину спектра по уровню $0,1|F(j\omega)|_{\max}$.

3.4. Сопоставляя соответственно спектры входного сигнала с частотными характеристиками цепи, дать заключение об ожидаемых искажениях сигнала на выходе цепи. Сравнить эти качественные оценки с сигналом на выходе цепи, найденным в п. 2.5.

4. Анализ цепи частотным методом при периодическом воздействии.

Аналізу подлежат цепь, заданная в п. 2. На входе цепи действует периодический сигнал в виде последовательности импульсов напряжения $u_0(t)$ или тока $i_0(t)$. Форма импульса такая же, как в п. 2, а период повторения импульсов T был задан в табл. 3.3.

Требуется следующее.

4.1. Разложить в ряд Фурье заданный входной периодический сигнал. Построить его амплитудный и фазовый спектры.

4.2. Построить на одном графике входной периодический сигнал и его аппроксимацию отрезком ряда Фурье. Число гармоник отрезка ряда определяется шириной спектра по уровню $0,1 A_{k\max}$, где $A_{k\max}$ – максимальная составляющая амплитудного спектра.

4.3. Используя рассчитанные в п. 3.1 АЧХ и ФЧХ функции передачи цепи, построить амплитудный и фазовый спектры выходного периодического сигнала. Записать напряжение $u_H(t)$ или ток $i_H(t)$ на выходе цепи в виде отрезка ряда Фурье.

4.4. Построить график напряжения $u_H(t)$ или тока $i_H(t)$ на выходе цепи в виде суммы гармоник найденного отрезка ряда Фурье.

Графики по пп. 4.2 и 4.4 построить в одном масштабе времени и разместить их один под другим.

3.2. Нормирование параметров электрической цепи

Порядок значений параметров цепи в задании колеблется от 10^{-6} (для емкостей) до 10^3 (для резисторов). Значения токов и напряжений также могут отличаться на несколько порядков. В большом диапазоне могут изменяться временные интервалы и частоты, характеризующие переходные процессы.

Свойства цепи зависят не от абсолютных величин параметров элементов, а лишь от соотношения между ними. Поэтому при вычислениях удобно использовать нормированные значения параметров цепи. Нормирование состоит в том, что выбирают некоторые базисные значения напряжения U_0 , тока I_0 , сопротивления R_0 , индуктивности L_0 , емкости C_0 , времени T_0 и определяют нормированные (безразмерные) напряжение, ток, сопротивление, индуктивность, емкость, время по следующим формулам:

$$u_* = u / U_0, i_* = i / I_0, R_* = R / R_0, L_* = L / L_0, C_* = C / C_0, t_* = t / T_0.$$

Для установления соотношений между введенными базисными значениями $U_0, I_0, R_0, L_0, C_0, T_0$ используют уравнения

$$u = Ri, u = L \frac{di}{dt}, i = C \frac{du}{dt}.$$

В этих уравнениях заменяют абсолютные значения параметров элементов их нормированными значениями:

$$u = U_0 u_*, i = I_0 i_*, R = R_0 R_*, L = L_0 L_*, C = C_0 C_*, t = T_0 t_*.$$

Тогда исходные уравнения элементов принимают вид:

$$U_0 u_* = R_0 I_0 R_* i_*, U_0 u_* = \frac{L_0 I_0}{T_0} L_* \frac{di_*}{dt_*}, I_0 i_* = \frac{C_0 U_0}{T_0} C_* \frac{du_*}{dt_*}.$$

Затем в полученных уравнениях приравнивают составленные из базисных величин коэффициенты при нормированных значениях и получают соотношения между базисными величинами

$$U_0 = R_0 I_0, U_0 = L_0 I_0 / T_0, I_0 = C_0 U_0 / T_0$$

или

$$R_0 = U_0 / I_0, L_0 = R_0 T_0, C_0 = T_0 / R_0.$$

При выполнении этих соотношений уравнения для нормированных элементов по форме будут такими же, как для исходных элементов:

$$u_* = R_* i_*, u_* = L_* \frac{di_*}{dt_*}, i_* = C_* \frac{du_*}{dt_*}.$$

Полученные соотношения между базисными величинами позволяют выбрать три базисные величины для нормирования шести исходных величин u, i, R, L, C, t , т. е. из шести базисных величин независимыми являются три. При выборе этих трех базисных величин следует иметь в виду, что не все совокупности являются независимыми между собой. Пять совокупностей:

$$U_{\bar{6}}, I_{\bar{6}}, R_{\bar{6}}; R_{\bar{6}}, C_{\bar{6}}, T_{\bar{6}}; R_{\bar{6}}, C_{\bar{6}}, L_{\bar{6}}; C_{\bar{6}}, L_{\bar{6}}, T_{\bar{6}}; R_{\bar{6}}, L_{\bar{6}}, T_{\bar{6}}$$

являются зависимыми и не могут быть приняты для нормирования уравнений.

Обычно в качестве независимых базисных величин выбирают две из совокупности $R_{\bar{6}}, L_{\bar{6}}, C_{\bar{6}}, T_{\bar{6}}$; оставшиеся две из этой совокупности определяют с помощью табл. 3.4. Базисное значение напряжения $U_{\bar{6}}$ или тока $I_{\bar{6}}$ находят с помощью соотношения

$$U_{\bar{6}} = R_{\bar{6}} I_{\bar{6}},$$

предварительно выбрав $I_{\bar{6}}$ или $U_{\bar{6}}$.

Переход в уравнениях к нормированным величинам дает нормированные уравнения цепи, в которой процессы определяется нормированными параметрами, и, в частности, нормированными частотами собственных колебаний $p_{*k} = p_k / p_{\bar{6}}$. Так как размерность p обратна размерности времени, то

$$p_{\bar{6}} = 1 / T_{\bar{6}}.$$

Аналогично, нормированная комплексная переменная s_k и частота ω_k определяются выражениями

$$s_* = s / s_{\bar{6}}, \quad \omega_* = \omega / \Omega_{\bar{6}},$$

где $s_{\bar{6}} = 1 / T_{\bar{6}}$, $\Omega_{\bar{6}} = 1 / T_{\bar{6}}$.

Следует отметить, что результаты анализа процессов в нормированных

Таблица 3.4

Задаваемые величины	Вычисляемая величина			
	$R_{\bar{6}}$	$L_{\bar{6}}$	$C_{\bar{6}}$	$T_{\bar{6}}$
$R_{\bar{6}}, T_{\bar{6}}$	$R_{\bar{6}}$	$R_{\bar{6}} T_{\bar{6}}$	$T_{\bar{6}} / R_{\bar{6}}$	$T_{\bar{6}}$
$R_{\bar{6}}, L_{\bar{6}}$	$R_{\bar{6}}$	$L_{\bar{6}}$	$L_{\bar{6}} / R_{\bar{6}}^2$	$L_{\bar{6}} / R_{\bar{6}}$
$R_{\bar{6}}, C_{\bar{6}}$	$R_{\bar{6}}$	$C_{\bar{6}} R_{\bar{6}}^2$	$C_{\bar{6}}$	$C_{\bar{6}} R_{\bar{6}}$
$L_{\bar{6}}, T_{\bar{6}}$	$L_{\bar{6}} / T_{\bar{6}}$	$L_{\bar{6}}$	$T_{\bar{6}}^2 / L_{\bar{6}}$	$T_{\bar{6}}$
$L_{\bar{6}}, C_{\bar{6}}$	$\sqrt{L_{\bar{6}} / C_{\bar{6}}}$	$L_{\bar{6}}$	$C_{\bar{6}}$	$\sqrt{L_{\bar{6}} C_{\bar{6}}}$
$C_{\bar{6}}, T_{\bar{6}}$	$T_{\bar{6}} / C_{\bar{6}}$	$T_{\bar{6}}^2 / C_{\bar{6}}$	$C_{\bar{6}}$	$T_{\bar{6}}$

величинах легко пересчитываются к конкретным значениям параметров. Для этого достаточно умножить нормированные величины на их базисные значения, произведя денормирование.

3.3. Контрольные вопросы

1. Что называют переменными состояниями?
2. Какие способы составления уравнений состояния Вы знаете?
3. Каковы преимущества метода переменных состояний по сравнению с другими методами анализа во временной области?
4. Что такое передаточная функция цепи и какие способы расчета передаточных функций Вы знаете?
5. Что такое переходная и импульсная характеристики цепи и какова их связь с передаточной функцией?
6. Почему полюсы передаточной функции пассивной цепи расположены в левой полуплоскости?
7. Как найти сигнал по изображению $U(s) = (1 + e^{-\pi s}) / (s^2 + 1)$?
8. Как найти изображение сигнала

$$u(t) = 2e^{-3t}\delta_1(t) + 4e^{-3t(t-2)}\delta_1(t-2)?$$

9. Как по изображению $U(s) = (2s^2 + s + 1) / (s^3 + s^2)$ определить начальное значение оригинала $u(0+)$ и начальное значение его производной $u'(0+)$?
10. Как по известным полюсам $s_{1,2} = -2$, $s_{3,4} = \pm j2$ изображения сигнала записать его общую форму во времени?
11. Как проверить предельные значения АЧХ и ФЧХ исследуемой цепи при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ исходя из свойств цепи?
12. Каково условие неискаженной передачи сигнала через цепь? Удовлетворяет ли Ваша цепь этому условию?
13. Как изменится амплитудный спектр апериодического сигнала при изменении его длительности; амплитуды?
14. Какова связь спектра одиночного сигнала со спектром периодической последовательности этих сигналов?
15. Как влияет скважность периодического сигнала на спектр?

3.4. Типовой пример

Для цепи, изображенной на рис. 3.3, выполним задания курсовой работы. Параметры ветвей $R_1 = R_2 = R_3 = R_H = 1$ Ом, $C = 1$ Ф, $L = 0,5$ Гн.

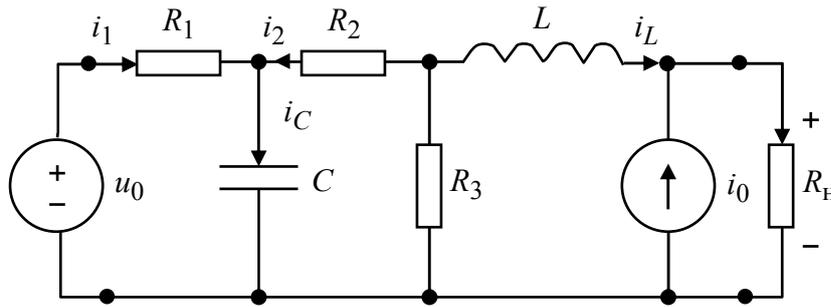


Рис. 3.3

1. Анализ цепи во временной области

методом переменных состояния при постоянных воздействиях

Дано $u_0(t) = U_0 = 10\text{В}$; $i_0(t) = I_0\delta_1(t) = 10\delta_1(t)$ А. Выполнить п. 1 задания к курсовой работе. Переменными состояния следует принять $i_L(t)$ и $u_C(t)$. Для формирования уравнений состояния заменим в исходной цепи для $t > 0$ все L -элементы источниками тока с токами $i_L(t)$ и все C -элементы – источниками напряжения с напряжениями $u_C(t)$. Тогда цепь будет иметь вид, показанный на рис. 3.4.

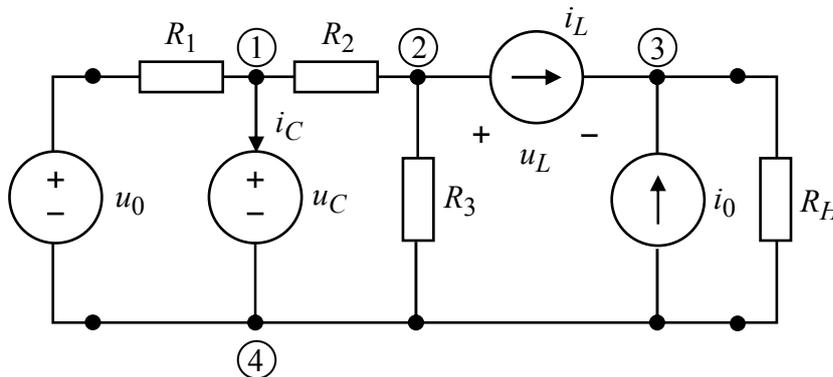


Рис. 3.4

В полученной цепи одним из методов анализа R -цепей найдем напряжение $u_L(t)$ введенного источника тока и ток $i_C(t)$ – источника напряжения. Воспользуемся методом узловых напряжений [1,2]. Примем четвертый узел базисным, считая $U_{(4)} = 0$. Тогда напряжение первого узла определяется сразу $u_{(1)} = u_C(t)$. Для определения неизвестных $u_{(2)}$ и $u_{(3)}$ запишем уравнения узловых напряжений для 2-го и 3-го узлов:

$$\begin{cases} G_{21}u_{(1)} + G_{22}u_{(2)} + G_{23}u_{(3)} = i_{(2)}; \\ G_{31}u_{(1)} + G_{32}u_{(2)} + G_{33}u_{(3)} = i_{(3)}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Определим коэффициенты уравнений и правые части:

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 2; \quad G_{33} = \frac{1}{R_H} = 1; \quad G_{21} = -\frac{1}{R_2} = -1;$$

$$G_{23} = G_{32} = 0; \quad G_{31} = 0; \quad i_{(2)} = -i_L(t); \quad i_{(3)} = I_0 + i_L(t).$$

Систему уравнений (3.1) перепишем в следующем виде:

$$\begin{cases} -u_C(t) + 2u_{(2)} = -i_L(t); \\ u_{(3)} = I_0 + i_L(t), \end{cases}$$

отсюда $u_{(2)} = 0,5u_C(t) - 0,5i_L(t)$; $u_{(3)} = I_0 + i_L(t)$.

Напряжение $u_L(t)$ введенного источника тока:

$$u_L(t) = u_{(2)} - u_{(3)} = 0,5u_C(t) - 1,5i_L(t) - 10. \quad (3.2)$$

Ток $i_C(t)$ введенного источника напряжения:

$$i_C(t) = i_1 + i_2 = \frac{U_0 - u_C(t)}{R_1} + \frac{u_{(2)}(t) - u_C(t)}{R_2} = -1,5u_C(t) - 0,5i_L(t) + 10. \quad (3.3)$$

Так как $di_L/dt = u_L(t)/L$, то, разделив (3.2) на L , получим первое уравнение состояния; учитывая, что $du_C(t)/dt = i_C(t)/C$, разделив (3.3) на C , получим второе уравнение состояния:

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = u_C(t) - 3i_L(t) - 20, \\ \frac{du_C}{dt} = -1,5u_C(t) - 0,5i_L(t) + 10. \end{cases} \quad (3.4)$$

Найдем точное решение этих уравнений. Определим независимые предначальные условия, рассмотрев установившийся режим в исходной цепи для $t < 0$: $u_C(0-) = 6$ В, $i_L(0-) = 2$ А.

Для определения частот собственных колебаний алгебраизируем уравнения состояния (3.4):

$$\begin{cases} (p+3)i_L - u_C = -20, \\ 0,5i_L + (p+1,5)u_C = 10, \end{cases} \quad (3.5)$$

причем в системе (3.5) $p = d/dt$. Характеристическое уравнение получим, приравняв нулю главный определитель системы (3.5):

$$\Delta(p) = (p+3)(p+1,5) + 0,5 = p^2 + 4,5p + 5 = 0. \quad (3.6)$$

Из (3.6) частоты собственных колебаний $p_1 = -2, p_2 = -2,5$. Общий вид точных решений уравнений состояния:

$$\begin{cases} i_L(t) = i_{LB} + i_{LCB} = i_{LB} + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-2,5t}; \\ u_C(t) = u_{CB} + u_{CCB} = u_{CB} + A_3 e^{-2t} + A_4 e^{-2,5t}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Вынужденные составляющие $i_{LB} = I_{LB} = \text{const}, u_{CB} = U_{CB} = \text{const}$ определим из уравнений состояния (3.4):

$$\begin{cases} 0 = U_{CB} - 3I_{LB} - 20; \\ 0 = -1,5U_{CB} - 0,5I_{LB} + 10; \end{cases}$$

отсюда $I_{LB} = -4 \text{ А}, U_{CB} = 8 \text{ В}$. Для определения постоянных интегрирования найдем начальные значения производных из уравнений (3.4):

$$\begin{cases} i'_L(0+) = u_C(0+) - 3i_L(0+) - 20 = 6 - 6 - 20 = -20; \\ u'_C(0+) = -1,5u_C(0+) - 0,5i_L(0+) + 10 = -9 - 1 + 10 = 0. \end{cases}$$

На основании решений (3.7) при $t = 0+$ составим уравнения, необходимые для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 :

$$\begin{cases} i_L(0+) = -4 + A_1 + A_2 = 2; \\ i'_L(0+) = -2A_1 - 2,5A_2 = -20, \end{cases} \quad (3.8)$$

а затем – систему для определения A_3 и A_4 :

$$\begin{cases} u_C(0+) = 8 + A_3 + A_4 = 6; \\ u'_C(0+) = -2A_3 - 2,5A_4 = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

После отыскания из систем (3.8), (3.9) постоянных интегрирования получим точные решения уравнений состояния:

$$\begin{cases} i_L(t) = -4 - 10e^{-2t} + 16e^{-2,5t}; \\ u_C(t) = 8 - 10e^{-2t} + 8e^{-2,5t}. \end{cases}$$

Для численного решения уравнений состояния воспользуемся алгоритмом Эйлера:

$$\begin{cases} i_L[(n+1)h] = i_L(nh) + h \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=nh} = i_L(nh) + h[u_C(nh) - 3i_L(nh) - 20]; \\ u_C[(n+1)h] = u_C(nh) + h \frac{du_C}{dt} \Big|_{t=nh} = u_C(nh) + h[-1,5u_C(nh) - 0,5i_L(nh) + 10], \end{cases}$$

где h – шаг расчета, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Взяв, например, $h = 0,1 \text{ с}$, получим:

$$i_L[(n+1)h] = 0,7i_L(nh) + 0,1u_C(nh) - 2;$$

$$u_C[(n+1)h] = -0,05i_L(nh) + 0,85u_C(nh) + 1.$$

На рис. 3.5 *а, б* построены графики точного (кривая 1) и численного (кривая 2) решений. Как видно, для $u_C(t)$ точное и численное решения в принятом масштабе практически совпадают.

2. Анализ цепи операторным методом при аperiodическом воздействии

Дано: в цепи рис. 3.3 $i_0(t) = 0$; $u_0(t)$ задано графиком рис. 3.6, *а*, где $U_m = 10\text{В}$, $t_H = 5\text{с}$. Независимые предначальные условия нулевые. Требуется выполнить п. 2 задания.

Применяя метод пропорциональных величин к операторной схеме замещения, построенной на основании схемы рис. 3.3, находим функцию передачи $H_U(s) = U_H(s) / U_0(s) = 1 / (s^2 + 4,5s + 5)$.

Полюсы функции передачи являются корнями уравнения $s^2 + 4,5s + 5 = 0$, откуда $s_1 = -2$; $s_2 = -2,5$. Они являются корнями характеристического уравнения (частотами собственных колебаний цепи). Конечных нулей функция передачи не имеет.

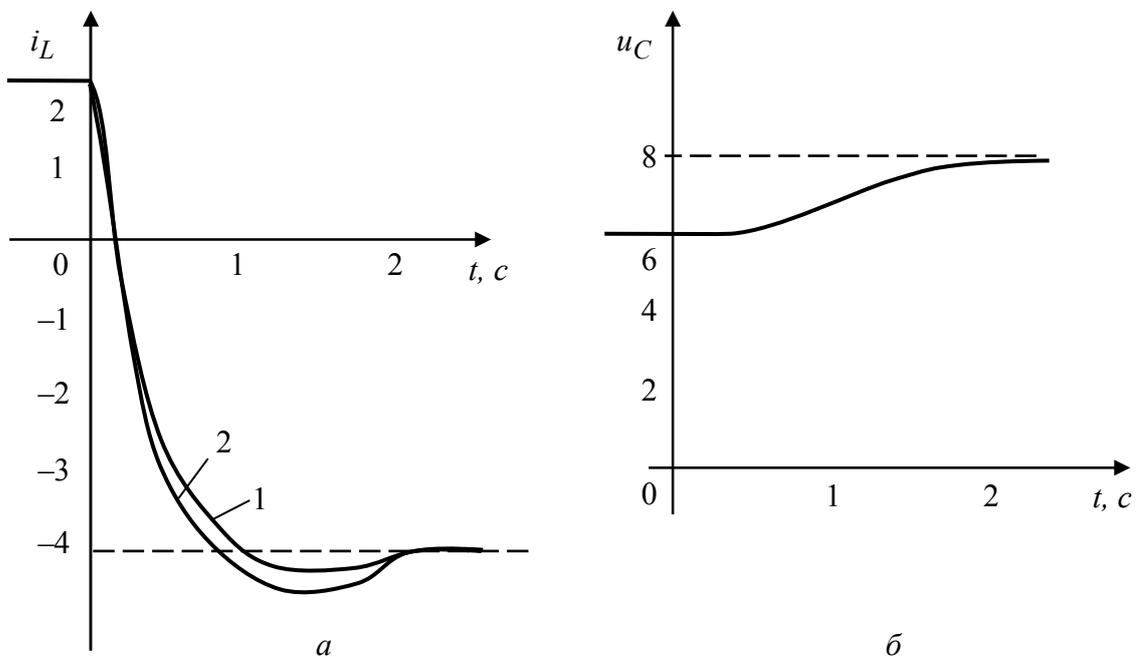


Рис. 3.5

Импульсная характеристика

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_U(s)] = 2e^{-2t} - 2e^{-2,5t}.$$

Переходная характеристика

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_U(s)/s] = 0,2 - e^{-2t} + 0,8e^{-2,5t}.$$

Графики $h(t)$ и $h_1(t)$ показаны на рис. 3.6, б.

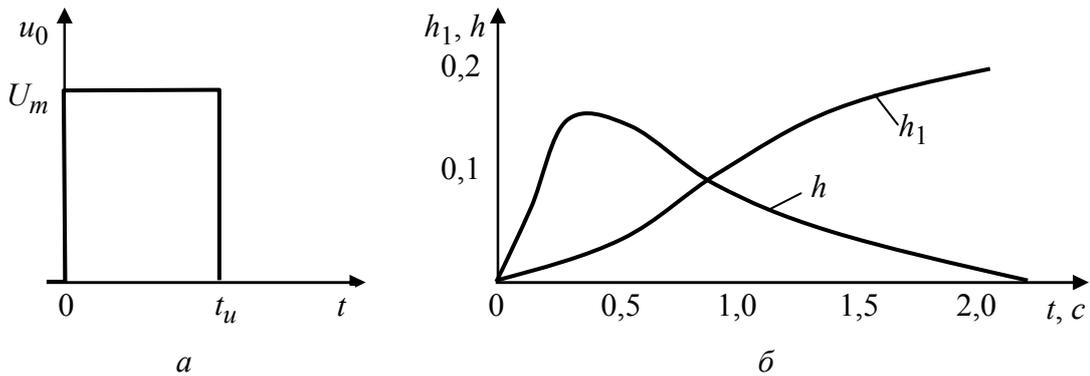


Рис. 3.6

Изображение заданного входного напряжения

$$U_0(s) = \frac{U_m}{s} - \frac{U_m}{s} e^{-st_u} = \frac{10}{s} - \frac{10}{s} e^{-5s}.$$

Изображение выходного напряжения

$$U_H(s) = H_U(s)U_0(s) = \frac{10}{s(s^2 + 4,5s + 5)} - \frac{10e^{-5s}}{s(s^2 + 4,5s + 5)}.$$

Оригинал выходного напряжения

$$u_H(t) = (2 - 10e^{-2t} + 8e^{-2,5t})\delta_1(t) - (2 - 10e^{-2(t-5)} + 8e^{-2,5(t-5)})\delta_1(t-5).$$

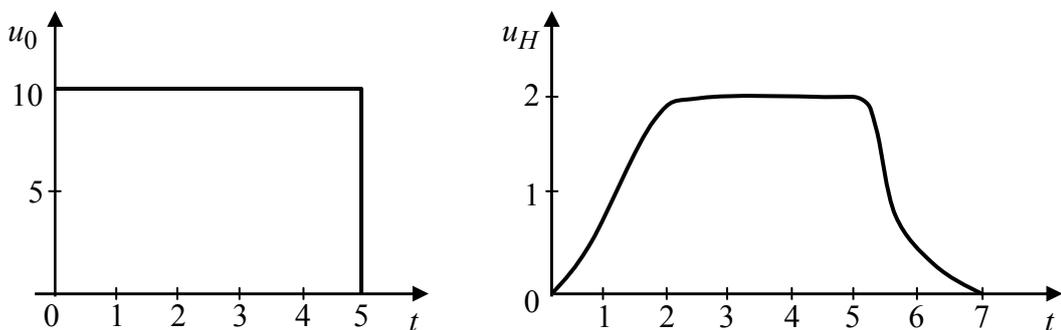


Рис. 3.7

На рис. 3.7 построены графики входного $u_0(t)$ и выходного $u_H(t)$ напряжений.

3. Качественный анализ цепи частотным методом при аperiodическом воздействии

По условиям п. 2 задания требуется выполнить п. 3. Обобщенная частотная, т. е. амплитудно-фазовая, характеристика

$$H_U(j\omega) = H_U(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{(5 - \omega^2) + j4,5\omega}.$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$|H_U(j\omega)| = 1 / \sqrt{(5 - \omega^2)^2 + (4,5\omega)^2} = 1 / \sqrt{\omega^4 + 10,25\omega^2 + 25}.$$

Фазочастотная характеристика

$$\Phi_H(\omega) = -\arctg[4,5\omega / (5 - \omega^2)].$$

Графики АФХ, АЧХ и ФЧХ показаны на рис. 3.8, а, б соответственно.

Полоса пропускания, определенная по графику $|H_U(j\omega)|$,

$$\Delta\omega_{0,707} \simeq 1,5c^{-1}.$$

Спектральная плотность входного напряжения

$$U_0(j\omega) = U_0(s)|_{s=j\omega} = A_0(\omega)e^{j\alpha_0(\omega)},$$

где $A_0(\omega)$ – амплитудный, $\alpha_0(\omega)$ – фазовый спектры воздействия;

$$U_0(j\omega) = \frac{U_m}{j\omega}(1 - e^{-j\omega t_0}) = \left(\frac{20}{\omega} \sin 2,5\omega\right)e^{-j2,5\omega} \quad (3.10)$$

Из выражения (3.10) следует, что амплитудный спектр

$$A_0(\omega) = \frac{20}{\omega} |\sin 2,5\omega|,$$

фазовый спектр

$$\alpha_0(\omega) = \begin{cases} -2,5\omega, & \text{если } \sin 2,5\omega > 0; \\ -2,5\omega + \pi, & \text{если } \sin 2,5\omega < 0. \end{cases}$$

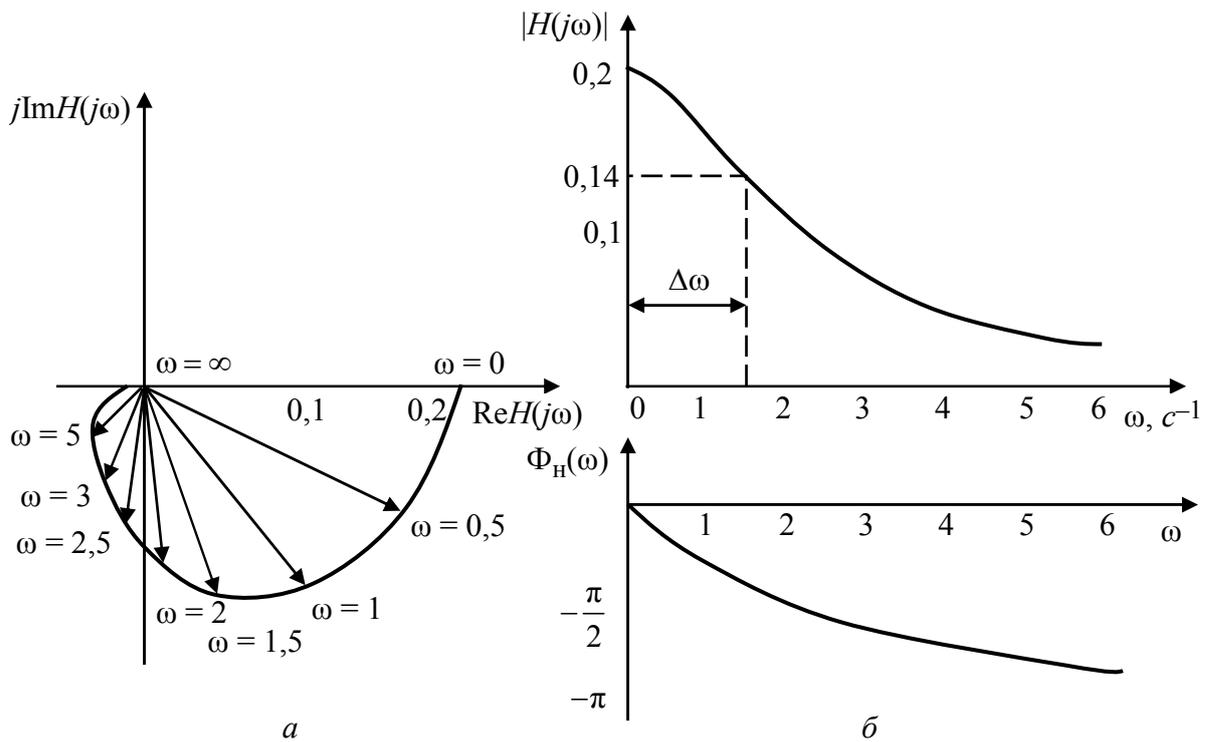


Рис. 3.8

Графики спектров $A_0(\omega)$ и $\alpha_0(\omega)$ показаны на рис. 3.9. Ширина спектра, определенная по графику по 10%-му критерию, $\Delta\omega_0 \simeq 3,4 c^{-1}$.

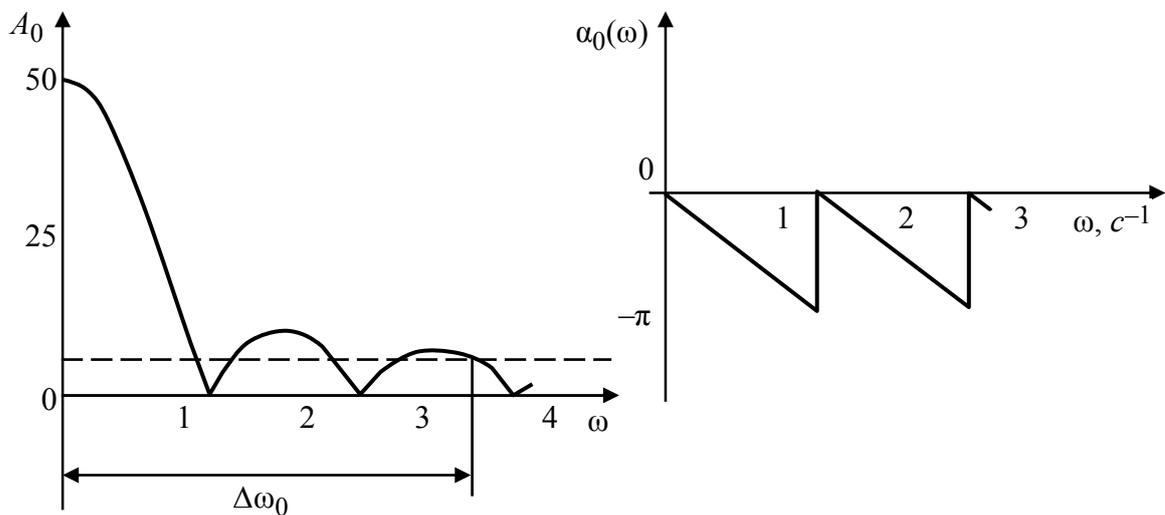


Рис. 3.9

Сопоставляя спектры входного сигнала (рис. 3.9) с частотными характеристиками цепи (рис. 3.8, б), можно установить, что существенная часть амплитудного спектра входного сигнала укладывается в полосу пропускания, а фазочастотная характеристика в этой полосе близка к линейной. Поэтому при прохождении через цепь входной сигнал будет сравнительно мало искажен. Поскольку при $\omega \rightarrow \infty$ АЧХ равна нулю, можно ожидать

увеличения длительности переднего и заднего фронтов выходного импульса по сравнению с входным. Этот качественный вывод подтверждается точным расчетом в п. 2 (см. рис. 3.7).

4. Анализ цепи частотным методом при периодическом воздействии

Цепь, подлежащая анализу, задана в п. 2. Периодическое напряжение $u_0(t)$ задано графиком рис. 3.10, а, где $U_m = 10\text{В}$, $t_{\text{и}} = 5\text{с}$, $T = 2t_{\text{и}} = 10\text{с}$. Требуется выполнить задание п. 4.

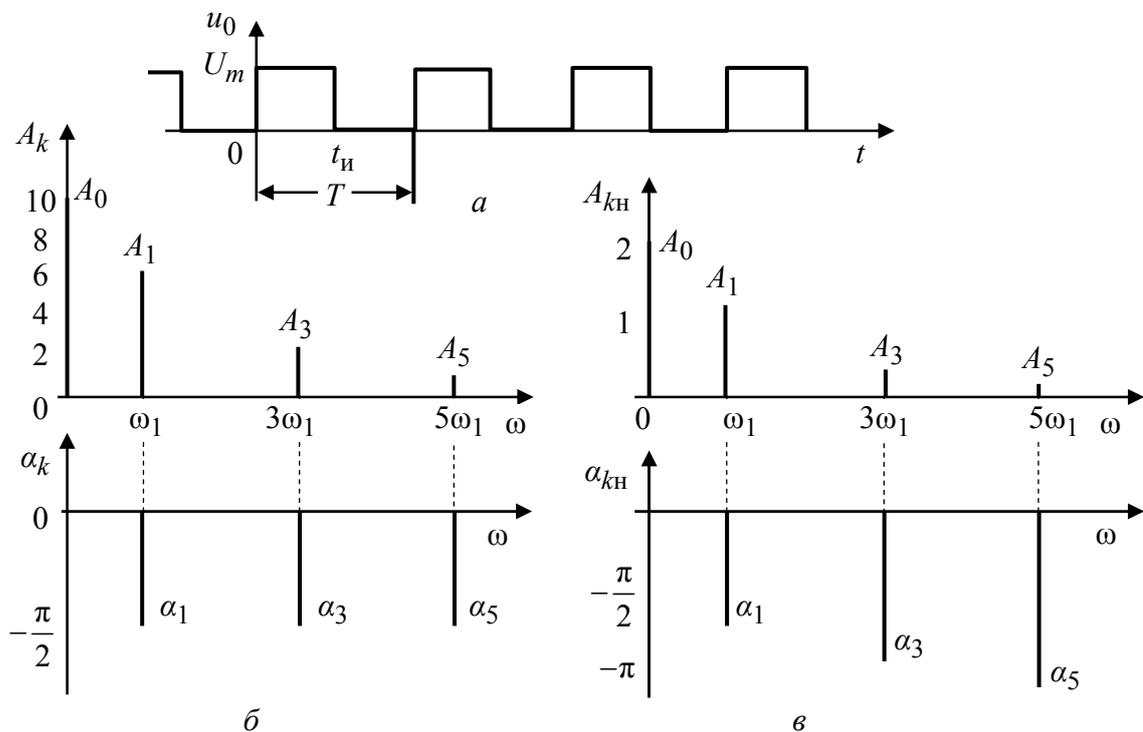


Рис. 3.10

Для разложения в ряд Фурье периодической последовательности импульсов найдем комплексные амплитуды гармоник ряда:

$$A_k = \frac{2}{T} [U_0(j\omega)] \Big|_{\omega=k\omega_1},$$

где $\omega_1 = 2\pi/T = 0,2\pi$ – частота первой гармоники, $k = 0, 1, 2, \dots$ $U_0(j\omega)$ определено в (3.10).

В примере получим

$$A_k = \left(\frac{20}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \right) e^{-jk\pi/2} = A_k \exp(j\alpha_k).$$

Значения A_k и α_k приведены в табл. 3.5; на рис. 3.10, б построены дискретные амплитудный и фазовый спектры.

Таблица 3.5

k	A_k	α_k		k	A_k	α_k
0	10	–		4	0	–
1	6,366	$-\pi/2$		5	1,273	$-\pi/2$
2	0	–		6	0	–
3	2,122	$-\pi/2$		7	0,909	$-\pi/2$

Таким образом, в соответствии с шириной спектра аппроксимирующий отрезок ряда Фурье $u_{0a}(t)$, описывающего периодическое воздействие $u_0(t)$, имеет вид

$$u_{0a} = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos(k\omega_1 t + \alpha_k) = 5 + 6,366 \cos\left(0,2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 2,122 \cos\left(0,6\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 1,273 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Амплитуды и начальные фазы гармоник выходного напряжения

$$A_{kH} = |H_U(jk\omega_1)| A_k; \quad \alpha_{kH} = \Phi_H(k\omega_1) + \alpha_k(k\omega_1),$$

т. е. необходимо вычислить значения АЧХ и ФЧХ функции передачи для требуемых частот $k\omega_1$; $k = 0, 1, 2, \dots$. Результаты всех вычислений сведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6

k	$k\omega_1, c^{-1}$	$ H_U(jk\omega_1) $	$\Phi_H(k\omega_1), \text{рад}$	$A_{kH}, \text{В}$	$\alpha_{kH}, \text{рад}$
0	0	0,2	–	2	–
1	$0,2\pi$	0,185	$-0,55$	1,178	$-2,12$
2	$0,6\pi$	0,116	$-1,4$	0,246	$-2,97$
3	π	0,067	$-1,9$	0,085	$-3,47$

Дискретные амплитудный и фазовый спектры выходного сигнала построены на рис. 3.10, в.

Пренебрегая пятой гармоникой, имеем

$$u_H(t) \approx \frac{A_{0H}}{2} + \sum_{k=1}^n A_{kH} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{kH}) = 1 + 1,178 \cos(0,2\pi t - 2,12) + 0,246 \cos(0,6\pi t - 2,97).$$

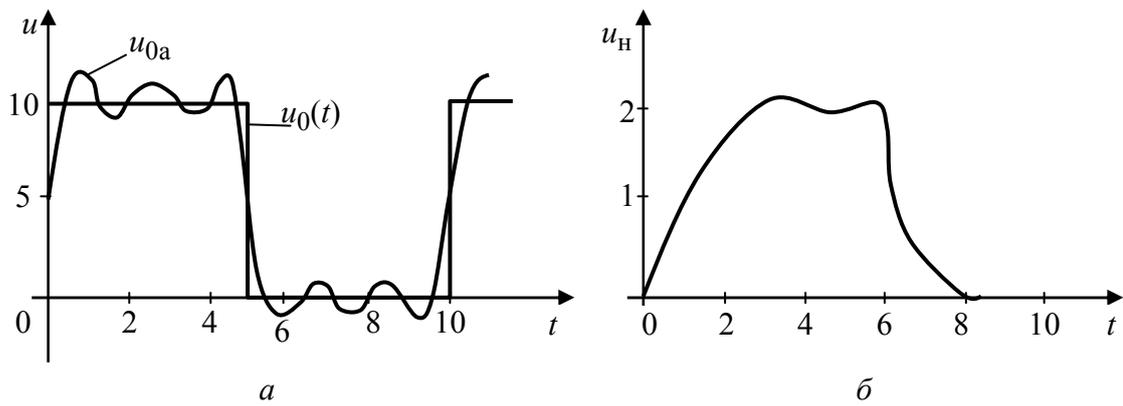


Рис. 3.11

На рис. 3.11, а построены графики $u_0(t)$ и его аппроксимации $u_{0a}(t)$ полученным отрезком ряда Фурье, а на рис. 3.11, б изображен график $u_H(t)$.

Тема 4. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ

Целью курсовой работы является усвоение различных методов качественного и количественного анализа линейных цепей.

4.1. Задание к курсовой работе

В курсовой работе необходимо выполнить следующие пункты.

1. Анализ цепи во временной области.

Аналізу подлежат одна из цепей, схемы которых заданы в табл. 4.1 тройками чисел [3] в соответствии с номером варианта задания. Независимые начальные условия нулевые. В момент времени $t = 0$ на вход цепи подан сигнал в виде ступенчатой функции напряжения $U_1\delta_1(t)$ или тока $I_1\delta_1(t)$, где $U_1 = 1\text{В}$; $I_1 = 1\text{А}$. Фактически нормированные параметры R , L , C -элементов заданы соответственно в омах, генри, фарадах.

Таблица 4.1

Вариант	Цепь
1	114 – ИН u_1 ; 224 – $R_H = 1$; 313 – $R_3 = 1$; 432 – $R_4 = 1$; 534 – $C_5 = 1$; 624 – $C_6 = 0,25$
2	141 – ИТ i_1 ; 224 – $R_H = 1$; 314 – $R_3 = 0,5$; 434 – $R_4 = 2$; 513 – $L_5 = 0,1$; 632 – $C_6 = 0,2$
3	131 – ИТ i_1 ; 223 – $R_H = 0,5$; 313 – $R_3 = 0,5$; 412 – $R_4 = 0,1$; 513 – $L_5 = 2/3$; 623 – $C_6 = 1$
4	114 – ИН u_1 ; 224 – $R_H = 1$; 313 – $R_3 = 2$; 432 – $R_4 = 2$; 534 – $C_5 = 1$; 624 – $C_6 = 0,5$
5	141 – ИТ i_1 ; 224 – $R_H = 1$; 314 – $R_3 = 0,5$; 434 – $R_4 = 2$; 513 – $L_5 = 1/12$; 632 – $C_6 = 1/6$
6	141 – ИТ i_1 ; 224 – $R_H = 1$; 314 – $R_3 = 1$; 434 – $R_4 = 1$; 513 – $L_5 = 1$; 632 – $L_6 = 0,25$
7	114 – ИТ i_1 ; 224 – $R_H = 1$; 314 – $R_3 = 0,5$; 434 – $R_4 = 2$; 513 – $L_5 = 1/6$; 632 – $C_6 = 1/3$
8	114 – ИН u_1 ; 224 – $R_H = 1$; 313 – $R_3 = 0,5$; 432 – $R_4 = 2$; 534 – $C_5 = 0,1$; 624 – $L_6 = 0,2$
9	114 – ИН u_1 ; 224 – $R_H = 1$; 312 – $R_3 = 0,5$; 423 – $R_4 = 2$; 534 – $L_5 = 0,5$; 624 – $C_6 = 0,2$
10	141 – ИТ i_1 ; 224 – $R_H = 1$; 314 – $R_3 = 0,5$; 434 – $R_4 = 0,5$; 513 – $L_5 = 1$; 632 – $L_6 = 0,5$
11	114 – ИН u_1 ; 224 – $R_H = 1$; 313 – $R_3 = 2$; 434 – $R_4 = 2$; 513 – $L_5 = 0,5$; 632 – $L_6 = 1$

Вариант	Цепь
12	114 – ИИ u_1 ; 224 – $R_H = 1$; 313 – $R_3 = 0,5$; 432 – $R_4 = 2$; 534 – $C_5 = 1/12$; 624 – $L_6 = 1/6$
13	114 – ИИ u_1 ; 224 – $R_H = 2$; 313 – $R_3 = 2$; 432 – $R_4 = 1$; 534 – $L_5 = 2$; 624 – $C_6 = 1$
14	114 – ИИ u_1 ; 224 – $R_H = 1$; 313 – $R_3 = 1$; 434 – $R_4 = 1$; 513 – $L_5 = 1$; 632 – $L_6 = 0,25$
15	141 – ИТ i_1 ; 224 – $R_H = 1$; 334 – $R_3 = 0,5$; 412 – $R_4 = 0,5$; 513 – $C_5 = 0,5$; 624 – $C_6 = 1$

Требуется следующее.

1.1. Составить уравнения состояния цепи для $t \geq 0$.

1.2. По уравнениям состояния аналитическим расчетом во временной области найти переходную характеристику $h_1(t)$ для реакции и построить ее график. В предлагаемых цепях реакцией (т. е. выходным сигналом) является напряжение нагрузки $u_2(t)$ или ток нагрузки $i_2(t)$.

2. Анализ цепи операторным методом при действии одиночного импульса на входе.

В момент времени $t = 0$ на вход цепи, заданной в п. 1, при нулевых независимых начальных условиях подается сигнал в виде одиночного импульса напряжения или тока, форма которого приведена на рис. 4.1, а параметры – в табл. 4.2. Требуется следующее.

2.1. В соответствии с номером выполняемого варианта определить функцию передачи напряжений $H_U(s)$ или токов $H_I(s)$. Осуществить проверку функции передачи при $s = 0$ и $s \rightarrow \infty$; представить соответствующие этим значениям схемы замещения цепи.

2.2. Найти нули и полюсы функции передачи и показать их расположение на плоскости комплексной частоты. По значениям полюсов функции передачи дать заключение о характере и практической длительности переходного процесса.

2.3. Определить переходную $h_1(t)$ характеристику цепи, сравнить с найденной в п. 1.2 задания. Проверить $h_1(0)$ и $h_1(\infty)$ по аналитическому выражению $h_1(t)$ и непосредственно по схеме цепи.

2.4. Определить изображение по Лапласу входного одиночного импульса.

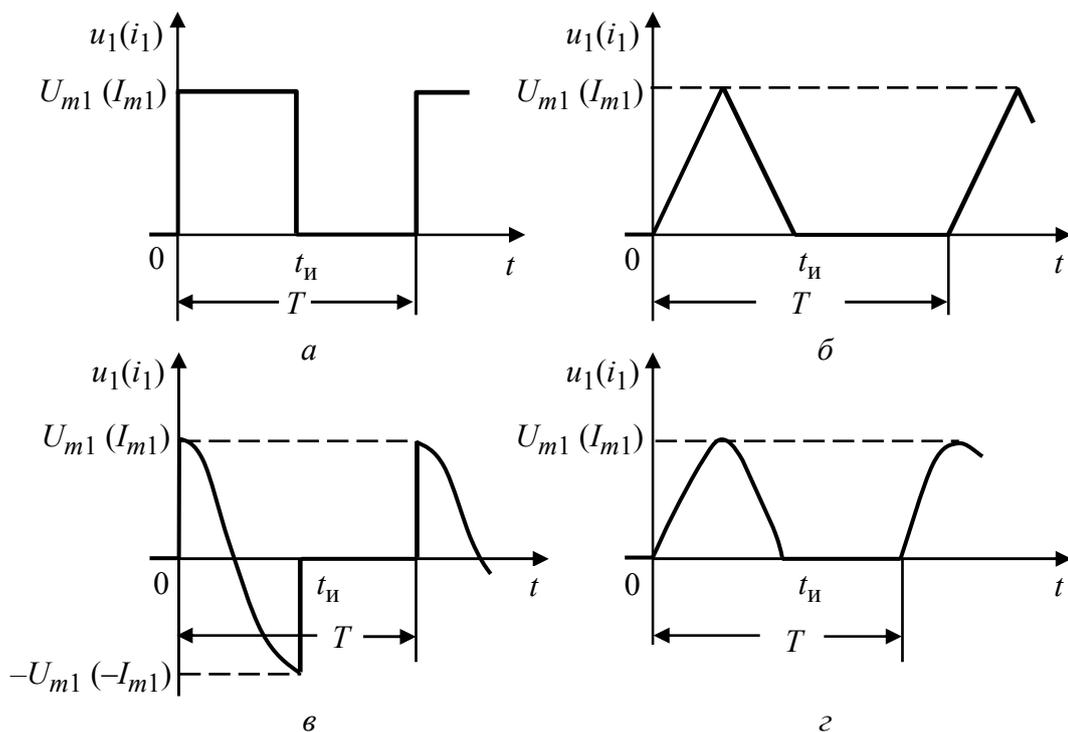


Рис. 4.1

2.5. Определить изображение выходного сигнала и далее найти реакцию $i_2(t)$ или $u_2(t)$ во временной области. Построить графики входного и выходного сигналов на одном рисунке.

Таблица 4.2

Вариант	Рис. 4.1	Параметры сигнала			
		$U_m, В$	$I_m, А$	$t_{и}, с$	$T, с$
1	б	10		1,2	2,4
2	г		4	0,5	1,5
3	б		2	1,0	4,0
4	в	3		1,5	3,0
5	б		10	0,1	0,3
6	г		5	1,2	3,6
7	в		2	0,5	2,0
8	б	6		0,4	1,2
9	в	6		0,6	1,8
10	г		10	1,5	4,5
11	б	7		3,0	9,0
12	в	5		0,3	0,6
13	а	2		3,0	6,0
14	б	3		5,0	10,0
15	г		2	3,0	12,0

3. Анализ цепи частотным методом при действии одиночного импульса на входе.

Условия заданы в п. 2 задания. Требуется следующее.

3.1. Используя найденное в 2.1 выражение $H_U(s)$ или $H_I(s)$, вычислить и построить графики амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристик функций передачи цепи $H_U(j\omega)$ или $H_I(j\omega)$. Произвести проверку АЧХ при $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$.

3.2. Определить полосу пропускания цепи по уровню $0,707|H(j\omega)|_{\max}$.

3.3. Найти и построить амплитудный и фазовый спектры входного одиночного импульса. Найти ширину амплитудного спектра по уровню $0,1|F_1(j\omega)|_{\max}$ или критерию, предложенному преподавателем.

3.4. Сопоставить спектры входного импульса с частотными характеристиками цепи. Дать предварительное заключение об ожидаемых искажениях сигнала на выходе цепи. Сравнить эти качественные оценки с сигналом на выходе, полученным в п. 2.5 задания.

3.5. Построить графики амплитудного и фазового спектров выходного сигнала, используя графики пп. 3.1, 3.3 задания. Проконтролировать площадь реакции по значению ее спектра при $\omega = 0$.

4. Анализ цепи частотным методом при периодическом воздействии.

На вход цепи подан сигнал в виде периодической последовательности импульсов напряжения или тока. Форма сигнала приведена на рис. 4.1, параметры – в табл. 4.2. Требуется следующее.

4.1. Разложить в ряд Фурье заданный входной периодический сигнал. Построить его амплитудный и фазовый дискретные спектры.

4.2. Построить на одном графике заданный входной периодический сигнал и его аппроксимацию отрезком ряда Фурье. Число гармоник отрезка ряда Фурье определяется по уровню $0,1 A_{km}$, где A_{km} – максимальная составляющая амплитудного спектра, или по другому критерию, предложенному преподавателем.

4.3. Используя рассчитанные в п. 3.1 задания АЧХ и ФЧХ, найти реакцию цепи в виде отрезка ряда Фурье с числом гармоник, определенным для входного сигнала.

4.4. Построить амплитудный и фазовый дискретные спектры выходного сигнала. Построить график выходного сигнала, найденного в п. 4.3 задания, в одном масштабе рядом с графиком аппроксимированного входного сигнала.

4.5. Дать заключение об искажении сигнала на выходе цепи.

4.2. Пример расчета

Цепь задана тройками чисел [3]: 141 – ИТ i_1 ; 234 – $R_H = 0,5 \text{ Ом}$; 314 – $R_3 = 2 \text{ Ом}$; 412 – $L_4 = 2 \text{ Гн}$; 523 – $R_5 = 1 \text{ Ом}$; 634 – $C_6 = 4 \text{ Ф}$. На рис. 4.2, а

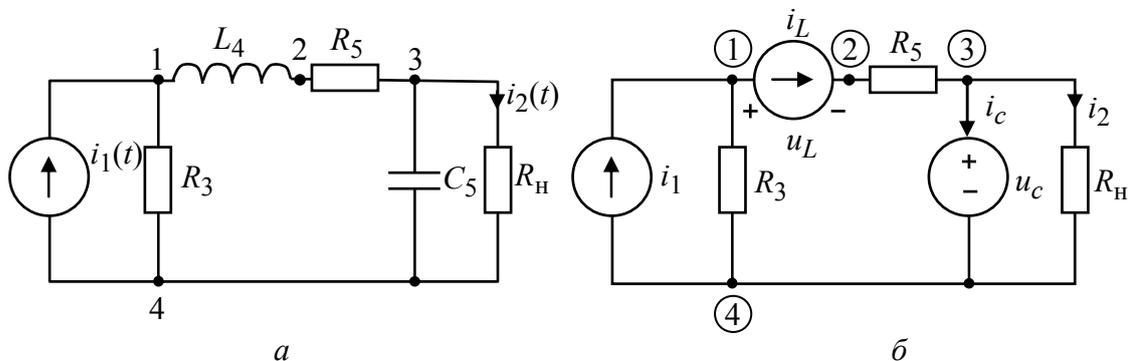


Рис. 4.2

приведена схема данной цепи, для которой выполним задание курсовой работы.

1. Анализ цепи во временной области

Дано $i_1(t) = I_1 \delta_1(t) = \delta_1(t)$, А.

Составление уравнений состояния цепи для $t \geq 0$

Для составления уравнений состояния заменим в исходной цепи L -элемент источником тока $i_L(t)$, а C -элемент – источником напряжения $u_C(t)$. Тогда цепь станет резистивной и будет иметь вид, показанный на рис. 4.2, б. В полученной схеме одним из методов расчета R -цепей найдем напряжение $u_L(t)$ и ток $i_C(t)$. Воспользуемся, например, методом узловых напряжений. Примем четвертый узел за базисный, тогда узловое напряжение третьего узла $u_{(3)} = u_C(t)$, а для определения $u_{(1)}$ и $u_{(2)}$ запишем уравнения

$$\begin{cases} G_{11}u_{(1)} + G_{12}u_{(2)} + G_{13}u_{(3)} = i_{(1)}, \\ G_{21}u_{(1)} + G_{22}u_{(2)} + G_{23}u_{(3)} = i_{(2)}, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $G_{11} = 1/R_3 = 0,5$; $G_{22} = 1/R_5 = 1$; $G_{12} = 0$; $G_{23} = -1/R_5$; $G_{13} = 0$;
 $i_{(1)} = i_1 - i_L = 1 - i_L$; $i_{(2)} = i_L$.

Систему уравнений (4.1) перепишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_3}u_{(1)} = i_1 - i_L, \\ \frac{1}{R_5}u_{(2)} - \frac{1}{R_5}u_C = i_L, \end{cases}$$

откуда $u_{(1)} = R_3 i_1 - R_3 i_L$, $u_{(2)} = R_5 i_L + u_C$.

Напряжение u_L введенного источника тока:

$$u_L = u_{(1)} - u_{(2)} = -u_C - (R_3 + R_5)i_L + R_3 i_1. \quad (4.2)$$

Для определения тока i_C составим для третьего узла уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$i_C = -u_C / R + i_L. \quad (4.3)$$

Так как $u_L = L di_L / dt$, а $i_C = C du_C / dt$, то, разделив (4.2) на L_4 , а (4.3) на C_5 , получим уравнения состояния:

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{R_H C_5} u_C + \frac{1}{C_5} i_L, \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L_4} u_C - \frac{R_3 + R_5}{L_4} i_L + \frac{R_3}{L_4} i_1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Уравнения состояния (4.4) в матричной форме имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_H C_5} & \frac{1}{C_5} \\ -\frac{1}{L_4} & -\frac{R_3 + R_5}{L_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R_3}{L_4} \end{bmatrix} [i_1].$$

Вычисление по уравнениям состояния переходной характеристики для выходного сигнала

Переходная характеристика цепи $h_1(t)$ – это реакция цепи на воздействии сигнала в виде единичной ступенчатой функции $\delta_1(t)$. Для ее определения найдем решение уравнений (4.4) относительно u_C , приняв воздействию i_1 равным 1 при $t > 0$. Подставим в (4.4) численные значения параметров цепи и воздействия; тогда

$$\begin{aligned}\frac{du_C}{dt} &= -0,5u_C + 0,25i_L, \\ \frac{di_L}{dt} &= -0,5u_C - 1,5i_L + 1.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Для определения частот собственных колебаний алгебраизируем уравнения состояния:

$$\begin{cases} (p + 0,5)u_C - 0,25i_L = 0, \\ 0,5u_C + (p + 1,5)i_L = 0, \end{cases}\tag{4.6}$$

т. е. в системе уравнений (4.5) заменяем $p = d / dt$.

Характеристическое уравнение получим, приравняв нулю главный определитель системы (4.6):

$$\Delta(p) = (p + 0,5)(p + 1,5) + 0,125 = p^2 + 2p + 0,875 = 0.\tag{4.7}$$

Частоты собственных колебаний определяются решением уравнения (4.7): $p_1 = -0,65$; $p_2 = -1,35$.

Общий вид решений уравнений состояния:

$$\begin{cases} u_C(t) = u_{C\text{вын}} + A_1 e^{-0,65t} + A_2 e^{-1,35t}, \\ i_L(t) = i_{L\text{вын}} + A_3 e^{-0,65t} + A_4 e^{-1,35t}. \end{cases}\tag{4.8}$$

Вынужденные составляющие при постоянном воздействии $u_{C\text{вын}} = \text{const}$, $i_{L\text{вын}} = \text{const}$. Определим их из уравнений состояния (4.5), записанных для вынужденных составляющих:

$$\begin{cases} 0 = -0,5u_{C\text{вын}} + 0,25i_{L\text{вын}}, \\ 0 = -0,5u_{C\text{вын}} - 1,5i_{L\text{вын}} + 1. \end{cases}$$

Отсюда $u_{C\text{вын}} = 0,285$ В. Для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 из уравнений состояния (4.5) найдем начальное значение производной:

$$u'_C(0+) = -0,5u_C(0+) + 0,25i_L(0+) = 0,$$

поскольку переходная характеристика цепи определяется при нулевых независимых начальных условиях:

$$u_C(0-) = 0, i_L(0-) = 0.$$

На основании решений (4.8) составим при $t = 0+$ систему уравнений для определения A_1 и A_2 :

$$\begin{cases} u_C(0+) = 0,285 + A_1 + A_2 = 0, \\ u'_C(0+) = -0,65A_1 - 1,35A_2 = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Решение системы уравнений (4.9) дает: $A_1 = -0,548$; $A_2 = 0,263$. Тогда уравнение для u_C в (4.8):

$$u_C(t) = 0,285 - 0,548e^{-0,65t} + 0,263e^{-1,35t}.$$

Из схемы рис. 4.2, а следует, что реакция цепи $i_2 = u_C / R_H$, тогда с учетом $R_H = 0,5$ Ом выражение переходной характеристики $h_1(t)$ выходной реакции $h_1(t) = (0,57 - 1,1e^{-0,65t} +$

$$+ 0,53e^{-1,35t})\delta_1(t).$$

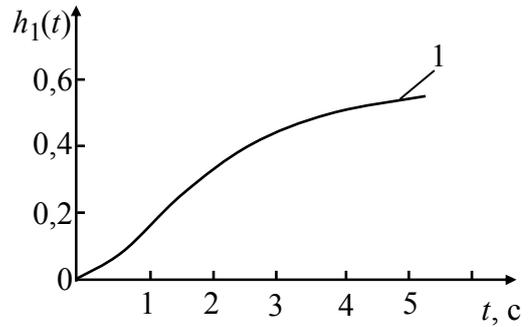


Рис. 4.3

На рис. 4.3 приведен график $h_1(t)$.

2. Анализ цепи операторным методом при действии одиночного импульса на входе

Дано: в цепи рис. 4.2, а воздействие $i_1(t)$ задано графиком рис. 4.4, а, причем $I_m = 10$ А, $t_H = 20$ с. Начальные условия нулевые.

Определение функции передачи цепи

Функцию передачи цепи по току $H_I(s) = I_2(s) / I_1(s)$, где $I_1(s)$, $I_2(s)$ – изображения по Лапласу реакции и воздействия, можно найти методами пропорциональных величин, контурных токов, узловых напряжений и другими методами анализа цепей.

Применим метод контурных токов к операторной схеме замещения, построенной на основе схемы рис. 4.2, а, в которой L - и C -элементы заменены операторными сопротивлениями $Z_L = sL$ и $Z_C = 1/sC$ (рис. 4.4, б):

$$I_{(2)}(s) = \frac{\begin{vmatrix} R_3 + R_5 + Z_L + Z_C & I_1(s)R_3 \\ -Z_C & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_3 + R_5 + Z_L + Z_C & -Z_C \\ -Z_C & Z_C + R_H \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 + 2s + 1/4s & 2I_1(s) \\ -1/4s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + 2s + 1/4s & -1/4s \\ -1/4s & 0,5 + 1/4s \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{I_1(s)}{2s^2 + 4s + 1,75}.$$

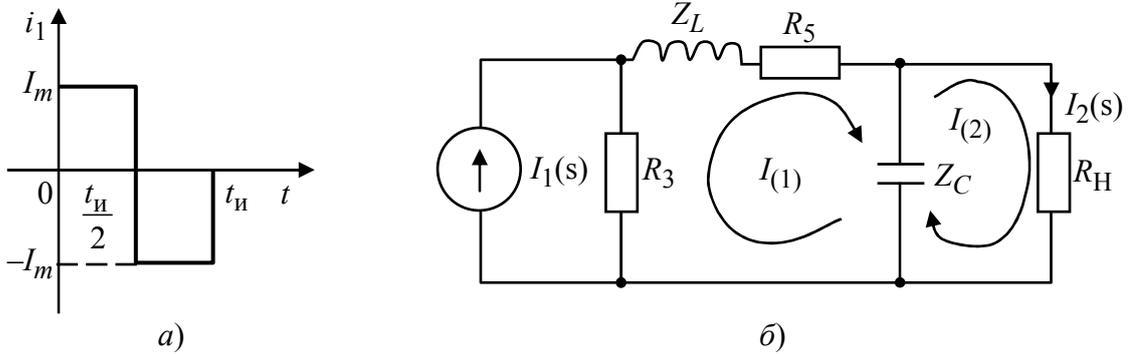


Рис. 4.4

С учетом $I_2(s) = I_{(2)}(s)$, функция передачи

$$H_I(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{0,5}{s^2 + 2s + 0,875}. \quad (4.10)$$

Из выражения (4.10) определим значения $H_I(s)$ при $s = 0$ и $s \rightarrow \infty$: $H_I(0) = 0,57$, $H_I(\infty) = 0$.

Проверим полученные значения $H_I(0)$ и $H_I(\infty)$ по схемам замещения, соответствующим $s = 0$ (рис. 4.5, а, где $L \rightarrow \text{КЗ}$; $C \rightarrow \text{XX}$), и $s \rightarrow \infty$ (рис. 4.5, б), где $L \rightarrow \text{XX}$; $C \rightarrow \text{КЗ}$). Из схемы рис. 4.5, а $H_I(0) = I_2 / I_1 = R_3 / (R_3 + R_5 + R_H) = 0,57$; из схемы рис. 4.5, б $H_I(\infty) = I_2 / I_1 = 0$.

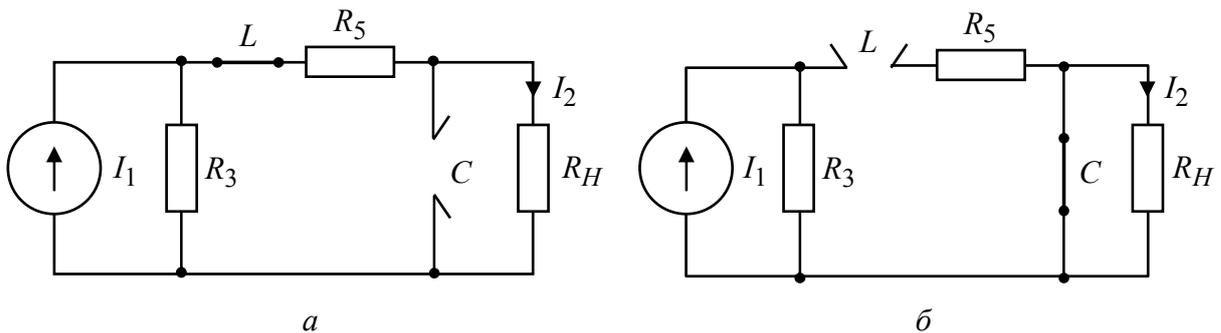


Рис. 4.5

Определение нулей и полюсов функции передачи

Нули – корни числителя, полюса – корни полинома знаменателя функции передачи. Конечных нулей функция передачи $H_I(s)$ не имеет. Полюса, называемые также частотами собственных колебаний цепи, являются

согласно (4.10) корнями характеристического уравнения $s^2 + 2s + 0,875 = 0$. Они равны $s_1 = -0,65$; $s_2 = -1,35$. Расположение полюсов на плоскости комплексной частоты приведено на рис. 4.6, а. Исходя из вида полюсов (отрицательные, простые), можно заключить, что переходной процесс в рассматриваемой цепи имеет апериодический, затухающий характер; его практическая длительность

$$t_{\text{III}} \simeq \frac{3}{|s|_{\text{min}}} = \frac{3}{|s_1|} = 4,62 \text{ с.}$$

Определение переходной характеристики цепи

Переходную характеристику $h_1(t)$ – реакцию цепи на единичную ступенчатую функцию $\delta_1(t)$ при нулевых независимых начальных условиях – находим как оригинал функции $H_1(s) = H_I(s) / s$

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}[H_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0,5}{s(s+0,65)(s+1,35)}\right] = \\ &= (0,57 - 1,1e^{-0,65t} + 0,53e^{-1,35t})\delta_1(t). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Если полюсы комплексно-сопряженные, т. е. $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$, то

$$H_1(s) = \frac{M(s)}{s(s + \alpha - j\omega)(s + \alpha + j\omega)};$$

в этом случае переходную характеристику следует искать в виде

$$h_1(t) = [A_0 + 2A_1e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \beta)]\delta_1(t),$$

где

$$\dot{A}_1 = A_1 e^{j\beta} = H_1(s)(s + \alpha - j\omega) \Big|_{s = -\alpha + j\omega}.$$

Из выражения (4.11) определим значения $h_1(t)$ при $t = 0+$ и $t \rightarrow \infty$: получим $h_1(0+) = 0$; $h_1(\infty) = 0,57$.

Проверим найденные значения по схемам замещения исходной цепи рис. 4.2, а, соответствующим $t = 0+$ (рис. 4.5, б), где $L \rightarrow XX$, $C \rightarrow K3$, и $t \rightarrow \infty$ (рис. 4.5, а), где $L \rightarrow K3$, $C \rightarrow XX$. При $I_1 = 1$ из схемы рис. 4.5, б $h_1(0) = I_2(0) = 0$; из схемы рис. 4.5, а имеем $h_1(\infty) = I_2(\infty) = R_3 / (R_3 + R_5 + R_H) = 0,57$. График $h_1(t)$ был показан на рис. 4.3.

Определение изображения по Лапласу входного одиночного импульса

Входной одиночный импульс тока $i_1(t)$, приведенный на рис. 4.4, а, может быть описан суммой трех ступенчатых функций:

$$i_1(t) = I_m \delta_1(t) - 2I_m \delta_1(t - 0,5t_{\text{н}}) + I_m \delta_1(t - t_{\text{н}}).$$

Известно, что $\mathcal{L}[\delta_1(t)] = 1/s$. Используя теорему смещения в вещественной области, получим:

$$I_1(s) = \frac{I_m}{s} (1 - 2 \exp(-0,5t_{\text{н}}s) + \exp(-t_{\text{н}}s)) = \frac{10}{s} (1 - 2 \exp(-10s) + \exp(-20s)).$$

Определение изображения выходного сигнала $I_2(s)$ и реакции цепи во временной области $i_2(t)$

Изображение выходного тока

$$I_2(s) = I_1(s) H_I(s) = \frac{5}{s(s + 0,65)(s + 1,35)} (1 - 2e^{-10s} + e^{-20s}).$$

Оригинал $I_2(s)$ находим, используя теорему смещения в вещественной области [1]. Выходной ток

$$\begin{aligned} i_2(t) = & (5,7 - 11e^{-0,65t} + 5,3e^{-1,35t}) \delta_1(t) - \\ & - 2(5,7 - 11e^{-0,65(t-10)} + 5,3e^{-1,35(t-10)}) \delta_1(t-10) + \\ & + (5,7 - 11e^{-0,65(t-20)} + 5,3e^{-1,35(t-20)}) \delta_1(t-20). \end{aligned}$$

Графики $i_1(t)$ и $i_2(t)$ показаны на рис. 4.6, б.

Если изображение входного сигнала имеет два мнимых сопряженных полюса $s_{1,2} = \pm j\omega_0$, например

$$I_1(s) = \frac{I_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} (1 + \exp(-t_{\text{н}}s)),$$

то изображение выходного сигнала

$$I_2(s) = I_1(s) H_I(s) = \frac{M(s)}{(s - j\omega_0)(s + j\omega_0)(s + \alpha_3)(s + \alpha_4)} (1 + \exp(-t_{\text{н}}s)).$$

В этом случае оригинал следует искать в виде

$$\begin{aligned} i_2(t) = & [2A_1 \cos[\omega_0 t + \beta] + A_3 \exp(-\alpha_3 t) + A_4 \exp(-\alpha_4 t)] \delta_1(t) + \\ & + [2A_1 \cos[\omega_0(t - t_{\text{н}}) + \beta] + A_3 \exp(-\alpha_3(t - t_{\text{н}})) + \end{aligned}$$

$$+ A_4 \exp(-\alpha_4(t - t_{\text{н}}))] \delta_1(t - t_{\text{н}}),$$

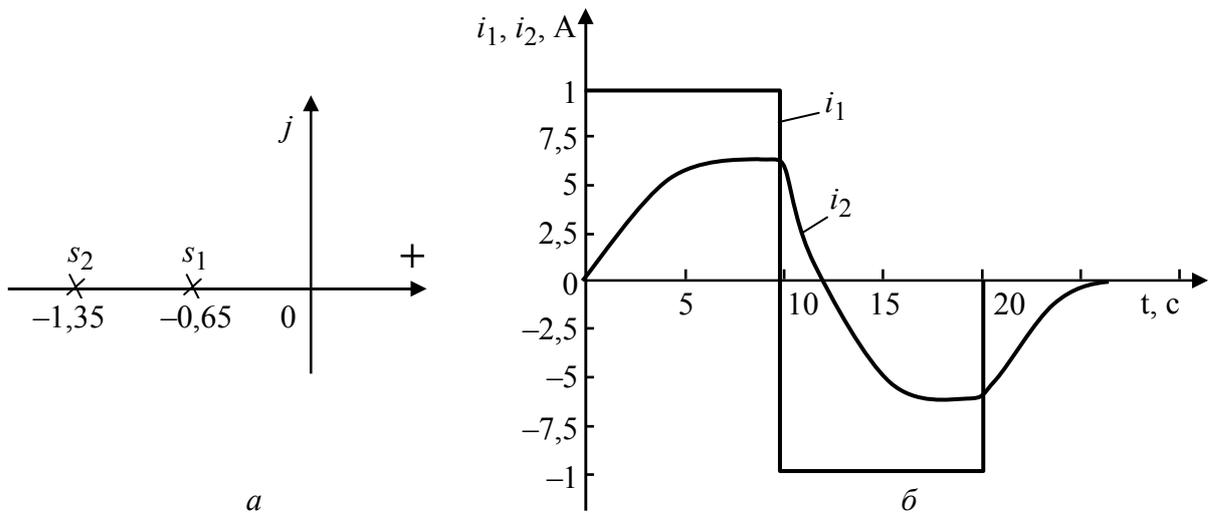


Рис. 4.6

где $\dot{A}_1 = A_1 \exp(\beta) = (s - j\omega_0) I_2(s) / (1 + \exp(-t_{\text{н}}s)) \Big|_{s=j\omega_0}$

3. Анализ цепи частотным методом при действии одиночного импульса на входе

По условиям п. 2 задания требуется выполнить п. 3.

Определение амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик цепи

Обобщенная частотная характеристика цепи $H_I(j\omega)$, т. е. амплитудно-фазовая характеристика, определяет связь реакции и воздействия в установившемся синусоидальном режиме для любой частоты:

$$H_I(j\omega) = H_I(s) \Big|_{s=j\omega} = |H_I(j\omega)| e^{j\Phi(\omega)},$$

причем АЧХ определяет отношение амплитуд, ФЧХ – изменение начальных фаз гармонических сигналов, проходящих через цепь.

В рассматриваемом примере с учетом (4.10):

$$H_I(j\omega) = 0,5 / (-\omega^2 + 2j\omega + 0,875)$$

амплитудно-частотная характеристика

$$|H_I(j\omega)| = 0,5 / \sqrt{(0,875 - \omega^2)^2 + (2\omega)^2}, \quad (4.12)$$

фазочастотная характеристика

$$\Phi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\omega}{0,875 - \omega^2}.$$

Из выражения (4.12) имеем $|H_I(j0)| = 0,57$ и $|H_I(j\infty)| = 0$.

Проверим полученные значения по схемам замещения цепи (рис. 4.2, а), соответствующим $\omega = 0$ (рис. 4.5, а) и $\omega \rightarrow \infty$ (рис. 4.5, б).

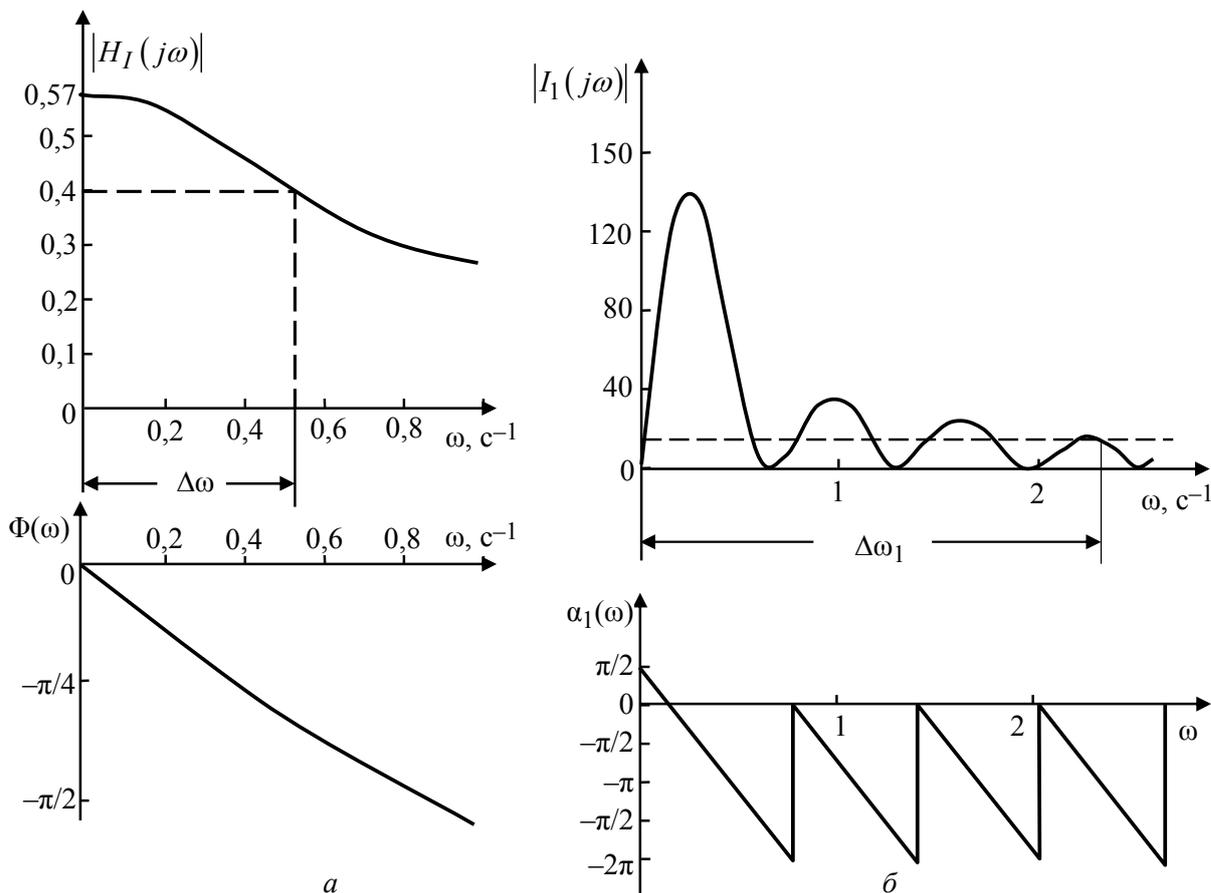


Рис. 4.7

Из схемы рис. 4.5, а имеем $|H_I(j0)| = I_2 / I_1 = R_3 / (R_3 + R_5 + R_H) = 0,57$; из схемы рис. 4.5, б получим $|H_I(j\infty)| = I_2 / I_1 = 0$.

Графики АЧХ и ФЧХ показаны на рис. 4.7, а.

Определение полосы пропускания цепи

Полосу пропускания цепи определяем как диапазон частот, в котором $|H_I(j\omega)| \geq 0,707 |H_I(j\omega)|_{\max}$. Полоса пропускания, найденная по графику $|H_I(j\omega)|$ на рис. 4.7, а, составляет $\Delta\omega \simeq 0,55 \text{ c}^{-1}$.

**Определение амплитудного и фазового спектров входного
одинокного импульса тока. Расчет ширины амплитудного спектра**

Для одиночного импульса тока $i_1(t)$ спектральная плотность $I_1(j\omega) = I_1(s)|_{s=j\omega} = |I_1(j\omega)| \exp(j\alpha_1(\omega))$, где $|I_1(j\omega)|$ – амплитудный, а $\alpha_1(\omega)$ – фазовый спектры входного импульса тока.

Запишем полученное изображение $I_1(s)$ в виде

$$I_1(s) = \frac{I_m}{s} (1 - \exp(-0,5t_{и}s))^2.$$

Положив $s = j\omega$, получим:

$$I_1(j\omega) = (1 - \exp(-0,5t_{и}j\omega))^2 = \frac{4I_m}{\omega} \sin^2(0,25t_{и}\omega) e^{j\left(\frac{\pi}{2} - 0,5t_{и}\omega\right)}. \quad (4.13)$$

При $t_{и} = 20$ с из (4.13) выражение амплитудного спектра

$$|I_1(j\omega)| = \frac{40}{\omega} \sin^2(5\omega), \quad (4.14)$$

а фазового спектра

$$\alpha_1(\omega) = \frac{\pi}{2} - 10\omega. \quad (4.15)$$

При $\omega = 0$ амплитудный спектр $|I_1(j0)| = 0/0$. Раскрывая неопределенность по Лопиталю, получим $|I_1(j0)| = 0$. Таким образом, нули $|I_1(j\omega)|$ будут при частотах $\omega = 0; \pi/5; 2\pi/5; 4\pi/5 \dots$

Графики амплитудного и фазового спектров, рассчитанные по выражениям (4.14) и (4.15), показаны на рис. 4.7, б. Спектр является сплошным, при этом $|I_1(j\omega)|$ характеризует относительное распределение амплитуд гармоник по частоте (спектральная плотность), а $\alpha_1(\omega)$ – распределение начальных фаз гармоник. Огибающая амплитудного спектра убывает пропорционально частоте. Начальное значение спектра $|I_1(j0)| = 0$, как известно [1 – 3], равно площади сигнала, которая согласно рис. 4.4, а является нулевой.

Ширина спектра, определенная по графику рис. 4.7, б на уровне $0,1|I_1(j\omega)|_{\max}$, составляет $\Delta\omega_1 \simeq 2,25c^{-1}$.

Заключение об ожидаемых искажениях сигнала на выходе цепи

Сопоставляя спектры входного сигнала (рис. 4.7, б) с частотными характеристиками функции передачи цепи (рис. 4.7, а), можно сделать вывод о том, что первый лепесток спектра практически укладывается в полосу пропускания, остальная же часть спектра располагается в зоне интегрирования, поэтому искажение формы сигнала при прохождении через цепь будет не очень значительным, выходной сигнал будет непрерывным, увеличится длительность его фронтов, а его амплитуда будет составлять 0,57 от амплитуды входного сигнала.

Этот вывод подтверждается точным расчетом (см. рис. 4.6, б).

4. Анализ цепи частотным методом при периодическом воздействии

Аналізу подлежит цепь, схема которой приведена на рис. 4.2, а. На вход цепи подан сигнал в виде периодической последовательности

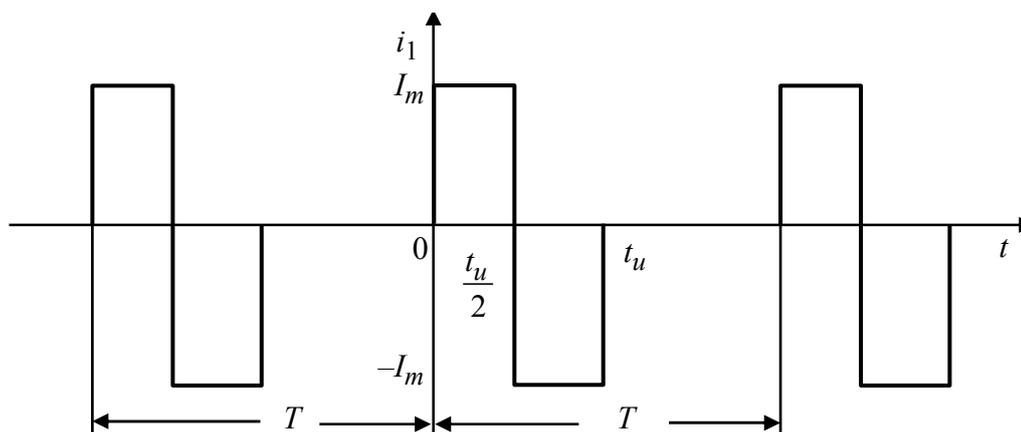


Рис. 4.8

импульсов тока (рис. 4.8) при $I_m = 10$ А, $t_{и} = 20$ с, $T = 2t_{и} = 40$ с.

Разложение в ряд Фурье входного сигнала.

Построение его амплитудного и фазового дискретных спектров

Периодический несинусоидальный входной сигнал представляют в виде ряда Фурье [1]:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \alpha_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k \exp(jk\omega_1 t).$$

Комплексные амплитуды (комплексный частотный спектр) определяются соотношением [1,2] $\dot{A}_k = \frac{2}{T} F_1(s) \Big|_{s=jk\omega_1}$, где $\omega_1 = 2\pi / T$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Аналогично для нахождения \dot{A}_k может быть использована спектральная плотность одиночного импульса:

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} F_1(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1} . \quad (4.16)$$

Определим комплексные амплитуды входного сигнала, подставив в (4.16) выражение спектральной плотности (4.13) и заменив

$$\omega = k\omega_1 = k \frac{2\pi}{T} = k\pi / 20 :$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{k1} &= \frac{2}{T} \frac{4I_m}{k\omega_1} \sin^2(0,25k\omega_1 t_{\text{и}}) \exp[j(\pi/2 - 0,5k\omega_1 t_{\text{и}})] = \\ &= \frac{40}{k\pi} \sin^2(k\pi/4) \exp[j(\pi/2 - k\pi/2)] = I_{k1} \exp(j\alpha_{k1}), \end{aligned}$$

где $I_{k1} = \frac{40}{k\pi} \sin^2\left(\frac{k\pi}{4}\right)$ – амплитудный, $\alpha_{k1} = \pi/2 - k\pi/2$ – фазовый дискретные спектры.

При $k = 0$ для I_{01} имеем неопределенность $\frac{0}{0}$, раскрывая которую, получим $I_{01} = 0$. При $k = 1$ имеем $I_{11} = \frac{40}{\pi} \sin^2(\pi/4) = 6,4$; $\alpha_{11} = 0$ и т. д.

Значения амплитуд I_{k1} и начальных фаз α_{k1} гармоник ряда Фурье приведены в табл. 4.3, а на рис. 4.9, а построены дискретный амплитудный и фазовый спектры сигнала.

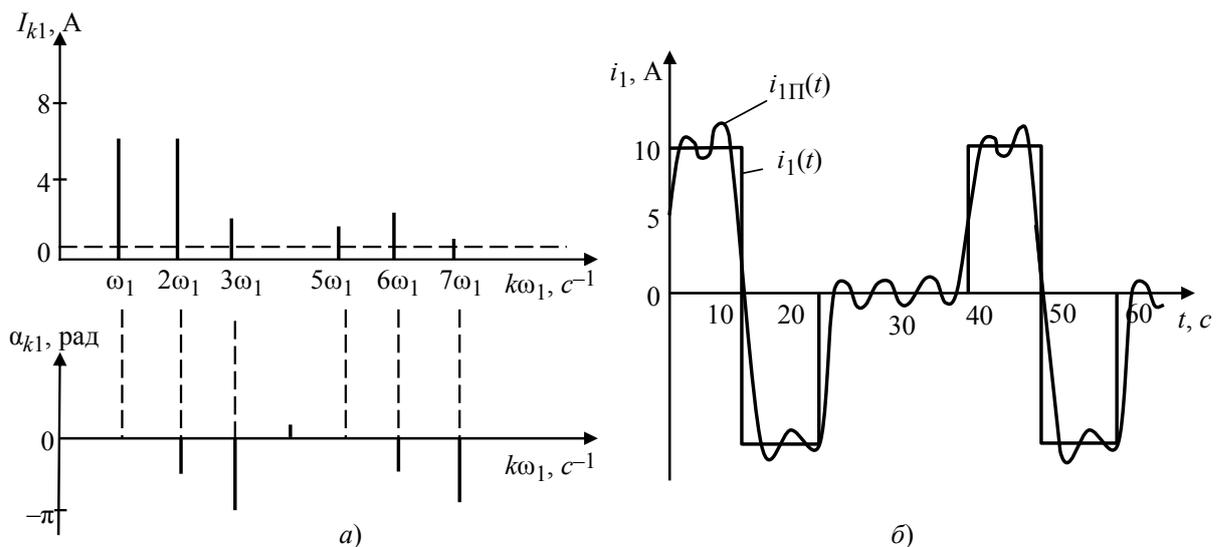


Рис. 4.9

Таблица 4.3

k	I_{k1}	α_{k1}		k	I_{k1}	α_{k1}
0	0	–		4	0	–
1	6,4	0		5	1,3	0
2	6,4	$-\pi/2$		6	2,1	$-\pi/2$
3	2,1	$-\pi$		7	0,9	$-\pi$

Число гармоник отрезка ряда Фурье определяется шириной спектра по уровню $0,1I_{k \max}$ аналогично п. 3, но при ручном счете по указанию преподавателя можно ограничиться и меньшим числом гармоник. В нашем расчете ограничимся шестью ненулевыми гармониками, поэтому представление сигнала $i_1(t)$ будет приближенным $i_{1\Pi}(t)$:

$$i_{1\Pi} = \frac{I_{01}}{2} + \sum_{k=1}^7 I_{k1} \cos(k\omega_1 t_{\text{и}} + \alpha_{k1}) = 6,4 \cos(0,05\pi t) + 6,4 \cos\left(0,1\pi t - \frac{\pi}{2}\right) - 2,1 \cos(0,15\pi t) + 1,3 \cos(0,25\pi t) + 2,1 \cos\left(0,3\pi t - \frac{\pi}{2}\right) - 0,9 \cos(0,35\pi t).$$

Построение графика воздействия, заданного отрезком ряда Фурье

На рис. 4.9, б представлены графики входного периодического сигнала $i_1(t)$ и его аппроксимации $i_{1\Pi}(t)$ полученным отрезком ряда Фурье. При вычислении частичных сумм ряда Фурье удобно использовать персональный компьютер или программируемый микрокалькулятор.

Определение реакции цепи $i_2(t)$ в виде отрезка ряда Фурье

Амплитуды и начальные фазы гармоник выходного тока можно найти из следующих соотношений:

$$I_{k2} = |H_1(jk\omega_1)| I_{k1}; \quad \alpha_{k2} = \Phi(k\omega_1) + \alpha_{k1},$$

для чего необходимо вычислить значения АЧХ и ФЧХ функции передачи для требуемых частот $k\omega_1$; $k = 0, 1, 2, \dots, 7$. Результаты всех вычислений сведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

k	$k\omega_1$	$ H_I(jk\omega_1) $	$\Phi(k\omega_1)$, рад	I_{k2} , В	α_{k2} , рад
0	0	0,57	0	0	–
1	$0,05\pi$	0,55	$-0,35$	3,5	$-0,35$
2	$0,1\pi$	0,5	$-0,68$	3,2	$-2,25$

k	$k\omega_1$	$ H_I(jk\omega_1) $	$\Phi(k\omega_1), \text{ рад}$	$I_{k2}, \text{ В}$	$\alpha_{k2}, \text{ рад}$
3	$0,15\pi$	0,44	-0,96	0,9	-4,1
4	$0,2\pi$	0,37	-1,2	0	-
5	$0,25\pi$	0,31	-1,4	0,4	-1,4
6	$0,3\pi$	0,27	-1,6	0,56	-3,14
7	$0,35\pi$	0,23	-1,7	0,21	-4,86

В соответствии с принятым критерием ширины спектра

$$i_2(t) \simeq \frac{I_{02}}{2} + \sum_{k=1}^7 I_{k2} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{k2}) = 3,5 \cos(0,05\pi t - 0,35) +$$

$$+ 3,2 \cos(0,1\pi t - 2,3) + 0,93 \cos(0,15\pi t - 4,1) + 0,4 \cos(0,25\pi t - 1,4) +$$

$$+ 0,56 \cos(0,3\pi t - 3,1) + 0,21 \cos(0,35\pi t - 4,86). \quad (4.17)$$

Построение спектров и графика выходного сигнала

По данным табл. 4.4 на рис. 4.10, *а* построены амплитудный и фазовый дискретные спектры выходного сигнала, а на рис. 4.10, *б* – график выходного сигнала $i_2(t)$, построенный по выражению (4.17).

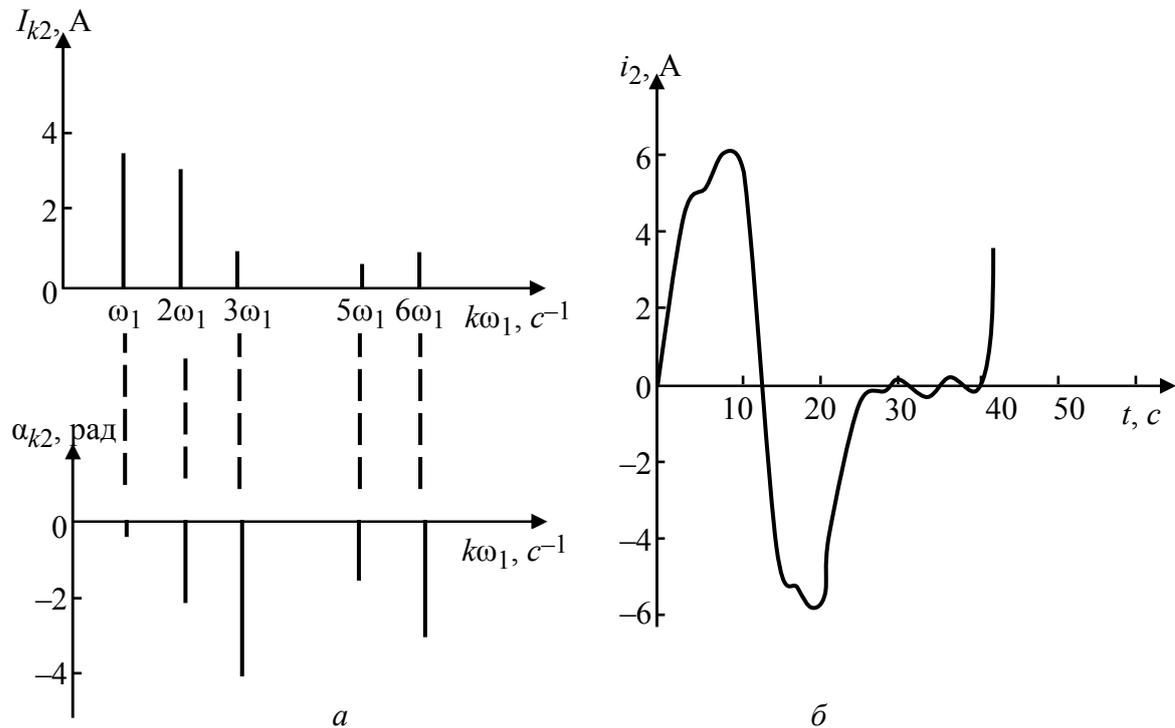


Рис. 4.10

Из сравнения рис. 4.9, *б* и рис. 4.10, *б* следует, что рассмотренный периодический несинусоидальный сигнал при его прохождении через заданную цепь искажается незначительно, так как наибольшие по амплитуде (первые три) гармоники его спектра попадают в полосу пропускания цепи.

4.3. Контрольные вопросы

1. Что такое единичная ступенчатая функция $\delta_1(t)$; $\delta_1(t - \tau)$?
2. Нарисуйте качественно график функций: $f_1(t) = 2e^{-t}\delta_1(t)$ и $f_2(t) = 2e^{-(t-\tau)}\delta_1(t - \tau)$.
3. Определите $f(0+)$ и $f(1+)$, если $f(t) = 4e^{-t} \cos 2\pi t \delta_1(t) - 4e^{-(t-1)} \cos 2\pi(t-1) \delta_1(t - \tau)$.
4. Что называется переходной характеристикой цепи $h_1(t)$?
5. Какой вид имеет вынужденная составляющая $h_1(t)$?
6. Какие Вы знаете способы определения $h_1(t)$?
7. Характеристическое уравнение цепи $p^2 + 6p + 8 = 0$. Какой вид имеет свободная составляющая $h_1(t)$? Чему равна длительность переходного процесса $t_{\text{ПП}}$?
8. Характеристическое уравнение цепи $p^2 + 10p + 25 = 0$. Какой вид имеет свободная составляющая $h_1(t)$? Оцените $t_{\text{ПП}}$?
9. Как определить значения $h_1(0+)$ и $h_1(\infty)$ в цепи непосредственно по схеме, без вычисления $h_1(t)$?
10. Цепь задана тройками чисел: $113 - u_1$; $223 - R_2 = 6$; $312 - R_3 = 3$; $423 - L = 1$. Как определить $h_1(t)$ для u_2 ?
11. Цепь задана тройками чисел: $113 - u_1$; $223 - R_2 = 3$; $312 - R_3 = 6$; $423 - C = 1/4$. Как определить $h_1(t)$ для u_2 ?
12. Цепь задана тройками чисел: $115 - u_1$; $213 - R_2 = 4$; $325 - R_3 = 4$; $445 - R_4 = 4$; $532 - L$; $634 - C$. Как найти $h_1(0+)$ и $h_1(\infty)$?
13. Цепь задана тройками чисел: $141 - i_1$; $224 - R_2 = 2$; $312 - R_3 = 2$; $413 - R_4 = 4$; $512 - L$; $634 - C$. Как определить $h_1(0+)$ и $h_1(\infty)$ для i_2 ?
14. Как найти изображение прямоугольного импульса, имеющего длительность $t_{\text{и}} = 2\text{с}$ и амплитуду $I_m = 10\text{А}$?
15. Как найти изображение одиночного импульса, имеющего форму равнобедренного треугольника, высота которого $U_m = 20\text{В}$, а длительность $t_{\text{и}} = 4\text{с}$?

16. Как найти изображение $f(t) = 2\delta_1(t) + 4\cos 2\pi(t-1)\delta_1(t-1)$?
17. Дано $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{s}e^{-s}$. Как найти $f(t)$ при $t = 0,5$ и $t = 15$?
18. Переходная характеристика цепи $h_1(t) = 1 - e^{-t}$. Как найти реакцию цепи на прямоугольный импульс, у которого $t_{и} = 1\text{с}$, $U_m = 6\text{В}$?
19. Что называется передаточной функцией цепи $H(s)$?
20. Какие вы знаете способы определения $H(s)$?
21. Как определить значения передаточной функции $H(s)$ при $s \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$ непосредственно по цепи?
22. Как определить $H(s)$ цепи, заданной в вопросе 10?
23. Как определить $H(0)$ и $H(\infty)$ цепи, заданной в вопросе 12?
24. Как определить $H(0)$ и $H(\infty)$ цепи, заданной в вопросе 13?
25. Что определяют нули и полюсы передаточной функции $H(s)$?
26. Полюсы передаточной функции $H(s)$ равны $s_{1,2} = -1 \pm j4$. Какой вид имеет свободная составляющая $h_1(t)$?
27. Как связаны между собой передаточная функция и переходная характеристика цепи?
28. Передаточная функция цепи $H(s) = \frac{4(s^2 + 9s + 15)}{s^2 + 8s + 15}$. Как найти переходную характеристику $h_1(t)$?
29. Передаточная функция цепи $H(s) = \frac{4s^2 + 14s}{(s + 2)^2}$. Как найти переходную характеристику цепи?
30. Передаточная функция цепи $H(s) = \frac{2s(s + 2)}{s^2 + 4s + 40}$. Как найти переходную характеристику цепи?
31. Что такое фазочастотная и амплитудно-частотная (ФЧХ, АЧХ) характеристики цепи?
32. Как определить АЧХ и ФЧХ цепи, передаточная функция которой $H(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 3}$?
33. Что такое полоса пропускания цепи?

34. Что такое амплитудный и фазовый спектры сигнала?
35. Что такое ширина спектра сигнала?
36. Что можно выяснить из сравнения ширины спектра сигнала и полосы пропускания цепи?
37. Как по изображению Лапласа найти спектральные функции одиночного импульса?
38. Как определить амплитудный и фазовый спектры одиночного сигнала, если изображение по Лапласу его $F(s) = 4(1 - e^{-2s}) / s$?
39. Что называется периодической функцией?
40. Что называется фазовым и амплитудным спектром периодического сигнала?
41. Как, используя изображение Лапласа, определить амплитуды и фазы гармоник периодического сигнала?
42. Изображение по Лапласу функции за один период $F(s) = 4(1 - e^{-s})^2 / s^2$. Как найти амплитуды и фазы первых трех гармоник заданной функции, если период функции $T = 2$?
43. Чем отличаются спектры периодической функции от спектров одиночного сигнала?
44. Что определяет постоянная составляющая ряда Фурье?
45. Как найти среднее значение функции, представляющей периодическую последовательность импульсов треугольной формы, имеющих амплитуду $I_m = 20$ А, длительность $t_{и} = 4$ с, если период $T = 8$ с?
46. На вход цепи, заданной в Вашем курсовом расчете, подается сигнал $f_1(t) = 4 + 4 \cos(t - 30^\circ) + 2 \cos(2t - 45^\circ)$. Как, пользуясь графиком АЧХ и ФЧХ, определить реакцию на выходе?
47. На вход цепи, анализируемой в курсовой работе, подается сигнал $f_1(t) = 8 \cos(\omega_1 t + 30^\circ) + 4 \cos(3\omega_1 t + 60^\circ)$. Как определить ω_1 , при которой сигнал проходит с небольшими искажениями?
48. Как определить спектр и действующее значение функции $f_1(t) = 4 + 8 \sin 4t + 4\sqrt{2} \cos(8t - 45^\circ)$?
49. Существенная часть спектра входного одиночного импульса лежит в пределах $\Delta\omega = 0 \div 4$. Имеются три электрических цепи, полосы пропус-

кания которых находятся в пределах $\Delta\omega_a = 0 \div 2$; $\Delta\omega_b = 0 \div 6$; $\Delta\omega_B = 2 \div 6$.

Через какую цепь сигнал пройдет с наименьшими искажениями?

50. Является ли функция $f(t) = 2 \sin 4,2t + 4 \cos 5,6t$ периодической?

Тема 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНУЮ АКТИВНУЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ЦЕПЬ

Целью курсовой работы является практическое освоение методов анализа искажений сигналов, проходящих через линейные активные электрические цепи, а также рассмотрение вопросов проектирования активных цепей по заданной функции передачи.

5.1. Содержание курсовой работы

В курсовой работе требуется выполнить следующее: 1) найти реакцию активной цепи при воздействии одиночного импульса; 2) вычислить установившуюся реакцию цепи при воздействии периодической последовательности импульсов; 3) рассчитать параметры элементов активного и пассивного звеньев цепи, по заданной функции передачи.

Задание на курсовую работу приведено в п. 5.3. Там же заданы тип схемы, коэффициенты нормированной функции передачи проектируемой активной цепи, вид входного одиночного сигнала длительностью $t_{и}$. Для периодических сигналов той же формы, что и одиночный сигнал, следует принять период повторения $T = 2t_{и}$.

Порядок выполнения курсовой работы и требования к графическому материалу следующие:

1. Произвести нормирование параметров и переменных цепи.

2. Рассчитать нули и полюсы заданных функций передач первого и второго звеньев активной цепи:

$$H_{U_1}(s) = \frac{a_0s^2 + a_1s + a_2}{s^2 + b_1s + b_2}; \quad H_{U_2}(s) = \frac{a_3s + a_4}{s + b_4}.$$

Изобразить координаты вычисленных нулей и полюсов на комплексной плоскости.

3. Найти изображение входного одиночного импульса воздействия и вычислить реакцию активной цепи операторным методом; построить график реакции и денормировать его по времени; приближенно оценить время затухания переходных процессов в цепи.

4. Вычислить переходную и импульсную характеристики активной цепи операторным методом; построить графики переходной и импульсной характеристик и денормировать их по времени.

5. Определить амплитудный и фазовый спектры входного одиночного импульса и построить их графики.

6. Рассчитать амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики активной цепи; построить графики АЧХ и ФЧХ цепи, а также график амплитудно-фазовой характеристики; определить полосу пропускания цепи и оценить время запаздывания сигналов, спектр которых попадает в полосу пропускания.

7. Найти амплитудный и фазовый спектры выходного одиночного импульса и построить их графики.

8. Определить амплитудный и фазовый спектры периодического входного сигнала; ограничиться четырнадцатью гармониками разложения сигнала в ряд Фурье; построить графики исходного входного периодического сигнала и сигнала после аппроксимации его рядом Фурье (изобразить отдельно три первых составляющих ряда).

9. Произвести приближенный расчет реакции цепи по спектру при периодическом воздействии; построить график реакции; дать оценку искажения передачи сигналов при прохождении через исследуемую активную цепь путем сравнения ширины спектра воздействия и полосы пропускания цепи.

10. Вычислить параметры активной электрической цепи третьего порядка по заданной нормированной функции передачи:

а) найти функцию передачи активного звена второго порядка в символьном виде; вычислить нормированные и ненормированные параметры элементов этого звена по заданной нормированной функции передачи;

б) найти функцию передачи пассивного звена первого порядка в символьном виде; вычислить нормированные и ненормированные параметры элементов этого звена по заданной нормированной функции передачи.

11. Сделать выводы по курсовой работе.

5.2. Рекомендации и указания к выполнению курсовой работы

В задании к курсовой работе коэффициенты обоих звеньев активной цепи представлены для нормированных функций передач. Там же указана ненормированная длительность $t_{\text{И}}$ сигнала, воздействующего на цепь.

5.2.1. Нормирование и денормирование параметров и элементов цепи

Для нормирования времени рекомендуется выбрать базисный параметр времени $t_{\text{б}}$, равный $t_{\text{И}}$. Нормирование длительности входного сигнала производится по формуле $t_{\text{И}}^* = t_{\text{И}} / t_{\text{б}}$. Для денормирования значений со-

противлений и емкостей звеньев следует выбрать базисный параметр сопротивления $R_6 = 100$ кОм. При этом базисный параметр емкости $C_6 = t_6 / R_6 = 10^{-8}$ Ф. Денормирование параметров всех сопротивлений и емкостей активной цепи, а также временного масштаба графиков следует производить с учетом формул: $R^* = R / R_6$; $C^* = C / C_6$; $t^* = t / t_6$.

5.2.2. Расчет частотных характеристик цепи.

Частотная характеристика цепи $H_U(j\omega)$ определяет связь комплексных спектров реакции $U_2(j\omega)$ и воздействия $U_1(j\omega)$:

$$H_U(j\omega) = U_2(j\omega) / U_1(j\omega) = |H_U(j\omega)| e^{j\varphi(j\omega)},$$

где $|H_U(j\omega)|$ – амплитудно-частотная характеристика; $\varphi(\omega)$ – фазочастотная характеристика.

В курсовой работе характеристику $H_U(j\omega)$ находят подстановкой $s = j\omega$ в выражение нормированной функции передачи $H_U(s)$. Расчеты для $|H_U(j\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ сводят в таблицы и иллюстрируют графиками АЧХ и ФЧХ. По графику АЧХ определяют полосу пропускания как диапазон частот, в пределах которого значения амплитудно-частотной характеристики составляют не менее чем 0,707 от ее максимума.

5.2.3. Приближенный расчет реакции по спектру при периодическом воздействии.

Реакция линейной цепи $u_2(t)$ в установившемся режиме при действии на входе периодического несинусоидального сигнала

$$u_1(t) = U_{10} + \sum_{k=1}^n U_{1mk} \cos(k\omega_1 t + \alpha_k)$$

будет иметь вид

$$u_2(t) = U_{20} + \sum_{k=1}^n U_{2mk} \cos(k\omega_1 t + \beta_k),$$

где n – число учитываемых членов ряда Фурье.

Амплитуду U_{2mk} и начальную фазу β_k каждой гармоники реакции цепи вычисляют по амплитудному U_{1mk} и фазовому α_k спектрам воздействия, а также частотным характеристикам цепи.

Исследование искажений формы выходного сигнала производят сравнением спектра воздействия с частотными характеристиками проектируемой активной цепи. Эти цепи обладают определенными избирательными свойствами в отношении пропускания сигналов, вследствие чего их частотные характеристики отличаются от идеальных, обеспечивающих неискаженную передачу сигналов. Если амплитудно-частотная характеристика зависит от частоты, а фазочастотная характеристика нелинейна, то выходной сигнал такой цепи будет претерпевать искажения.

Для оценки степени амплитудных искажений сигнала сравнивают его ширину спектра с полосой пропускания цепи. Ширину спектра входного одиночного сигнала обычно определяют по диапазону частот, в котором сосредоточено приблизительно девяносто процентов его энергии. Для всех одиночных сигналов, рассматриваемых в курсовой работе, ширину спектра можно определить по диапазону частот, занимаемому первым лепестком амплитудного спектра. Если полоса пропускания цепи превышает ширину спектра входного сигнала, то он будет претерпевать небольшие амплитудные искажения формы при прохождении через цепь. Когда же полоса пропускания меньше ширины спектра входного сигнала, спектр выходного сигнала будет уже спектра входного сигнала вследствие поглощения энергии гармонических составляющих, находящихся вне полосы пропускания. При этом форма сигнала после прохождения через цепь будет в значительной степени изменена.

Фазовые искажения передаваемого сигнала вызываются нелинейностью фазочастотной характеристики. Величину фазовых искажений передаваемого сигнала обычно оценивают по максимальному отклонению фазочастотной характеристики от линейной в полосе пропускания цепи. Общее влияние фазовых искажений передаваемого сигнала также проявляется в изменении его формы.

Хотя нарастание переднего и спад заднего фронтов выходных сигналов происходят в течение некоторого конечного времени, на практике время запаздывания сигнала t_3 , например, для передаваемого через цепь прямоугольного импульса можно приблизительно считать равным времени, в течение которого величина сигнала на выходе достигает половины максимального значения.

5.2.4. Вычисление параметров элементов линейной электрической цепи по заданной функции передачи

В курсовой работе необходимо рассчитать параметры элементов линейной активной электрической цепи третьего порядка по заданной нормированной функции передачи по напряжению. Эта функция передачи задается произведением двух функций передач второго и первого порядков $H_U(s) = H_1(s)H_2(s)$. Такое представление функции передачи предполагает, что она реализуется каскадным соединением активного RC -звена второго порядка и пассивного RC -звена первого порядка с развязывающим усилителем между ними. Схемы этих звеньев представлены в п. 5.3. На выходе каждого активного RC -звена включен зависимый источник напряжения, который играет роль развязывающего усилителя между активным и пассивным звеньями. Параметры элементов этих звеньев рассчитывают по соответствующим функциям передачи $H_1(s)$ и $H_2(s)$.

5.2.4.1. Расчет параметров элементов активного звена второго порядка

Вычисление параметров элементов активного звена производят по заданным коэффициентам a_k, b_k функции передачи:

$$H_{U_1}(s) = \frac{a_0s^2 + a_1s + a_2}{s^2 + b_1s + b_2}. \quad (5.1)$$

Для проектируемых схем активных звеньев только один из коэффициентов числителя реализуемой функции передачи (5.1) не равен нулю, что соответствует трем типам функции передачи:

- 1) низкочастотной (НЧ), для которой $a_0 = a_1 = 0$ и два ее нуля передачи находятся в бесконечности комплексной плоскости;
- 2) полосовой (ПФ), для которой $a_0 = a_2 = 0$ и один ее нуль передачи находится в начале координат;
- 3) высокочастотной (ВЧ), для которой $a_1 = a_2 = 0$ и два ее нуля передачи находятся в начале координат.

Поскольку нули передачи реализуемой функции передачи (5.1) определены заданием, то вычисления параметров элементов каждого активного RC -звена сводятся к решению двух уравнений (обычно называемых компонентными), которые выражают коэффициенты b_1 и b_2 через параметры пассивных и активных элементов. Для составления указанных компонентных урав-

нений целесообразно вначале составить узловые уравнения для проектируемой схемы активного RC -звена, содержащего зависимый источник напряжения [1]. Затем следует найти в общем виде функцию передачи этого звена по напряжению, представленную через параметры (символы) пассивных и активных элементов, приравнять ее заданной (5.1) и записать два компонентных уравнения. Решение уравнений сводится к вычислению параметров элементов активного звена по заданным значениям b_1 и b_2 .

Следует отметить, что общее число определяемых параметров элементов активного звена всегда больше, чем число составленных компонентных уравнений (т. е. больше двух). Поэтому значениями параметров некоторых элементов необходимо задаться, например, выбрать параметры нормированных емкостных элементов одинаковыми: $C_1^* = C_2^* = 1$, а также в ряде случаев задаться определенным соотношением между параметрами резистивных элементов. Если же при этом удастся сделать равнономинальными параметры резистивных или емкостных элементов, то такое активное звено будет более технологичным для его исполнения.

Пример 5.1. Найти параметры элементов активного звена (рис.5.1), низкочастотная функция передачи которого имеет вид

$$H_U(s) = K_1 / (s^2 + 0,5s + 4). \quad (5.2)$$

Для заданной функции передачи записываем $b_1 = 0,5$ и $b_2 = 4$. Функция передачи по напряжению звена рис. 5.1, выраженная через параметры (символы) его элементов [1], имеет вид

$$H_U(s) = \frac{K_1 G_1 G_2 / C_1 C_2}{s^2 + [(G_1 + G_2) / C_1 - (K_1 - 1) G_2 / C_2] s + G_1 G_2 / C_1 C_2}. \quad (5.3)$$

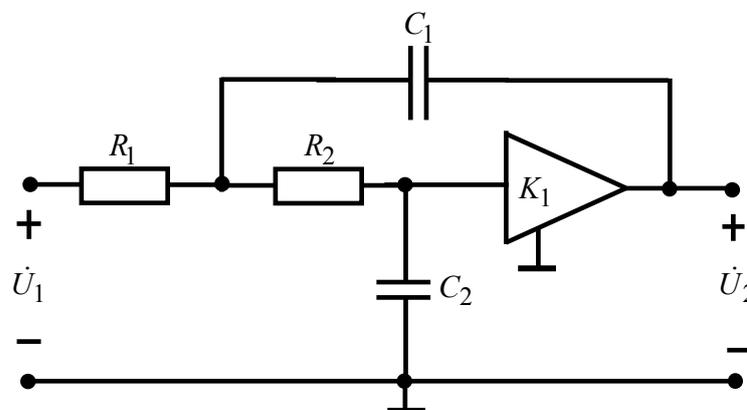


Рис. 5.1

Для этой функции передачи, приняв $R_1 = R_2 = R$ и $C_1 = C_2 = C$, найдем два уравнения путем сравнения полиномов знаменателей функций передачи (5.1), (5.2) и полученной функции (5.3): $b_1 = (3 - K_1)/(RC)$ и $b_2 = 1/(RC)^2$. Приняв $C = 1$, найдем сопротивления резисторов $R = 0,5$ и коэффициент усиления зависимого источника напряжения $K_1 = 2,75$.

5.2.4.2. Расчет параметров элементов пассивного RC-звена

Пассивные RC-звенья проектируемых активных цепей представляют собой четырехполюсники простой структуры (рис. 5.2, а), схемы которых приведены в п. 5.3. Расчет параметров элементов пассивного RC-звена производят по заданным коэффициентам a_3 , a_4 и b_4 функции передачи первого порядка:

$$H_{U_2}(s) = K_2 \frac{a_3 s + a_4}{s + b_4}. \quad (5.4)$$

где K_2 – масштабный множитель, который может быть любым вещественным числом, например $K_2 = 1$, так как вычисление параметров элементов звена производят без учета этого множителя. При проектировании пассивного RC-звена необходимо реализовать только заданные нуль и полюс функции передачи (5.4).

Функция передачи проектируемого RC-звена, выраженная через параметры двухполюсников Z_1 и Z_2 , имеет вид

$$H_{U_2} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{Z_2(s)/Z_1(s)}{1 + Z_2(s)/Z_1(s)}. \quad (5.5)$$

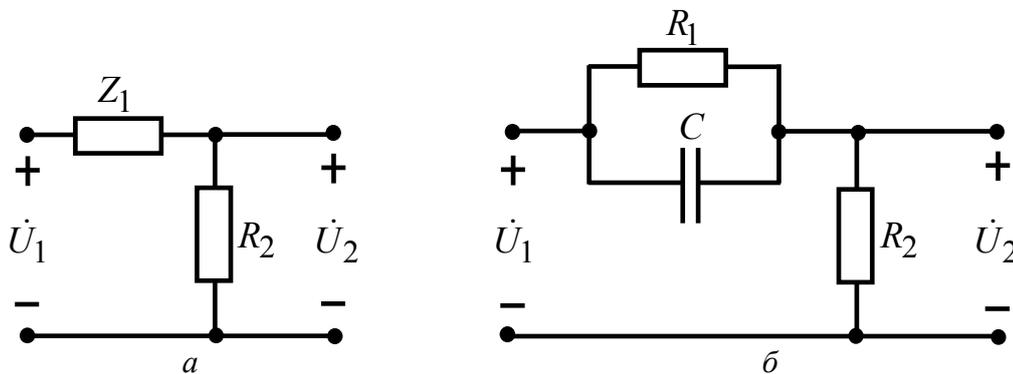


Рис. 5.2

Вычисление параметров элементов пассивного RC-звена производят по аналогии с расчетом активного звена решением двух компонентных уравнений, составленных для заданных нуля s_1^* и полюса s_1 функций пере-

дач (5.4) и (5.5). При совместном решении компонентных уравнений можно задаться нормированным параметром одного из элементов пассивного RC -звена, например, емкости $C = 1$.

Пример 5.2. Найти параметры элементов пассивного RC -звена, показанного на рис. 5.2, б. Функция передачи этого звена определяется выражением: $H_U(s) = (s + 2)/(s + 3)$.

Найдем функцию передачи по напряжению этого звена, выразив ее через параметры элементов схемы

$$H_U(s) = \frac{s + 1/(R_1 C)}{s + (1 + R_1/R_2)/(R_1 C)}.$$

Сравнивая свободные члены числителя и знаменателя полученной и заданной функций передачи, составим два компонентных уравнения: $R_1 C = 0,5$; $(1 + R_1/R_2) = 1,5$. Задавшись величиной нормированной емкости $C = 1$, из первого уравнения получим $R_1 = 0,5$, что позволяет из второго уравнения найти $R_2 = 1$.

5.2.5. Оформление курсовой работы

Расчеты в пп. 3–9 курсовой работы выполняют для нормированных параметров элементов цепи и сигналов. При оформлении графиков указывают масштабы нормированных и ненормированных величин.

В выводах по курсовой работе следует сравнить ширину спектра входного одиночного импульса с полосой пропускания цепи, указать какими частотными свойствами обладает цепь, пояснить искажение формы выходного сигнала. Необходимо объяснить, в чем заключается отличие формы выходного сигнала от формы входного.

Примечание. При выполнении курсовой работы можно использовать типовые примеры и контрольные вопросы к теме 4.

5.3. Задание к курсовой работе

В каждом варианте курсовой работы исследуется электрическая цепь, состоящая из каскадного соединения электрически развязанных двух звеньев (см. варианты схем, табл. 5.1, 5.2, рис. 5.3). Первое активное RC -звено второго порядка содержит один или два источника напряжения, управляемых напряжением. Второе RC -звено первого порядка является пассивным. Структура всей цепи описывается тройками чисел. При построении схемы по заданным тройкам чисел используют следующие пра-

вила. Первое число троек чисел является порядковым номером элемента, два последующих – номерами узлов (в том числе устранимых), к которым подключен данный элемент; для источника напряжения отсчет узлов производится от «+» к «-». После тройки чисел приводится условное буквенное обозначение элемента.

Варианты схем:

Схема 1. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 323– R_3 ; 436– C_4 ; 546–ИНУН $U_5 = KU_{36}$; 624– C_6 ; Звено 2: 745– R_7 ; 845– C_8 ; 956– R_9 .

Схема 2. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 337–ИНУН $U_3 = U_{27}$; 434– R_4 ; 547– C_5 ; 657–ИНУН $U_6 = KU_{47}$; 725– C_7 . Звено 2: 856– R_8 ; 956– C_9 ; 1067– R_{10} .

Схема 3. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 326– R_3 ; 423– R_4 ; 536– C_5 ; 646–ИНУН $U_6 = KU_{36}$; 724– C_7 ; Звено 2: 845– R_8 ; 945– C_9 ; 1056– R_{10} .

Схема 4. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 323– C_3 ; 436– R_4 ; 546–ИНУН $U_5 = KU_{36}$; 624– R_6 ; Звено 2: 745– C_7 ; 856– R_8 .

Схема 5. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 337–ИНУН $U_3 = U_{27}$; 434– C_4 ; 547– R_5 ; 657–ИНУН $U_6 = KU_{47}$; 725– R_7 . Звено 2: 856– R_8 ; 956– C_9 ; 1067– R_{10} .

Схема 6. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 326– R_3 ; 423– C_4 ; 536– R_5 ; 646–ИНУН $U_6 = KU_{36}$; 724– R_7 ; Звено 2: 845– C_8 ; 956– R_9 .

Схема 7. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 327– R_3 ; 437–ИНУН $U_4 = U_{27}$; 534– R_5 ; 647– C_6 ; 757–ИНУН $U_7 = KU_{47}$; 825– C_8 ; Звено 2: 956– R_9 ; 1067– C_{10} .

Схема 8. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 326– C_3 ; 423– R_4 ; 536– C_5 ; 646–ИНУН $U_6 = -KU_{36}$; 724– R_7 ; Звено 2: 845– R_8 ; 956– C_9 .

Схема 9. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 327– C_3 ; 423– C_4 ; 537– R_5 ; 647–ИНУН $U_6 = KU_{37}$; 724– R_7 ; Звено 2: 845– R_8 ; 956– C_9 ; 1067– R_{10} .

Схема 10. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 327– R_3 ; 437–ИНУН $U_4 = U_{27}$; 534– C_5 ; 647– R_6 ; 757–ИНУН $U_7 = KU_{47}$; 825– R_8 ; Звено 2: 956– C_9 ; 1067– R_{10} .

Схема 11. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 323– C_3 ; 436– R_4 ; 536– C_5 ; 646–ИНУН $U_6 = KU_{36}$; 724– R_7 ; Звено 2: 845– R_8 ; 956– C_9 .

Схема 12. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 323– C_3 ; 436– R_4 ; 546–ИНУН $U_5 = -KU_{36}$; 624– C_6 ; Звено 2: 745– R_7 ; 845– C_8 ; 956– R_9 .

Схема 13. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 327– R_3 ; 423– C_4 ; 537– R_5 ; 647–ИНУН $U_6 = -KU_{37}$; 724– C_7 ; Звено 2: 845– R_8 ; 956– C_9 ; 1067– R_{10} .

Схема 14. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 323– R_3 ; 437– C_4 ; 547–ИНУН $U_5 = -KU_{37}$; 624– R_6 ; Звено 2: 745– R_7 ; 856– C_8 ; 967– R_9 .

Схема 15. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 323– R_3 ; 436– R_4 ; 536– C_5 ; 646–ИНУН $U_6 = -KU_{36}$; 724– C_7 ; Звено 2: 845– R_8 ; 956– C_9 .

Схема 16. Звено 1: 118–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 328– R_3 ; 438–ИНУН $U_4 = U_{28}$; 534– C_5 ; 648– R_6 ; 758–ИНУН $U_7 = -KU_{48}$; 825– C_8 ; Звено 2: 956– R_9 ; 1067– C_{10} ; 1178– R_{11} .

Схема 17. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 327– C_3 ; 437–ИНУН $U_4 = U_{27}$; 534– R_5 ; 647– C_6 ; 757–ИНУН $U_7 = -KU_{47}$; 825– R_8 ; Звено 2: 956– R_9 ; 1067– C_{10} .

Схема 18. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 327– C_3 ; 437–ИНУН $U_4 = U_{27}$; 534– C_5 ; 647– R_6 ; 757–ИНУН $U_7 = KU_{47}$; 825– R_8 ; Звено 2: 956– C_9 ; 1067– R_{10} .

Схема 19. Звено 1: 118–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 338–ИНУН $U_3 = U_{28}$; 434– C_4 ; 548– R_5 ; 658–ИНУН $U_6 = -KU_{48}$; 725– C_7 ; Звено 2: 856– R_8 ; 967– C_9 ; 1078– R_{10} .

Схема 20. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 337–ИНУН $U_3 = U_{27}$; 434– R_4 ; 547– C_5 ; 657–ИНУН $U_6 = -KU_{47}$; 725– R_7 ; Звено 2: 856– R_8 ; 967– C_9 .

Схема 21. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 323– C_3 ; 436– R_4 ; 546–ИНУН $U_5 = -KU_{36}$; 624– C_6 ; Звено 2: 745– C_7 ; 856– R_8 .

Схема 22. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 337–ИНУН $U_3 = U_{27}$; 434– C_4 ; 547– R_5 ; 657–ИНУН $U_6 = -KU_{47}$; 725– C_7 ; Звено 2: 856– R_8 ; 956– C_9 ; 1067– R_{10} .

Схема 23. Звено 1: 118–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 338–ИНУН $U_3 = U_{28}$; 434– R_4 ; 548– R_5 ; 648– C_6 ; 758–ИНУН $U_7 = KU_{48}$; 825– C_8 ; Звено 2: 956– R_9 ; 1067– C_{10} ; 1178– R_{11} .

Схема 24. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 337–ИНУН $U_3 = U_{27}$; 434– R_4 ; 547– R_5 ; 647– C_6 ; 757–ИНУН $U_7 = KU_{47}$; 825– R_8 ; Звено 2: 956– R_9 ; 1067– C_{10} .

Схема 25. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 326– R_3 ; 423– R_4 ; 536– C_5 ; 646–ИНУН $U_6 = -KU_{36}$; 724– R_7 ; Звено 2: 845– C_8 ; 956– R_9 .

Схема 26. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 323– R_3 ; 436– C_4 ; 546–ИНУН $U_5 = KU_{36}$; 624– C_6 ; Звено 2: 745– C_7 ; 856– R_8 .

Схема 27. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 337–ИНУН $U_3 = U_{27}$; 434– R_4 ; 547– C_5 ; 657–ИНУН $U_6 = KU_{47}$; 725– C_7 . Звено 2: 856– C_8 ; 967– R_9 .

Схема 28. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– R_2 ; 326– R_3 ; 423– R_4 ; 536– C_5 ; 646–ИНУН $U_6 = KU_{36}$; 724– C_7 ; Звено 2: 845– C_8 ; 956– R_9 .

Схема 29. Звено 1: 116–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 323– C_3 ; 436– R_4 ; 546–ИНУН $U_5 = KU_{36}$; 624– R_6 ; Звено 2: 745– C_7 ; 845– R_8 ; 956– R_9 .

Схема 30. Звено 1: 117–ИН U_1 ; 212– C_2 ; 337–ИНУН $U_3 = U_{27}$; 434– C_4 ; 547– R_5 ; 657–ИНУН $U_6 = KU_{47}$; 725– R_7 . Звено 2: 856– C_8 ; 967– R_9 .

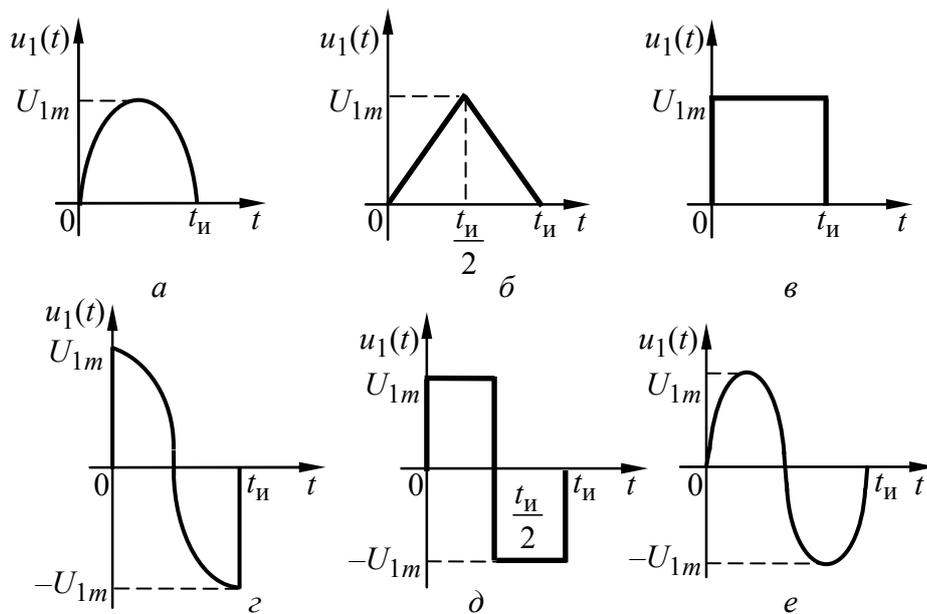


Рис. 5.3

Таблица 5.1

Номер варианта	Номер звена							
	1				2			
	a_0	a_1	a_2	b_1	b_2	a_3	a_4	b_4
1	0	0	7,33	2,15	3,85	1,0	2,0	2,8
2	0	0	7,9	2,4	7,16	1,0	1,15	1,5
3	0	0	0,66	0,82	0,33	1,0	0,75	1,0
4	1,75	0	0	1,8	2,07	1,0	0	1,5
5	1,13	0	0	0,85	0,95	1,0	0,8	1,1
6	2,64	0	0	0,72	0,56	1,0	0	2,0
7	0	0	6,0	1,7	3,5	0	2,5	2,5
8	0	0	5,52	2,2	4,4	0	2,8	2,8
9	0	2,53	0	0,95	1,25	0,67	0,8	0,8
10	1,82	0	0	0,9	1,17	1,0	0	0,7
11	0	1,75	0	1,12	0,76	0	1,7	1,7
12	0	2,63	0	2,0	2,2	1,0	0,8	1,2
13	0,76	0	0	1,3	0,9	0,67	0,4	0,4
14	0	2,9	0	1,6	1,85	0,75	0,6	0,6
15	0	4,53	0	1,4	2,85	0	1,8	1,8
16	0,83	0	0	2,0	5,3	0,78	1,4	1,4
17	0	0	1,28	1,2	1,6	0	1,8	1,8
18	0	1,2	0	1,3	1,44	1,0	0	1,4
19	0	2,44	0	0,9	1,3	0,8	0,8	0,8
20	0	1,5	0	1,0	1,0	0	1,0	1,5
21	0	1,9	0	1,25	1,0	1,0	0	2,0
22	0	3,9	0	1,5	3,5	1,0	1,8	2,2
23	0	0	1,38	1,0	1,5	0,8	1,6	1,6
24	0	1,15	0	0,8	0,45	0	1,2	1,2
25	0	3,08	0	1,1	1,0	1,0	0	1,8
26	0	0	7,33	2,15	3,85	1,0	0	2,8
27	0	0	7,9	2,4	7,16	1,0	0	1,5
28	0	0	0,66	0,82	0,33	1,0	0	1,0
29	1,75	0	0	1,8	2,07	1,0	0,8	1,6
30	1,13	0	0	0,85	0,95	1,0	0	1,2

Таблица 5.2

№ вар.	Параметры сигнала			№ вар.	Параметры сигнала		
	Рис. 5.3	Амплитуда U_{1m} , В	Длительность $t_{и}$, мс		Рис. 5.3	Амплитуда U_{1m} , В	Длительность $t_{и}$, мс
1	<i>a</i>	2,0	2,6	16	<i>в</i>	4,0	2,5
2	<i>б</i>	3,0	3,0	17	<i>a</i>	3,0	3,0
3	<i>г</i>	4,0	6,0	18	<i>в</i>	4,0	3,0
4	<i>в</i>	2,0	2,0	19	<i>г</i>	3,0	4,0
5	<i>д</i>	2,0	4,0	20	<i>д</i>	4,0	4,0
6	<i>a</i>	2,0	6,0	21	<i>б</i>	4,0	4,0
7	<i>г</i>	3,0	2,5	22	<i>e</i>	3,0	3,0
8	<i>б</i>	3,0	2,0	23	<i>г</i>	3,0	3,0

Продолжение таблицы 5.2

№ вар.	Параметры сигнала			№ вар.	Параметры сигнала		
	Рис. 5.3	Амплитуда U_{1m} , В	Длительность $t_{и}$, мс		Рис. 5.3	Амплитуда U_{1m} , В	Длительность $t_{и}$, мс
9	<i>д</i>	2,5	4,0	24	<i>в</i>	2,0	5,0
10	<i>в</i>	4,0	5,0	25	<i>е</i>	2,0	3,0
11	<i>а</i>	3,0	4,0	26	<i>б</i>	2,0	2,6
12	<i>б</i>	3,0	2,0	27	<i>д</i>	3,0	3,0
13	<i>з</i>	2,0	3,0	28	<i>в</i>	4,0	6,0
14	<i>а</i>	3,0	2,0	29	<i>а</i>	2,0	2,0
15	<i>д</i>	3,0	3,0	30	<i>е</i>	2,0	4,0

Тема 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Целью курсовой работы является практическое овладение навыками проектирования линейных цифровых фильтров (ЛЦФ).

6.1. Задание к курсовой работе

Необходимо по аналоговому прототипу спроектировать два варианта линейных цифровых фильтров, сравнить их характеристики и определить реакцию на заданное воздействие.

В курсовой работе должны быть выполнены следующие пункты.

1. Расчет аналогового фильтра-прототипа (1.1. Определение передаточной функции, ее нулей и полюсов. 1.2. Расчет частотных характеристик. 1.3. Расчет переходной характеристики. 1.4. Составление уравнений состояния).

2. Проектирование ЛЦФ методом соответствия переходных характеристик (2.1. Определение частоты дискретизации. 2.2. Расчет дискретной передаточной функции. 2.3. Построение схемы ЛЦФ. 2.4. Численный контроль переходной характеристики ЛЦФ).

3. Проектирование ЛЦФ методом использования уравнений состояния (3.1. Определение дискретной передаточной функции. 3.2. Построение схемы ЛЦФ. 3.3. Сравнение данных расчета переходных характеристик ЛЦФ и фильтра-прототипа).

4. Сравнительный анализ реакций фильтров на воздействие треугольной формы (4.1. Расчет реакции фильтра-прототипа. 4.2. Расчет реакции первого варианта ЛЦФ. 4.3. Расчет реакции второго варианта ЛЦФ. 4.4. Выводы по курсовой работе).

Рекомендации и требования к выполнению отдельных пунктов задания являются следующими.

В п. 1.1 вариант схемы и параметры фильтра-прототипа выбрать по указанию преподавателя.

В п. 1.2 записать выражения АЧХ, ФЧХ и построить графики АЧХ, ФЧХ, АФХ; найти полосу пропускания и оценить возможную форму сигналов на выходе фильтра; определить ширину спектра импульсной характеристики фильтра по однопроцентному амплитудному критерию.

В п. 1.3 построить график переходной характеристики, показав тонкими линиями отдельные составляющие; определить величину минимального характерного временного интервала графика t_{\min} и длительность переходного процесса $t_{\text{ПП}}$.

В п. 1.4, используя уравнения состояния, определить (для контроля) передаточную функцию цепи.

В п. 2.1 сравнить выбранный период дискретизации T с t_{\min} , а выбранную частоту дискретизации с шириной спектра импульсной характеристики фильтра-прототипа.

В п. 2.2 привести основные промежуточные преобразования.

В п. 2.3 привести схему ЛЦФ.

В п. 3.1 использовать в вариантах 1, 6, 11, 16 явную форму алгоритма Эйлера, в вариантах 2, 7, 12, 17 – неявную форму алгоритма Эйлера, в вариантах 3, 8, 13, 18 – смешанную форму алгоритма Эйлера, в вариантах 4, 9, 14, 19 – билинейное преобразование; в вариантах 5, 10, 15, 20 – любой из алгоритмов численного решения уравнений состояния. Привести основные преобразования и сравнить передаточные функции обоих вариантов ЛЦФ.

В п. 3.2 привести схему ЛЦФ.

В п. 3.3 привести сравнительные графики и таблицы переходных характеристик.

В п. 4.1 прототипом воздействия считать сигнал $f_{\text{ВХ}}(t)$, имеющий форму равнобедренного треугольника с высотой $A = 100$ и длительностью $2t_{\text{ПП}}$. Построить график и записать выражение реакции $f_{\text{ВЫХ}}(t)$ для характерных моментов $f_{\text{ВЫХ}}(nT)$.

В пп. 4.2, 4.3 привести сравнительные графики и таблицы значений $f_{\text{ВЫХ}}(nT)$ фильтров.

Замечание: расчет составляющих аналитических выражений необходимо проводить с точностью до шести значащих цифр.

6.2. Контрольные вопросы

1. Что такое ФНЧ, ФВЧ, ППФ, ПЗФ?
2. Что такое передаточная функция цепи, каковы ее свойства?
3. Как проконтролировать нули передаточной функции по схеме?
4. Что такое частотные характеристики цепи (АЧХ, ФЧХ, АФХ)?
5. Что характеризуют значения АЧХ при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$? Что характеризует наклон ФЧХ ФНЧ в полосе пропускания?
6. Что такое $\delta_1(t)$ и $\delta(t)$?
7. Что такое $h_1(t)$ и $h(t)$? Как их проконтролировать?
8. Как составить уравнения состояния и найти по ним передаточную функцию цепи?
9. В чем связь частотных и спектральных характеристик?

10. Как оценить время переходного процесса? Как определить минимальный характерный временной интервал процессов в цепи?
11. Что определяет теорема дискретизации?
12. Как описать дискретные сигналы? В чем их достоинства?
13. Каковы основные положения теоремы Котельникова?
14. Как преобразуются спектры сигналов при их дискретизации и восстановлении?
15. Каковы некорректные моменты в теореме Котельникова?
16. Как на практике применяется теорема Котельникова?
17. Что такое фильтр Котельникова?
18. Что такое дискретные и цифровые последовательности, решетчатые функции?
19. Что такое разностное уравнение дискретной цепи и как его получить?
20. Как построить схему линейной дискретной цепи?
21. Каковы элементы линейных дискретных цепей?
22. Какова формула прямого z -преобразования?
23. Что такое $\delta_0(nT)$, $\delta_1(nT)$, $\delta_1(nT - kT)$?
24. Что такое $h(nT)$ и $h_1(nT)$? Какова их связь?
25. Запишите теорему разложения z -преобразования и дайте соответствующие пояснения.
26. Запишите основные формулы таблицы z -преобразования.
27. Запишите теорему запаздывания z -преобразования. Каковы ее достоинства?
28. Как разложить $F(z)$ в ряд Лорана и как его использовать?
29. Как найти передаточную функцию по разностному уравнению?
30. Как численно найти сигнал на выходе дискретной цепи?
31. Как от уравнений состояния аналоговой цепи перейти к уравнениям дискретной цепи?
32. Как выбирается период дискретизации?
33. Каковы варианты численного решения уравнений состояния?
34. Как найти передаточную функцию дискретной цепи?
35. Как перейти к характеристикам дискретной цепи от прототипа-аналога?
36. Как перейти к дискретной цепи методом соответствия переходных характеристик?
37. Как перейти к характеристикам дискретной цепи на основании билинейного преобразования?

38. Как перейти к характеристикам дискретной цепи на базе явной формы алгоритма Эйлера?

39. Как перейти к характеристикам дискретной цепи на базе неявной формы алгоритма Эйлера?

40. Как перейти к характеристикам дискретной цепи на базе смешанной формы алгоритма Эйлера?

41. Как найти $f(nT)$ при $F(z) = 10 / [z^3(z + 0,5)(z - 0,5)]$?

42. Как найти $h_1(nT)$ при $H(z) = 10 / [(z + 0,5)(z - 0,5)]$?

43. Как найти $f(nT)$ при $F(z) = 10z^2 / (z^2 + z + 0,75)$?

44. Как разложением $F(z) = 10z^2 / (z^2 + z + 0,75)$ в ряд Лорана численно найти $f(nT)$?

45. Как при $H(z) = 10z^2 / (z^2 + z + 0,75)$ найти численно $h(nT)$ при использовании разностного уравнения?

46. Как найти переходную характеристику, если $H(z) = 10z / (z^2 + z + 0,75)$?

47. Как найти $h_1(nT)$, если разностное уравнение $f_2(nT) + f_2(nT - T) + 0,75f_2(nT - 2T) = 10f_1(nT)$?

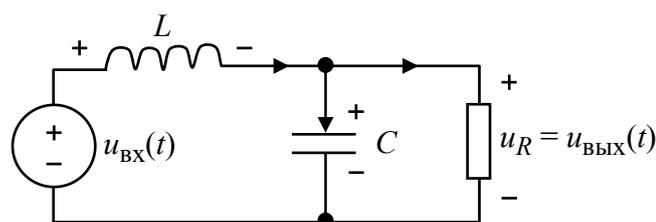
48. Как найти аналитически и численно $h_1(nT)$, если $H(z) = 10 / (z - 0,5)$?

49. Как найти аналитически и численно $h_1(nT)$, если $H(z) = 10z^{-2} / (z - 0,5)$?

50. Как найти аналитически и численно $h(nT)$, если разностное уравнение $f_2(nT) - 0,25f_2(nT - 2T) = 10f_1(nT - 2T)$?

6.3. Типовой пример

Схема ФНЧ (аналогового прототипа) приведена на рисунке, где $L = 1$ Гн, $C = 1/2$ Ф, $R = 2/3$ Ом.



На входе действует сигнал, имеющий форму равнобедренного треугольника длительностью $t_{\text{И}} = 6\tau_{\text{max}}$, где τ_{max} – максимальная постоянная времени цепи.

1. Расчет прототипа-аналога.

Передаточная функция (ПФ) по формуле делителя напряжений

$$\begin{aligned} \frac{U_{\text{ВЫХ}}(s)}{U_{\text{ВХ}}(s)} = H(s) &= \frac{Z_{RC}(s)}{Z_L(s) + Z_{RC}(s)} = \frac{2/3 \cdot 2/s}{2/3 + 2/s} \bigg/ \left(s + \frac{Z_{RC}(s)}{Z_L(s) + Z_{RC}(s)} \right) = \\ &= \frac{2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}. \end{aligned}$$

Полюсы: $s_1 = -1$; $s_2 = -2$. Нули: двукратный нуль при $s \rightarrow \infty$.

Находим частотную характеристику, АЧХ и ФЧХ:

$$H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega+1)(j\omega+2)}, \quad A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{(\omega^2+1^2)(\omega^2+2^2)}};$$

$$\Phi(\omega) = -\arctg \omega - \arctg \omega / 2.$$

Полоса пропускания (ПП) на НЧ по критерию $A_{\text{max}}/\sqrt{2}$ порядка $\Delta\omega_{\text{П}} \approx 1 \text{ с}^{-1}$.

Время запаздывания $t_{\text{зап}}$ проходящих через цепь сигналов, спектр которых в основном сосредоточен в ПП, определяется по наклону ФЧХ на НЧ.

$$\Phi(\omega)_{\omega \rightarrow 0} \simeq -\omega - \omega / 2 = -1,5\omega = -\omega t_{\text{зап}},$$

откуда $t_{\text{зап}} \simeq 1,5 \text{ с}$.

Ширина спектра $\Delta\omega_{\text{с}}$ импульсной характеристики цепи по однопроцентному критерию $0,01A_{\text{max}} = 0,01$ будет

$$0,01 = \frac{2}{\sqrt{(\Delta\omega_{\text{с}}^2 + 1^2)(\Delta\omega_{\text{с}}^2 + 2^2)}} \cong 2 / \Delta\omega_{\text{с}}^2,$$

откуда $\Delta\omega_{\text{с}}^2 \cong 200$, т. е. $\Delta\omega_{\text{с}} \cong 14 \text{ с}^{-1}$

Переходная характеристика

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{H(s)}{s} = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \div \\ &\div h_1(t) = (1 - 2e^{-t} + e^{-2t})\delta_1(t). \end{aligned}$$

Длительность переходных процессов $t_{ПП}$ по переходной характеристике обычно определяется по пятипроцентному критерию, когда

$$|h_1(t) - h_{1\text{ВЫН}}| < 0,05 h_{1\text{ВЫН}}(t),$$

причем в примере $h_{1\text{ВЫН}} = 1$ – вынужденная составляющая $h_1(t)$.

Однако в некоторых случаях проще находить $t_{ПП}$ по трехкратному значению τ_{max} , т. е. $t_{ПП} \cong 3\tau_{\text{max}} = 3\text{с}$.

Минимальный характерный временной интервал t_{min} процесса часто определяется по формуле

$$t_{\text{min}} \leq 0,2 \min\{\tau_{\text{min}}; 0,25T_{\text{min}}\},$$

где τ_{min} – минимальная постоянная времени цепи; T_{min} – минимальный период колебаний среди составляющих, описывающих процесс. В примере $t_{\text{min}} \leq 0,2 \tau_{\text{min}} = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1\text{с}$.

Уравнения состояния определяются из уравнений цепи:

$$u_L = u_{\text{ВХ}} - u_C; \quad u_L = Li'_L; \quad i_C = i_L - u_C / R; \quad i_C = Cu'_C,$$

откуда

$$u'_C = -3u_C + 2i_L, \quad i'_L = -u_C + u_{\text{ВХ}}.$$

Для определения ПФ по уравнениям состояния их преобразуют по Лапласу при нулевых начальных условиях

$$(s + 3)U_C(s) - 2I_L(s) = 0; \quad U_C(s) + sI_L(s) = U_{\text{ВХ}}(s),$$

откуда $U_{\text{ВЫХ}}(s) = U_C(s) = 2U_{\text{ВХ}}(s) / (s^2 + 2s + 2)$, что соответствует ПФ, полученной ранее.

2. Расчет линейного цифрового фильтра (ЛЦФ) методом соответствия переходных характеристик.

Частота дискретизации $\omega_d \gg 2\omega_{\text{max}}$ обычно определяется с учетом трех критериев для максимальной ω_{max} из учитываемых частот:

1) при использовании однопроцентного критерия ширины спектра импульсной характеристики $\omega_{\text{max}} > \Delta\omega_c \approx 14\text{с}^{-1}$;

2) при использовании однопроцентного критерия ширины спектра проходящих сигналов, т. е. в примере – импульса треугольной формы длительностью $t_{\text{и}} = 6\tau_{\text{max}} = 6\text{с}$, откуда $\omega_{\text{max}} > 16\pi / t_{\text{и}} \approx 8\text{с}^{-1}$;

3) по критерию удовлетворительного описания минимального временного интервала процессов цепи, т. е. $\omega_{\text{max}} > 2\pi / t_{\text{min}} \approx 60\text{с}^{-1}$.

Выбираем «удобную» частоту дискретизации $\omega_d = 628\text{c}^{-1} \gg 2\omega_{\max}$, т. е. период дискретизации $T_d = 2\pi / \omega_d = 0,01\text{ с} = \tau_{\min} / 50$.

Определяем ПФ ЛЦФ методом совпадения аналоговой $h_{1a}(t)$ и дискретной $h_{1d}(t)$ переходных характеристик в дискретные моменты времени $t = nT$, где $T = T_d = 0,01\text{ с}$. Для $t \geq 0$ имеем

$$h_{1a}(t) = 1 - 2e^{-nT} + e^{-2nT} = 1 - 2 \cdot 0,9900498^n + 0,98019871^n = h_{1d}(nT),$$

далее находим

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-0,9900498} + \frac{z}{z-0,98019871} = \\ &= \frac{z(9,911 \cdot 10^{-5}z + 9,794 \cdot 10^{-5})}{(z-1)(z-0,9900498)(z-0,98019871)}, \end{aligned}$$

после чего может быть определена ПФ ЛЦФ

$$H(z) = (z-1)H_1(z)/z.$$

3. Расчет ЛЦФ при использовании неявной формы алгоритма Эйлера.

ПФ ЛЦФ определяется по формуле

$$\begin{aligned} H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \frac{z-1}{z} = 100 \frac{z-1}{z}} &= \frac{2}{\left(100 \frac{z-1}{z} + 1\right) \left(100 \frac{z-1}{z} + 2\right)} = \\ &= \frac{1,9413705 \cdot 10^{-4} z^2}{(z-0,990099)(z-0,98039215)}, \end{aligned}$$

откуда переходная характеристика ЛЦФ

$$\begin{aligned} H_1(z) = H(z) \frac{z}{z-1} \div h_1(nT) &= 0,99999602 - 1,9801964 \cdot 0,990099^n + \\ &+ 0,98039455 \cdot 0,98039215^n. \end{aligned}$$

Далее необходимо сравнить результат с $h_{1a}(nT)$ по графикам и таблицам выборочных значений в характерных точках.

4. Расчет ЛЦФ при использовании явной формы алгоритма Эйлера.

ПФ ЛЦФ определяется по формуле

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=(z-1)/T=100(z-1)} = \frac{2}{(100z-100+1)(100z-100+2)} =$$

$$= \frac{1,9413705 \cdot 10^{-4}}{(z - 0,990099)(z - 0,98039215)}.$$

Переходная характеристика ЛЦФ

$$H_1(z) = H(z) \frac{z}{z-1} \div h_1(nT) = 0,99999602 - 2,0199984 \cdot 0,990099^n + \\ + 1,0200025 \cdot 0,98039215^n.$$

5. Расчет ЛЦФ при использовании билинейного преобразования.

ПФ ЛЦФ определяется по формуле

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} = \frac{2}{\left(200 \frac{z-1}{z+1} + 1\right) \left(200 \frac{z-1}{z+1} + 2\right)} = \\ = \frac{4,9258656 \cdot 10^{-5} (z+1)^2}{(z - 0,99004975)(z - 0,98019801)}.$$

6. Расчет ЛЦФ при использовании смешанной формы алгоритма Эйлера.

В данном случае используются уравнения для численного решения уравнений состояния, причем в правой части уравнений значения переменных состояния записывают для предшествующего, т. е. $(n-1)$ -го интервала, а значения воздействия – для n -го интервала:

$$\begin{cases} u_C - u_{C(n-1)} = (-3u_{C(n-1)} + 2i_{L(n-1)})T \\ i_{Ln} - i_{L(n-1)} = (-u_{C(n-1)} + u_{вх n})T. \end{cases}$$

При $T = 0,01$ с используем z -преобразование уравнений

$$\begin{cases} U_C(z)(1 - z^{-1}) = 0,01(-3U_C(z)z^{-1} + 2z^{-1}I_L(z)) \\ I_L(z)(1 - z^{-1}) = 0,01(-z^{-1}U_C(z) + U_{вх}(z)), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (1 - 0,97z^{-1})U_C(z) - 0,02z^{-1}I_L(z) = 0 \\ 0,01z^{-1}U_C(z) + (1 - z^{-1})I_L(z) = 0,01U_{вх}(z), \end{cases}$$

откуда, решая систему, находим связь воздействия ЛЦФ с реакцией $U_{вх}(z) = U_C(z)$:

$$U_C(z) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -0,02z^{-1} \\ 0,01U_{\text{BX}}(z) & (1-z^{-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-0,97z^{-1}) & -0,02z^{-1} \\ 0,01z^{-1} & (1-z^{-1}) \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 10^{-4} U_{\text{BX}}(z)}{z^2 - 1,97z + 0,9702}.$$

Таким образом, ПФ ЛЦФ

$$H(z) = \frac{0,0002}{z^2 - 1,97z + 0,9702} = \frac{0,0002}{(z - 0,99)(z - 0,98)},$$

следовательно, переходная характеристика

$$H_1(z) = H(z) \frac{z}{z-1} \div h_1(nT) = 1 - 2 \cdot 0,99^n + 0,98^n;$$

остается сравнить результат с $h_{1a}(nT)$.

Замечание: если собственные частоты аналогового прототипа являются комплексными, то при использовании метода соответствия переходных характеристик для перехода к ЛЦФ рекомендуется применять табличную формулу

$$a^n \cos(\omega_0 n + \alpha) \div \frac{z(z - a \cos \omega_0) \cos \alpha - az \sin \omega_0 \sin \alpha}{z^2 - 2za \cos \omega_0 + a^2},$$

которую легко трансформировать для случаев $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = \pm 90^\circ$, $a = 1$.

Тема 7. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПЕЙ

Общие указания

Курсовая работа посвящена анализу линейной активной и нелинейной пассивной цепей. Требуется исследовать реакции цепей при различных воздействиях. Индивидуальное задание студент выполняет в соответствии со своим номером в списке группы.

При выполнении курсовой работы студент использует современные методы анализа линейных и нелинейных цепей.

Цель курсовой работы

Целью курсовой работы является практическое освоение современных методов количественного и качественного анализа линейных и нелинейных электрических цепей.

В курсовой работе использован следующий материал курса теоретических основ электротехники: методы расчета сложных цепей, классический и операторный методы анализа линейных цепей, аналитически-численный метод анализа нелинейных цепей.

Задание на курсовую работу

Проанализировать следует одну из цепей, схемы которых заданы тройками чисел в соответствии с номером варианта задания (табл. 7.1). Первое число в заданных тройках чисел является порядковым номером элемента, два других – номерами узлов (в том числе устранимых), к которым подключен этот элемент. Для источников напряжения (ИН) узлы отсчитывают от «+» к «-», а для источников тока (ИТ) – по направлению тока. После тройки чисел приведены условное буквенное обозначение соответствующего параметра и его числовое значение в вольтах, амперах, омах, фарадах, генри и секундах.

Отсчет узлов в ветви, ток которой или напряжение на которой определяют параметры управляемого источника, соответствует отсчету узлов независимого источника тока или источника напряжения. К входу электрической цепи подключен источник напряжения $u_1(t)$ либо источника тока $i_1(t)$. Реакцией цепи является напряжение на нагрузке $u_H(t)$ для схем с источником напряжения $u_1(t)$ или ток нагрузки $i_H(t)$ для схем с источником тока $i_1(t)$.

Таблица 7.1

Вариант	Описание цепи и сигнала
1	151 – ИТ i_1 ; $I_m = 5$; 215 – $R_2 = 4 \cdot 10^3$; 323 – $C_3 = 1 \cdot 10^{-6}$; 423 – $R_4 = 2 \cdot 10^3$; 534 – $L_5 = 4$; 645 – $R_H = 4 \cdot 10^3$; 721 – ИНУН $u_7 = k_{y.и} u_C$; 845 – $R_8 = 4 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, z ; $\tau_{и} = 4 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 2,25$
2	114 – ИН u_1 ; $U_m = 4$; 212 – $R_2 = 10^3$; 323 – $L_3 = 0,25$; 434 – $R_4 = 2 \cdot 10^3$; 534 – $C_5 = 0,25 \cdot 10^{-6}$; 643 – ИТУТ $i_6 = k_{y.и} i_H$; 724 – $R_H = 10^3$; воздействие – рис. 1, a ; $\tau_{и} = 2 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 2$
3	141 – ИТ i_1 ; $I_m = 2$; 214 – $R_2 = 2 \cdot 10^3$; 312 – $R_3 = 2 \cdot 10^3$; 412 – ИТУТ $i_4 = k_{y.и} i_2$; 512 – $C_5 = 10^{-6}$; 623 – $L_6 = 2$; 734 – $R_7 = 4 \cdot 10^3$; 834 – $R_H = 4 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, $в$; $\tau_{и} = 4 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 5$
4	141 – ИТ i_1 ; $I_m = 6$; 214 – $R_2 = 2,5 \cdot 10^3$; 313 – $L_3 = 0,5$; 412 – $R_4 = 2,5 \cdot 10^3$; 532 – ИНУН $u_5 = k_{y.и} u_H$; 634 – $C_6 = 0,8 \cdot 10^{-6}$; 734 – $R_H = 2,5 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, a ; $\tau_{и} = 2 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 2$
5	115 – ИН u_1 ; $U_m = 2$; 212 – $R_2 = 4 \cdot 10^3$; 323 – $R_3 = 6 \cdot 10^3$; 434 – ИНУТ $u_4 = k_{y.и} i_H$; 545 – $L_5 = 3,2$; 645 – $C_6 = 0,125 \cdot 10^{-6}$; 725 – $R_H = 4 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, $б$; $\tau_{и} = 8 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 12 \cdot 10^3$
6	112 – ИН u_1 ; $U_m = 6$; 213 – $R_2 = 2 \cdot 10^3$; 334 – $R_3 = 2 \cdot 10^3$; 435 – ИНУТ $u_4 = k_{y.и} i_C$; 542 – $C_5 = 0,1 \cdot 10^{-6}$; 656 – $L_6 = 4$; 726 – $R_H = 2 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, e ; $\tau_{и} = 4 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 18 \cdot 10^3$
7	151 – ИТ i_1 ; $I_m = 8$; 215 – $R_2 = 10^3$; 312 – $R_3 = 10^3$; 423 – ИНУТ $u_4 = k_{y.и} i_L$; 534 – $L_5 = 0,625$; 645 – $C_6 = 0,5 \cdot 10^{-6}$; 735 – $R_H = 2 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, a ; $\tau_{и} = 2,5 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 4 \cdot 10^3$
8	151 – ИТ i_1 ; $I_m = 10$; 215 – $R_2 = 2 \cdot 10^3$; 312 – ИНУТ $u_3 = k_{y.и} i_H$; 423 – $R_4 = 10^3$; 535 – $C_5 = 0,2 \cdot 10^{-6}$; 624 – $L_6 = 1$; 745 – $R_H = 10^3$; воздействие – рис. 1, $б$; $\tau_{и} = 4 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 2 \cdot 10^3$
9	151 – ИТ i_1 ; $I_m = 5$; 214 – $R_2 = 10^3$; 312 – $R_3 = 2 \cdot 10^3$; 432 – ИНУН $u_4 = k_{y.и} u_C$; 545 – $L_5 = 1/4$; 613 – $C_6 = (1/16) \cdot 10^{-6}$; 735 – $R_H = 10^3$; воздействие – рис. 1, e ; $\tau_{и} = 2 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 2$

Вариант	Описание цепи и сигнала
10	114 – ИН u_1 ; $U_m = 8$; 212 – $R_2 = 8 \cdot 10^3$; 323 – $R_3 = 8 \cdot 10^3$; 424 – ИТУТ $i_4 = k_{y.и} i_3$; 523 – $C_5 = 0,5 \cdot 10^{-6}$; 623 – $L_6 = 4$; 734 – $R_7 = 4 \cdot 10^3$; 834 – $R_H = 4 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, б; $\tau_{и} = 8 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 4$
11	116 – ИН u_1 ; $U_m = 10$; 212 – $R_2 = 0,5 \cdot 10^3$; 323 – $L_3 = 4/3$; 434 – $R_4 = 10^3$; 545 – $C_5 = (4/9) \cdot 10^{-6}$; 656 – ИНУТ $u_6 = k_{y.и} i_L$; 736 – $R_H = 0,5 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, з; $\tau_{и} = 4 \cdot 10^{-3}$; $T = 2\tau_{и}$; $k_{y.и} = 2500$
12	151 – ИТ i_1 ; $I_m = 2$; 215 – $R_2 = 500$; 312 – $R_3 = 250$; 423 – $L_4 = 0,25$; 543 – ИНУТ $u_5 = k_{y.и} i_C$; 614 – $C_6 = 10^{-6}$; 745 – $R_7 = 10^3$; 845 – $R_H = 10^3$; воздействие – рис. 1, е; $\tau_{и} = 2 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 2,5 \cdot 10^3$
13	141 – ИТ i_1 ; $I_m = 6$; 214 – $R_2 = 1,5 \cdot 10^3$; 313 – $R_3 = 3 \cdot 10^3$; 432 – ИНУТ $u_4 = k_{y.и} i_H$; 512 – $L_5 = 3,6$; 613 – $C_6 = 0,4 \cdot 10^{-6}$; 734 – $R_7 = 3 \cdot 10^3$; 834 – $R_H = 3 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, д; $\tau_{и} = 6 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 1,44 \cdot 10^3$
14	151 – ИТ i_1 ; $I_m = 8$; 215 – $R_2 = 3 \cdot 10^3$; 313 – $R_3 = 4 \cdot 10^3$; 434 – ИНУТ $u_4 = k_{y.и} i_H$; 512 – $L_5 = 1,2$; 624 – $C_6 = 1,25 \cdot 10^{-6}$; 745 – $R_7 = 2 \cdot 10^3$; 845 – $R_H = 2 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, б; $\tau_{и} = 3 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 1,6 \cdot 10^4$
15	112 – ИН u_1 ; $U_m = 5$; 213 – $R_2 = 10^3$; 334 – $C_3 = 0,05 \cdot 10^{-6}$; 445 – $L_4 = 0,2$; 542 – $R_5 = 2 \cdot 10^3$; 625 – ИНУН $u_6 = k_{y.и} u_C$; 732 – $R_H = 10^3$; воздействие – рис. 1, е; $\tau_{и} = 2 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 0,85$
16	114 – ИН u_1 ; $U_m = 8$; 212 – $R_2 = 2 \cdot 10^3$; 323 – $R_3 = 10^3$; 432 – ИТУТ $i_4 = k_{y.и} i_L$; 534 – $L_5 = 0,16$; 634 – $C_6 = 0,03 \cdot 10^{-6}$; 724 – $R_H = 2 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, а; $\tau_{и} = 8 \cdot 10^{-3}$; $T = 2\tau_{и}$; $k_{y.и} = 2$
17	131 – ИТ i_1 ; $I_m = 2$; 213 – $R_2 = 2,5 \cdot 10^3$; 312 – $R_3 = 1,25 \cdot 10^3$; 423 – $L_4 = 4/3$; 523 – $C_5 = 0,04 \cdot 10^{-6}$; 623 – ИТУТ $i_6 = k_{y.и} i_3$; 713 – $R_H = 2,5 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, б; $\tau_{и} = 4 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 0,5$
18	131 – ИТ i_1 ; $I_m = 6$; 213 – $R_2 = 3 \cdot 10^3$; 314 – $L_3 = 2$; 442 – $C_4 = 0,1 \cdot 10^{-6}$; 552 – ИНУН $u_5 = k_{y.и} u_2$; 653 – $R_6 = 2 \cdot 10^3$; 712 – $R_7 = 2 \cdot 10^3$; 823 – $R_H = 2 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, в; $\tau_{и} = 2 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 5,33$

Вариант	Описание цепи и сигнала
19	141 – ИТ i_1 ; $I_m = 4$; 213 – $L_2 = 0,25$; 334 – $R_3 = 2 \cdot 10^3$; 412 – $R_4 = 8 \cdot 10^3$; 512 – ИТУН $i_5 = k_{y.и} u_L$; 624 – $C_6 = 0,25 \cdot 10^{-6}$; 724 – $R_H = 2 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, z ; $\tau_{и} = 4 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 0,5 \cdot 10^{-3}$
20	115 – ИН u_1 ; $U_m = 5$; 212 – $R_2 = 2 \cdot 10^3$; 324 – $R_3 = 2 \cdot 10^3$; 445 – $C_4 =$ $= 0,05 \cdot 10^{-6}$; 532 – ИНУТ $u_5 = k_{y.и} i_2$; 636 – $L_6 = 0,2$; 765 – $R_7 = 10^3$; 835 – $R_H =$ $= 10^3$; воздействие – рис. 1, e ; $\tau_{и} = 6 \cdot 10^{-3}$; $T = 2\tau_{и}$; $k_{y.и} = 2,2 \cdot 10^3$
21	114 – ИН u_1 ; $U_m = 2$; 212 – $R_2 = 8 \cdot 10^3$; 323 – $R_3 = 8 \cdot 10^3$; 423 – $L_4 = 4$; 524 – $C_5 = 0,5 \cdot 10^{-6}$; 624 – ИТУТ $i_6 = k_{y.и} i_3$; 734 – $R_H = 2 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, e ; $\tau_{и} = 2 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 5$
22	115 – ИН u_1 ; $U_m = 6$; 212 – $R_2 = 4,8 \cdot 10^3$; 324 – $L_3 = 0,36$; 445 – $C_4 =$ $= 0,025 \cdot 10^{-6}$; 523 – ИТУТ $i_5 = k_{y.и} i_L$; 623 – $R_6 = 3,6 \cdot 10^3$; 735 – $R_H =$ $= 1,2 \cdot 10^3$; воздействие – рис. 1, a ; $\tau_{и} = 4 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 6$
23	141 – ИТ i_1 ; $I_m = 4$; 214 – $R_2 = 100$; 313 – $C_3 = 10^{-6}$; 423 – ИНУТ $u_4 =$ $= k_{y.и} i_H$; 512 – $L_5 = 0,036$; 624 – $R_6 = 300$; 724 – $R_H = 600$; воздействие – рис. 1, b ; $\tau_{и} = 8 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 810$
24	116 – ИН u_1 ; $U_m = 3$; 212 – $L_2 = 0,25$; 323 – $R_3 = 500$; 434 – $R_4 = 125$; 546 – ИНУТ – $u_5 = k_{y.и} i_C$; 635 – $C_6 = 0,5 \cdot 10^{-6}$; 756 – $R_H = 500$; воздействие – рис. 1, z ; $\tau_{и} = 4 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 250$
25	131 – ИТ i_1 ; $I_m = 8$; 213 – $R_2 = 2,5 \cdot 10^3$; 312 – $R_3 = 1,25 \cdot 10^3$; 423 – $L_4 = 4/3$; 523 – $C_5 = 0,04 \cdot 10^{-6}$; 623 – ИТУТ $i_6 = k_{y.и} i_3$; 713 – $R_H = 2,5 \cdot 10^3$; воздейст- вие – рис. 1, a ; $\tau_{и} = 4 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 0,5$
26	141 – ИТ i_1 ; $I_m = 4$; 214 – $R_2 = 100$; 313 – $L_3 = 0,036$; 423 – ИНУТ $u_4 = k_{y.и} i_H$; 512 – $C_5 = 10^{-6}$; 624 – $R_6 = 300$; 724 – $R_H = 600$; воздействие – рис. 1, b ; $\tau_{и} = 8 \cdot 10^{-3}$; $k_{y.и} = 810$

Анализ линейной цепи классическим методом при коммутации

Дано: в момент времени $t = 0$ в цепи замыкается ключ К, соединенный последовательно с элементом R_H . На входе цепи действует источник напряжения $u_1(t) = U_m$ или тока $i_1(t) = I_m$, предначальные условия ненулевые.

Требуется:

1. Составить уравнения состояния цепи при $t > 0$.
2. Найти точные аналитические решения уравнений состояния и решение для реакции цепи при $k_{y.и} = 0$ и $k_{y.и} \neq 0$.
3. Построить графики реакции цепи.

Дано: ключ К, соединенный последовательно с элементом R_H , замкнут. На входе цепи действует источник напряжения $u_1(t)$ или тока $i_1(t)$, предначальные условия нулевые. Источник вырабатывает сигнал $\delta_1(t)$ или $\delta_0(t)$.

Требуется:

1. Определить переходную $h_1(t)$ и импульсную $h_0(t)$ характеристики цепи при $k_{y.и} = 0$ и $k_{y.и} \neq 0$.
2. Построить графики переходных и импульсных характеристик при $k_{y.и} = 0$ и $k_{y.и} \neq 0$, совместив их попарно.

Привести расчет трех характерных точек для каждой построенной кривой, помимо точек с абсциссами $t = 0+$ и $t \rightarrow \infty$.

Анализ линейной цепи операторным методом при апериодическом воздействии

Дано: в момент времени $t = 0$ источник напряжения $f_1(t) = u_1(t)$ или тока $f_1(t) = i_1(t)$ подает одиночный импульс напряжения или тока. Форма импульса показана на рис. 7.1, $a - e$ ($A_m = U_m$ или $A_m = I_m$). Ключ К замкнут, предначальные условия нулевые.

Требуется:

1. Определить функцию передачи $H_I(p)$ по току для схем с ИТ или напряжению $H_U(p)$ для схем с ИН при $k_{y.и} = 0$ и $k_{y.и} \neq 0$.
2. Найти нули и полюсы функции передачи и нанести их на комплексную плоскость.
3. Определить изображение по Лапласу воздействия в виде одиночного импульса напряжения $u_1(t)$ или тока $i_1(t)$.

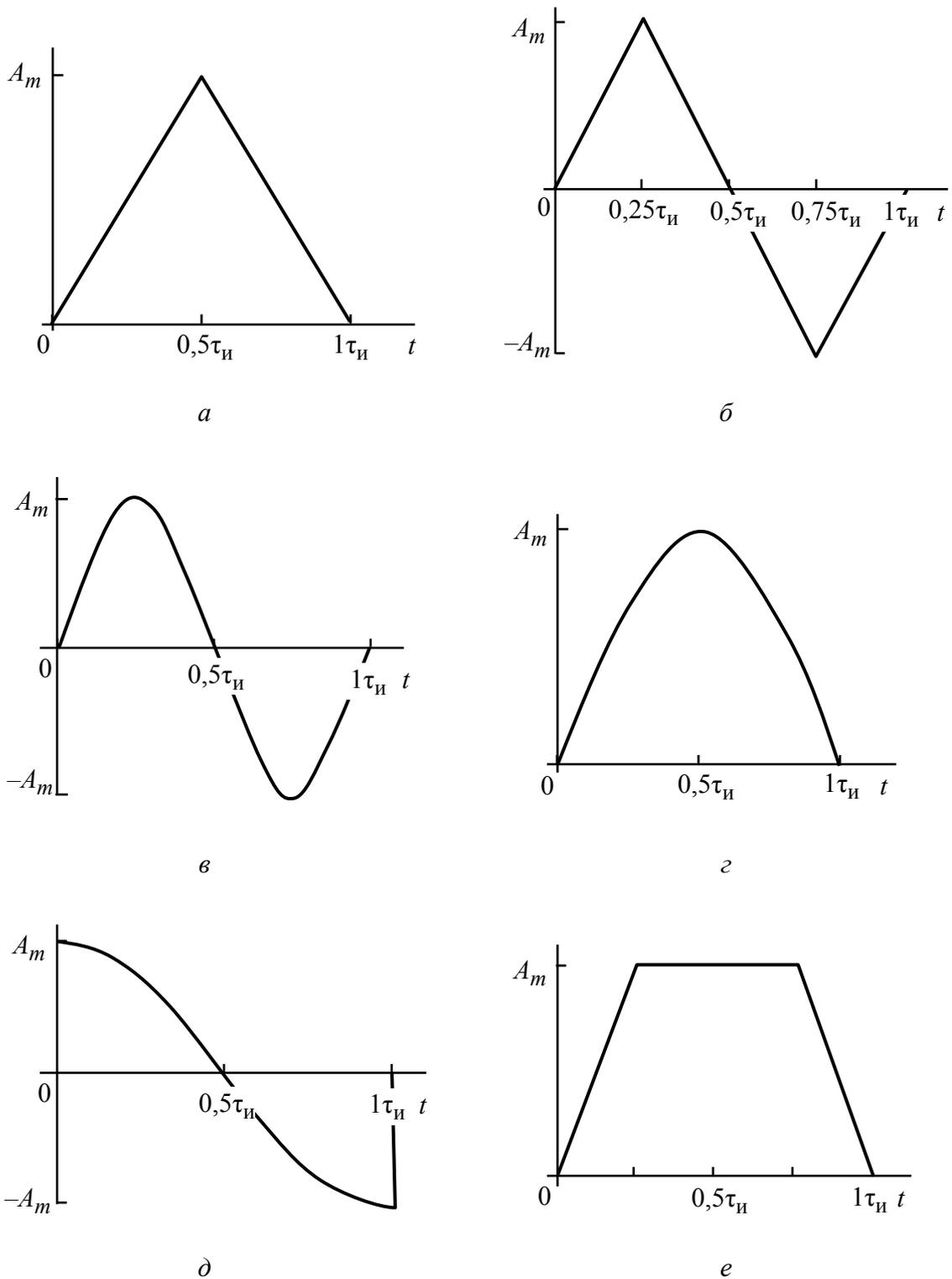


Рис. 7.1

4. Определить напряжение $u_H(t)$ или ток $i_H(t)$ на выходе цепи, используя $H_U(p)$ или $H_I(p)$ соответственно.

5. Построить совместно графики входного импульсного сигнала $u_1(t)$ или тока $i_1(t)$ и реакции цепи $u_H(t)$ или тока $i_H(t)$.

Анализ нелинейной пассивной цепи аналитически-численным методом

Дано: в исходной цепи один из R -элементов заменен нелинейным элементом (НЭ), заданным своей вольт-амперной характеристикой. Нелинейные элементы и их вольт-амперные характеристики заданы в табл. 7.2. На входе цепи действует источник напряжения $u_1(t) = U_m \delta_1(t)$ или тока $i_1(t) = I_m \delta_1(t)$.

Таблица 7.2

Вариант	Нелинейный R -элемент	Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента	Вариант	Нелинейный R -элемент	Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента
1	R_4	$u_{НЭ} = 4 \cdot 10^3 i_{НЭ}^2$	14	R_3	$u_{НЭ} = 4/3 \cdot 10^4 i_{НЭ}^2$
2	R_4	$u_{НЭ} = 1,92 \cdot 10^6 i_{НЭ}^2$	15	R_2	$i_{НЭ} = 1,25 \cdot 10^{-3} u_{НЭ}^2$
3	R_3	$u_{НЭ} = 6 \cdot 10^3 i_{НЭ}^2$	16	R_3	$u_{НЭ} = 8 \cdot 10^6 i_{НЭ}^2$
4	R_4	$i_{НЭ} = 0,32 \cdot 10^{-6} u_{НЭ}^2$	17	R_3	$u_{НЭ} = 7,5 \cdot 10^3 i_{НЭ}^2$
5	R_3	$u_{НЭ} = 9,6 \cdot 10^7 i_{НЭ}^2$	18	R_7	$i_{НЭ} = 0,5 \cdot 10^{-6} u_{НЭ}^2$
6	R_3	$u_{НЭ} = 8 \cdot 10^6 i_{НЭ}^2$	19	R_4	$i_{НЭ} = 0,75 \cdot 10^{-6} u_{НЭ}^2$
7	R_3	$u_{НЭ} = 1,6 \cdot 10^4 i_{НЭ}^2$	20	R_3	$i_{НЭ} = 4 \cdot 10^{-3} u_{НЭ}^2$
8	R_4	$u_{НЭ} = 1,5 \cdot 10^3 i_{НЭ}^2$	21	R_3	$i_{НЭ} = 10^{-3} u_{НЭ}^2$
9	R_3	$u_{НЭ} = 8 \cdot 10^3 i_{НЭ}^2$	22	R_6	$u_{НЭ} = 5,76 \cdot 10^6 i_{НЭ}^2$
10	R_3	$i_{НЭ} = 4,5 \cdot 10^{-3} u_{НЭ}^2$	23	R_6	$u_{НЭ} = 1,8 \cdot 10^3 i_{НЭ}^2$
11	R_H	$u_{НЭ} = 10^5 i_{НЭ}^2$	24	R_4	$u_{НЭ} = 3 \cdot 10^3 i_{НЭ}^2$
12	R_3	$i_{НЭ} = 40/9 \cdot 10^{-6} u_{НЭ}^2$	25	R_4	$u_{НЭ} = 0,5 \cdot 10^6 i_{НЭ}^2$
13	R_H	$u_{НЭ} = 0,75 \cdot 10^3 i_{НЭ}^2$	26	R_4	$u_{НЭ} = 0,5 \cdot 10^6 i_{НЭ}^2$

Требуется:

1. Составить уравнения состояния цепи для $t > 0$ при $k_{y.и} = 0$.
2. Найти решения уравнений состояния аналитически-численным методом с заданной локальной точностью и рассчитать выходной сигнал. Значения локальной точности приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Вариант	Локальная точность	Вариант	Локальная точность	Вариант	Локальная точность
1	$1,2 \cdot 10^{-3}$	10	$0,4 \cdot 10^{-2}$	19	$0,8 \cdot 10^{-2}$
2	$2,4 \cdot 10^{-3}$	11	$1,5 \cdot 10^{-3}$	20	$2,4 \cdot 10^{-3}$
3	$3,6 \cdot 10^{-3}$	12	$2,4 \cdot 10^{-3}$	21	$1,2 \cdot 10^{-3}$
4	$0,8 \cdot 10^{-2}$	13	$0,8 \cdot 10^{-3}$	22	$0,75 \cdot 10^{-2}$
5	$1,5 \cdot 10^{-3}$	14	$0,4 \cdot 10^{-2}$	23	$0,8 \cdot 10^{-3}$
6	$2,4 \cdot 10^{-3}$	15	$0,75 \cdot 10^{-2}$	24	$1,5 \cdot 10^{-2}$
7	$1,2 \cdot 10^{-3}$	16	$1,5 \cdot 10^{-3}$	25	$0,75 \cdot 10^{-3}$
8	$3,6 \cdot 10^{-3}$	17	$3,6 \cdot 10^{-3}$	26	$0,8 \cdot 10^{-2}$
9	$0,75 \cdot 10^{-2}$	18	$1,2 \cdot 10^{-3}$		

3. Построить на одном графике соответствующие реакции линейной и нелинейной цепей и сделать выводы о характере происшедших в схеме изменений.

Нормирование параметров и переменных цепи

Порядок значений, характеризующих параметры элементов электрической цепи в задании курсового расчета, колеблется от 10^{-6} (для емкостей) до 10^3 (для резисторов). Значения токов и напряжений также могут различаться на несколько порядков. В большом диапазоне могут изменяться временные интервалы, характеризующие переходные процессы в цепи.

При выполнении расчетов целесообразно выполнять обобщенный анализ процессов в цепях и оперировать величинами одного порядка, близкими к единице. С этой целью широко используют нормирование параметров цепей и сигналов [1], при котором переходят к безразмерным величинам параметров и переменных. Нормирование состоит в том, что выбирают некоторые базисные значения напряжения U_0 , тока I_0 , сопротивления R_0 , индуктивности L_0 , емкости C_0 , времени t_0 и определяют безразмерные (нормированные) величины:

$$U_* = \frac{U}{U_0}; i_* = \frac{i}{I_0}; R_* = \frac{R}{R_0}; L_* = \frac{L}{L_0}; C_* = \frac{C}{C_0}; t_* = \frac{t}{t_0}.$$

Из шести базисных величин независимыми являются только три.

В курсовой работе независимо могут быть нормированы время, сопротивление, а также уровень воздействия и реакции. При масштабировании времени t нормирование осуществляется по формуле [1]

$$t_* = \frac{t}{t_0},$$

причем базисное значение времени t_0 целесообразно выбирать, исходя из значения длительности входного сигнала $\tau_{\text{и}}$. Обычно выбирают $t_0 = \tau_{\text{и}} / k$, где k – целое число.

Параметры сопротивлений, индуктивностей и емкостей нормируют следующим образом:

$$R_* = \frac{R}{R_0}; \quad L_* = \frac{L}{t_0 R_0}; \quad C_* = C \frac{R_0}{t_0},$$

откуда $L_0 = t_0 R_0$, $C_0 = t_0 / R_0$, а в качестве базисного сопротивления R_0 обычно выбирают сопротивление нагрузки $R_{\text{н}}$. При нормировании уровней напряжений и токов в качестве базиса (масштаба) обычно выбирают максимальное значение воздействия.

Следует отметить, что результаты анализа процессов в цепи в нормированных величинах легко пересчитываются к конкретным значениям параметров. Для этого достаточно умножить нормированные величины на их базисные значения, т. е. произвести денормирование.

Анализ линейной цепи классическим методом при коммутации

Формирование уравнений состояния. В качестве переменных состояния выбирают напряжения C -элементов u_C и токи L -элементов i_L . В цепи при $t < 0$ необходимо определить предначальные значения $u_C(0-)$ и $i_L(0-)$. Для формирования системы уравнений состояния необходимо заменить C -элементы источниками напряжения с напряжением $u = u_C$, а L -элементы – источниками тока с током $i = i_L$ и в полученной схеме выразить ток i_C и напряжение u_L через напряжение u_C , ток i_L , значение входного источника и параметры управляемого источника. Необходимо помнить, что источниками напряжения $u = u_C$ и тока $i = i_L$ замещаются пассивные элементы цепи, поэтому напряжение и ток этих источников согласованы. В результате расчета должна быть получена система уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} i_C &= a_{1C} u_C + a_{1L} i_L + b_{1C} [u_1(t); i_1(t)]; \\ u_L &= a_{2C} u_C + a_{2L} i_L + b_{2L} [u_1(t); i_1(t)]. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Используя вольт-амперные характеристики элементов $u_L = Li'_L$ и $i_C = Cu'_C$, нужно преобразовать систему (7.1) к следующему виду:

$$\begin{aligned} u'_C &= a_{11}u_C + a_{12}i_L + b_1[u_1(t); i_1(t)]; \\ i'_L &= a_{21}u_C + a_{22}i_L + b_2[u_1(t); i_1(t)] \end{aligned} \quad (7.2)$$

или привести ее в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} u'_C \\ i'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} [u_1(t); i_1(t)]. \quad (7.3)$$

Необходимо помнить, что порядок следования уравнений в системах (7.1)–(7.3) и переменных в уравнениях системы должен быть строго согласован.

Решение уравнений состояния. Решение системы (7.3) находят в виде суммы свободной и вынужденных составляющих:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_{C\text{вын}} + u_{C\text{св}}; \\ i_L(t) &= i_{L\text{вын}} + i_{L\text{св}}. \end{aligned}$$

Для определения вида свободной составляющей решений необходимо составить характеристическое уравнение и найти его корни. Характеристический полином определяется с помощью матрицы A , которую необходимо выделить из системы (7.3). В результате получим:

$$\det[[A] - \lambda[I]] = \det \left[\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right].$$

Отсюда находим характеристическое уравнение

$$\det[[A] - \lambda[I]] = \lambda^2 + d\lambda + c = 0. \quad (7.4)$$

Уравнение (7.4) может иметь четыре вида корней:

- 1) вещественные различные $\lambda_1 = -\alpha$, $\lambda_2 = -\beta$ – аperiodический процесс;
- 2) вещественные кратные $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ – критический процесс;
- 3) комплексно-сопряженные $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$ – колебательный процесс;
- 4) мнимые $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ – незатухающие колебания.

Для устойчивых цепей корни характеристического уравнения располагаются в левой части плоскости комплексных чисел (в крайнем случае – на оси мнимых чисел, причем они не кратные). Вид свободной составляющей в случае

а) аperiodического процесса – $x_{\text{св}}(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\beta t}$;

б) критического процесса – $x_{\text{св}}(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 t e^{-\alpha t}$;

в) колебательного процесса – $x_{CB}(t) = A_1 e^{-\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega t$.

Для определения вынужденной составляющей решения при постоянном воздействии необходимо в системе (7.3) приравнять к нулю производные и решить полученную систему относительно $u_{CВЫН} = \text{const}$ и $i_{LВЫН} = \text{const}$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{CВЫН} \\ i_{LВЫН} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} [u_1(t); i_1(t)].$$

Для определения постоянных интегрирования A_1, A_2 свободной составляющей решения необходимо составить систему из двух уравнений. Первое уравнение – это само решение при $t = 0$, второе – его первая производная при $t = 0$:

$$\begin{cases} u_C(0+) = (u_{CВЫН} + u_{CСВ})|_{t=0}; \\ u'_C(0+) = (u_{CВЫН} + u_{CСВ})'|_{t=0}. \end{cases}$$

Значение $u_C(0+)$ определяется по предначальным условиям, а $u'_C(0+)$ – из системы (7.3), при этом используются начальные значения переменных состояния:

$$\begin{bmatrix} u'_C(0+) \\ i'_C(0+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(0+) \\ i_L(0+) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} [u_1(0+); i_1(0+)].$$

Реакция цепи определяется по уравнению связи на основании полученных решений для $u_C(t)$ и $i_L(t)$.

Определение переходной $h_1(t)$ и импульсной $h_0(t)$ характеристик цепи. При определении переходной характеристики цепи входное воздействие $f_1(t) = \delta_1(t)$. Предначальные условия нулевые: $u_C(0-) = 0, i_L(0-) = 0$. Переходная характеристика численно равна реакции цепи, определенной при нулевых предначальных условиях и единственном источнике воздействия в виде единичной ступенчатой функции $\delta_1(t)$. Реакция цепи рассчитывается по уже полученным уравнениям состояния, отличие состоит в том, что входное воздействие единичное, а начальные условия нулевые. При определении импульсной характеристики цепи $h_0(t)$ необходимо помнить, что она является обобщенной первой производной от переходной характеристики, поэтому $h_0(t) = h_1(0+)\delta_0(t) + h'_1(t)\delta_1(t)$.

Анализ линейной цепи операторным методом при апериодическом воздействии

Определение функции передачи цепи, ее нулей и полюсов. При определении функции передачи цепи необходимо составить операторную схему замещения цепи при нулевых предначальных условиях. Отношение выходной реакции цепи к входному воздействию не зависит от абсолютных значений этих параметров. Для расчета можно использовать, например, метод пропорциональных величин. Функция передачи цепи является отношением двух полиномов, при этом в рассматриваемых цепях полином знаменателя – второго порядка, а полином числителя не выше второго порядка. Корни полинома знаменателя – полюсы функции передачи – совпадают с корнями характеристического уравнения. Корни полинома числителя – нули функции передачи.

Определение изображения по Лапласу входного одиночного импульса и выходной реакции цепи. При выполнении этого пункта расчета следует найти описание входного одиночного импульса во временной области, а затем выполнить преобразование Лапласа полученного выражения. Для определения реакции цепи на одиночный импульс используют известное соотношение

$$F_2(p) = F_1(p)H(p),$$

где $F_1(p)$, $F_2(p)$ – изображения входного воздействия и реакции цепи соответственно; $H(p)$ – функция передачи цепи, равная $H_I(p)$ или $H_U(p)$. Для определения оригинала $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(p)]$ следует разложить $F_2(p)$ на простые дроби и определить коэффициенты разложения методом вычетов или неопределенных коэффициентов.

Анализ нелинейной пассивной цепи аналитически-численным методом

К цепи при замкнутом ключе К и исключенном управляемом источнике ($k_{y.и} = 0$, вместо ИНУН – короткое замыкание, вместо ИТУТ – разрыв) применяется процедура анализа динамики нелинейных цепей аналитически-численным методом [5].

Рассмотрим процедуру на следующем примере. Схема цепи изображена на рис. 7.2. Параметры цепи после нормировки: $u(t) = 5\delta_1(t)$; $R_2 = 4$; $L_5 = 0,2$; $C_6 = 0,2$; $R_H = 1$. Нелинейный элемент R_4 задан вольт-амперной

характеристикой $u_4 = 7,68i_4^2$. Необходимо построить область, содержащую неизвестные точные решения уравнений состояния $u_C(t)$ и $i_L(t)$, а также, используя уравнения связи, построить решение $u_H(t)$.

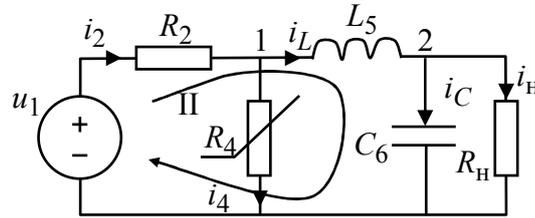


Рис. 7.2

Процедура анализа динамики нелинейной цепи аналитически-численным методом.

1. Выбираем модель, которой замещается анализируемая цепь. Цепь содержит два реактивных элемента – C и L с линейными вольт-амперными характеристиками. Нелинейная вольт-амперная характеристика резистора R_4 задана аналитически, поэтому цепь можно заместить нелинейной моделью с выделенной линейной частью.

2. Выбираем соответствующие модели функций, аппроксимирующие нелинейные характеристики элементов цепи. Нелинейная вольт-амперная характеристика резистора R_4 , заданная аналитически, $u_4 = 7,68i_4^2$, что соответствует нелинейной модели с выделенной линейной частью.

3. Описываем динамику составленной модели уравнением

$$A(D)x(t) = G(D)f(t) + H(x, f, t), \quad (7.5)$$

где D – оператор обобщенного дифференцирования по t ; D^{-1} – оператор интегрирования до t , нижний предел которого есть предначальный момент времени в каждом интервале интегрирования; $A(D)$ – квадратная матрица порядка L_x с полиномиальными элементами $a_{l,k}(D)$; $G(D)$ – матрица размером $L_x \times L_f$ с полиномиальными элементами $g_{l,k}(D)$; $x(t)$ и $f(t)$ – матрицы-столбцы координат и приложенных к модели воздействий; $H(x, f, t)$ – матрица-столбец со строками в виде сумм, каждый член которых в общем случае представляет произведение времени, нестационарных коэффициентов и интегралов до t любой кратности.

В качестве вектора $x(t)$ выбираем вектор переменных состояния $x(t) = [u_C(t) i_L(t)]^t$, при этом $L_x = 2$, $L_f = 1$. Опишем динамику модели уравнением (7.5).

Запишем уравнение Кирхгофа для 2-го узла цепи (см. рис. 7.2): $i_L - i_C - i_H = 0$. Выразим переменную i_C из этого уравнения: $i_C = i_L - i_H$.

Поскольку C -элемент включен параллельно R_H , то очевидно, что $i_H = u_C / R_H$. Заменяя i_C на $C(du_C / dt)$ и деля правую и левую части получившегося равенства на C , получим первое уравнение состояния для исследуемой цепи:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i_L}{C} - \frac{u_C}{R_H C}.$$

После подстановки численных значений R_H и C получим:

$$\frac{du_C}{dt} = 5i_L - 5u_C.$$

Для контура $R_4 L_5 C_6$ уравнение Кирхгофа $-u_4 + u_L + u_C = 0$, откуда $u_L = u_4 - u_C$ или с учетом вольт-амперной характеристики нелинейного элемента $u_L = 7,68i_4^2 - u_C$.

Из уравнения Кирхгофа для 1-го узла цепи следует, что $i_4 = i_2 - i_L$, а из уравнения Кирхгофа для контура II находим

$$i_2 = \frac{u_1 - u_L - u_C}{R_2},$$

тогда

$$i_4 = \frac{u_1 - u_L - u_C}{R_2} - i_L.$$

После подстановки значения i_4 в выражение для u_L и некоторых преобразований получим квадратное уравнение относительно u_L :

$$\frac{7,68}{R_2^2} u_L^2 - \left(\frac{15,36}{R_2^2} (u_1 - u_C - R_2 i_L) + 1 \right) u_L + \frac{7,68}{R_2^2} (u_1 - u_C - R_2 i_L)^2 - u_C = 0.$$

После подстановки численных значений параметров получим уравнение

$$u_L^2 - (12,08 - 2u_C - 8i_L)u_L + 25 + u_C^2 + 16i_L^2 - 12,08u_C - 40i_L + 8u_C i_L = 0,$$

из которого следует $u_L = 6,04 - u_C - 4i_L \pm \sqrt{11,5 - 8,33i_L}$.

Выражение для u_L должно быть справедливо при всех $t > 0$, в том числе при $t = \infty$. Из анализа установившегося режима следует, что в данном случае нужно принять знак «минус» перед радикалом, т. е. $u_L = 6,04 -$

$-u_C - 4i_L - \sqrt{11,5 - 8,33i_L}$. Из последнего выражения получаем второе уравнение состояния для нелинейной цепи: $\frac{di_L}{dt} = 30,2 - 5u_C - 20i_L - 5\sqrt{11,5 - 8,33i_L}$.

Система уравнений состояния (7.5) для нелинейной цепи в матричном виде

$$\begin{bmatrix} D+5 & -5 \\ 5 & D+20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30,2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5\sqrt{11,5 - 8,33i_L} \end{bmatrix}.$$

Уравнение связи $u_H(t) = u_C(t)$.

4. Описываем искомые точные решения системы уравнений (7.5). В курсовой работе рассматриваются пассивные нелинейные цепи, не содержащие сингулярных составляющих в уравнениях переменных состояния, поэтому искомые точные составляющие решений представлены только их регулярными составляющими:

$$u_C(t) = u_C^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{C,i} t^i / i!; \quad i_L(t) = i_L^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{L,i} t^i / i!,$$

где $R_{l,j}$ – коэффициенты ряда Тейлора с центром разложения в точке с абсциссой $t = 0^+$, $l = L, C$.

5. Используя формулу возведения ряда в степень, перестраиваем уравнение (7.5) к виду

$$A(D)x(t) = G(D)f(t) + T(t). \quad (7.6)$$

Для определения коэффициентов полинома Тейлора, возведенного в степень m , входящего в правую часть уравнения, следует использовать формулу

$$[x(t)]^m = \left[\sum_{i=0}^{\infty} C_i t^i / i! \right]^m = \sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i / i!,$$

где

$$d_0 = C_0^m; \quad d_n = \frac{(n-1)!}{C_0} \sum_{k=1}^n \frac{[k(m+1) - n] C_k d_{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

Будем искать решения системы уравнений переменных состояния в виде отрезка рядов Тейлора, ограниченного пятью членами: $u_C(t) =$

$$= \sum_{i=0}^4 R_{C,i} t^i / i!, \quad i_L(t) = \sum_{i=0}^4 R_{L,i} t^i / i!. \quad \text{Заменим подкоренное выражение отрезком}$$

ком ряда Тейлора, содержащим 5 членов и имеющим вид $\sum_{i=0}^4 \frac{K_{L,i} t^i}{i!}$. В этом

случае коэффициенты $K_{L,i}$ этого ряда равны $K_{L,0} = 11,5 - 8,33R_{L,0}$; $K_{L,1} = -8,33R_{L,1}$; $K_{L,2} = -8,33R_{L,2}$; $K_{L,3} = -8,33R_{L,3}$; $K_{L,4} = -8,33R_{L,4}$.

После такой замены и возведения отрезка ряда Тейлора, входящего в правую часть уравнения, в степень 1/2 система примет вид (7.6):

$$\begin{bmatrix} D+5 & -5 \\ 5 & D+20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30,2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \sum_{i=0}^4 \frac{T_{1,i} t^i}{i!} \end{bmatrix},$$

где

$$T_{1,0} = K_{L,0}^{0.5}; \quad T_{1,1} = \frac{K_{L,1} T_{1,0}}{2K_{L,0}}; \quad T_{1,2} = \frac{K_{L,2} T_{1,0} - K_{L,1} T_{1,1}}{2K_{L,0}};$$

$$T_{1,3} = \frac{K_{L,3} T_{1,0} - 3K_{L,1} T_{1,2}}{2K_{L,0}}; \quad T_{1,4} = \frac{K_{L,4} T_{1,0} + K_{L,3} T_{1,1} - 3K_{L,2} T_{1,2} - 5K_{L,1} T_{1,3}}{2K_{L,0}}.$$

6. Выполнив над системой (7.6) преобразование Лапласа, сформируем уравнение

$$A(p)X(p) = G(p)F(p) + T(p) + Q(p) = C(p), \quad (7.7)$$

где $A(p)$, $G(p)$ – матрицы, полученные из исходных матриц $A(D)$, $G(D)$ заменой оператора D лапласовой переменной p ; $X(p)$ и $F(p)$ – матрицы-столбцы изображений координат и воздействий; $T(p)$ – матрица-столбец, полученная из исходной матрицы $T(t)$ заменой членов $t^k / k!$ членами $1/p^{k+1}$; $Q(p)$ – матрица-столбец предначальных условий; $C(p)$ – матрица-столбец приведенной правой части уравнения

$$\begin{bmatrix} p+5 & -5 \\ 5 & p+20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_C(p) \\ I_L(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{30,2}{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \sum_{i=0}^4 \frac{T_{1,i}}{p^{i+1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_C(0^-) \\ i_L(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(p) \\ C_2(p) \end{bmatrix},$$

где $C_1(p) = u_C(0^-)$; $C_2 = i_L(0^-) + \frac{30,2}{p} - 5 \sum_{i=0}^4 \frac{T_{1,i}}{p^{i+1}}$.

7. Решение системы уравнений переменных состояния (7.7) ищется в виде $X_l(p) = \frac{\Delta_l(p)}{\Delta(p)}$, где $\Delta(p) \neq 0$, $l=1,2$. Тогда решения полученной системы имеют вид $U_C(p) = \Delta_1 / \Delta$; $I_L(p) = \Delta_2 / \Delta$, где Δ – главный определитель системы, Δ_1, Δ_2 – определители, полученные из главного определителя заменой 1-го (2-го) столбца столбцом правой части,

$$\Delta = \det A = p^2 + 25p + 125;$$

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} C_1(p) & -5 \\ C_2(p) & p+20 \end{bmatrix} = pC_1(p) + 20C_1(p) + 5C_2(p);$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} p+5 & C_1(p) \\ 5 & C_2(p) \end{bmatrix} = pC_2(p) + 5C_2(p) - 5C_1(p).$$

После соответствующих преобразований искомое решение выражается в виде отношения полиномов

$$U_C(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\sum_{i=0}^7 B_{Ci} p^i}{\sum_{i=0}^7 A_i p^i} \frac{1}{p}; \quad I_L(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\sum_{i=0}^7 B_{Li} p^i}{\sum_{i=0}^7 A_i p^i} \frac{1}{p}.$$

Коэффициенты B_{Ci} , B_{Li} , A_i имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_7 &= 1; & B_{C7} &= u_C(0-); & B_{L7} &= i_L(0-) \\ A_6 &= 25; & B_{C6} &= 20u_C(0-) + 5i_L(0-); & B_{L6} &= 30,2 + 5i_L(0-) - 5u_C(0-) - 5T_{1,0}; \\ A_5 &= 125; & B_{C5} &= 151 - 25T_{1,0}; & B_{L5} &= 151 - 25T_{1,0} - 5T_{1,1}; \\ A_4 &= 0; & B_{C4} &= -25T_{1,1}; & B_{L4} &= -25T_{1,1} - 5T_{1,2}; \\ A_3 &= 0; & B_{C3} &= -25T_{1,2}; & B_{L3} &= -25T_{1,2} - 5T_{1,3}; \\ A_2 &= 0; & B_{C2} &= -25T_{1,3}; & B_{L2} &= -25T_{1,3} - 5T_{1,4}; \\ A_1 &= 0; & B_{C1} &= -25T_{1,4}; & B_{L1} &= -25T_{1,4}. \\ A_0 &= 0; \end{aligned}$$

8. Коэффициенты $R_{l,i}$ определяют по формулам

$$R_{l,0} = \frac{B_{l,n}}{A_n}; \quad R_{l,i} = \frac{B_{l,n-i} - \sum_{k=0}^{i-1} R_{l,k} A_{n-i+k}}{A_n},$$

где $l = C, L; i = 1, 2, 3, 4$, и переводят результат в t -область.

Вычисление коэффициентов $R_{l,i}$ дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} R_{C.0} &= B_{C.7}; & R_{L.0} &= B_{L.7}; \\ R_{C.1} &= B_{C.6} - 25R_{C.0}; & R_{L.1} &= B_{L.6} - 25R_{L.0}; \\ R_{C.2} &= B_{C.5} - 125R_{C.0} - 25R_{C.1}; & R_{L.2} &= B_{L.5} - 125R_{L.0} - 25R_{L.1}; \\ R_{C.3} &= B_{C.4} - 125R_{C.1} - 25R_{C.2}; & R_{L.3} &= B_{L.4} - 125R_{L.1} - 25R_{L.2}; \\ R_{C.4} &= B_{C.3} - 125R_{C.2} - 25R_{C.3}; & R_{L.4} &= B_{L.3} - 125R_{L.2} - 25R_{L.3}. \end{aligned}$$

Таким образом получены коэффициенты в заявленных приближениях переменных состояния.

9. При $t_0 = 0+$ проверяют условия существования полученных решений. Проверка заключается в существовании среди модулей коэффициентов максимума, который должен быть расположен среди младших номеров коэффициентов. Проверка выполняется как для модулей коэффициентов, так и для модулей коэффициентов, умноженных на временной интервал τ в соответствующей степени. Так, для модулей коэффициентов $|R_{C.0}| = 0,0$; $|R_{C.1}| = 0,0$; $|R_{C.2}| = 66,22$; $|R_{C.3}| = 1248,80$; $|R_{C.4}| = 19258,60$; $|R_{L.0}| = 0,00$; $|R_{L.1}| = 13,24$; $|R_{L.2}| = 183,55$; $|R_{L.3}| = 2602,87$; $|R_{L.4}| = 40435,00$ максимум расположен среди старших номеров коэффициентов, т. е. условие не выполняется. Для $\tau = 0,1$ получится $|R_{C.0}| \tau^0 = 0,0$; $|R_{C.1}| \tau^1 = 0,0$; $|R_{C.2}| \tau^2 = 0,6622$; $|R_{C.3}| \tau^3 = 1,24880$; $|R_{C.4}| \tau^4 = 1,925860$; $|R_{L.0}| \tau^0 = 0,00$; $|R_{L.1}| \tau^1 = 1,324$; $|R_{L.2}| \tau^2 = 1,8355$; $|R_{L.3}| \tau^3 = 2,60287$; $|R_{L.4}| \tau^4 = 4,04350$, т.е. максимум также расположен среди старших номеров коэффициентов. Но для $\tau = 0,01$ имеем $|R_{C.0}| \tau^0 = 0,0$; $|R_{C.1}| \tau^1 = 0,0$; $|R_{C.2}| \tau^2 = 0,0066$; $|R_{C.3}| \tau^3 = 0,00125$; $|R_{C.4}| \tau^4 = 0,000192$; $|R_{L.0}| \tau^0 = 0,00$; $|R_{L.1}| \tau^1 = 0,1324$; $|R_{L.2}| \tau^2 = 0,01835$; $|R_{L.3}| \tau^3 = 0,00260$; $|R_{L.4}| \tau^4 = 0,00040$, т.е. максимум расположен уже среди младших номеров коэффициентов. Следовательно, при $t < 0,01$ точные решения для переменных состояния существуют, и они единственны.

10. По заданной предельной абсолютной локальной погрешности $\delta(h)$ выбирается величина шага по времени:

1. Если среди коэффициентов $|R_i|$ существует максимум $|R_k|$, то локальная погрешность может быть оценена по формуле

$$|\Delta x^+(h, I)| = |R_k| \left(e^h - \sum_{i=0}^I \frac{h^i}{i!} \right) h > 0,$$

где I – длина отрезка ряда Тейлора.

2. Если начиная с некоторого коэффициенты $R_i/i!$ убывают по модулю, то при максимальном коэффициенте $R_k/k!$ локальная погрешность может быть оценена по формуле

$$|\Delta x^+(h, I)| = \frac{|R_k| h^{i+1}}{k! (1-h)}, h \in [0; 1].$$

3. Если за счет выбора шага расчета h удастся сформировать максимум среди коэффициентов $h^i |R_i|$, то, обозначив максимальный из коэффициентов $h^k |R_k|$, получим следующую оценку погрешности:

$$|\Delta X^+(h, I)| = h^k |R_k| \left(e - \sum_{i=0}^I \frac{1}{i!} \right).$$

Выбрав в качестве h значение t , полученное в п. 9, проверяем выполнение условия п. 10 для каждого из решений. Если заданная величина предельной абсолютной локальной погрешности $\delta(h)$ не удовлетворяет значению h , то в качестве h выбирается новое значение, например, $h/10$, и снова проверяется условие п. 10. Если условие выполняется и величина h оказывается малой, т. е. $\delta(h) \gg |\Delta X^+(h, I)|$, то можно увеличить значение h .

11. Выполняется численная часть процедуры. Для каждого момента времени $t_k = t_{k-1}^+ + h$ (при $k = 1, 2, \dots$) повторяются пп. 9 и 10. Расчет производится до того момента, пока переменные состояния не примут установившегося значения.

12. По результатам выполненных расчетов построены области существования неизвестных точных решений переменных состояний, известные с точностью предельной абсолютной локальной погрешности $\delta(h)$.

Таблица 7.4

Шаг	Время	$R_{C.0}$	$R_{C.1}$	$R_{C.2}$	$R_{C.3}$	$R_{C.4}$	$R_{L.0}$	$R_{L.1}$	$R_{L.2}$	$R_{L.3}$	$R_{L.4}$
0,01	0,01	0,0000	0,00	66,22	-1248,80	19258,60	0,00	13,24	-183,55	2602,87	-40435,00
0,02	0,03	0,0056	0,55	55,33	-1079,70	16636,20	0,12	11,62	-160,61	2247,53	-34613,00
0,02	0,05	0,0330	1,32	38,78	-819,94	12629,10	0,30	9,08	-125,21	1705,88	-25787,00
0,03	0,08	0,0700	1,84	26,21	-622,00	9613,15	0,44	7,08	-98,19	1300,63	-19232,00
0,03	0,11	0,1400	2,21	13,82	-420,79	6577,78	0,58	4,97	-70,34	894,76	-12703,00
0,05	0,16	0,2100	2,34	5,51	-282,07	4532,95	0,68	3,45	-50,90	624,52	-8396,00
0,08	0,24	0,3400	2,08	-0,19	-162,09	2742,49	0,75	2,04	-32,60	386,41	-4698,30
0,08	0,32	0,5300	0,90	3,03	-122,23	1807,22	0,71	1,51	-21,41	239,21	-2651,80
0,08	0,40	0,6300	0,37	3,22	-82,63	1111,63	0,71	1,02	-13,31	139,68	-1402,10
0,08	0,48	0,6900	0,16	2,37	-51,02	645,29	0,72	0,63	-7,84	78,04	-709,07
0,08	0,56	0,7200	0,08	1,45	-29,33	358,83	0,73	0,37	-4,42	42,44	-354,72
0,08	0,64	0,7300	0,04	0,79	-16,02	193,96	0,74	0,20	-2,41	22,78	-180,23
0,08	0,72	0,7400	0,03	0,40	-8,45	103,02	0,74	0,11	-1,29	12,15	-93,73

Таблица 7.5

Время	$u_C(t)$	$i_L(t)$	$ \Delta U_C^+ \cdot 10^5$	$ \Delta i_L^+ \cdot 10^5$	u_C^+	u_C^-	i_L^+	i_L^-
0,01	0,0056	0,12	6,6	130,0	0,005631	0,005500	0,1175	0,11490
0,03	0,0330	0,30	22,0	230,0	0,033160	0,032416	0,30016	0,29347
0,05	0,0700	0,44	26,0	180,0	0,071006	0,069329	0,44222	0,43332
0,08	0,1400	0,58	55,0	210,0	0,141570	0,138230	0,58669	0,57605
0,11	0,2100	0,68	66,0	150,0	0,215110	0,209950	0,68636	0,67578
0,16	0,3400	0,75	120,0	170,0	0,340130	0,332940	0,75692	0,74644
0,24	0,5300	0,71	170,0	210,0	0,533900	0,527710	0,71929	0,70356
0,32	0,6300	0,71	74,0	140,0	0,635890	0,632110	0,71751	0,70054
0,40	0,6900	0,72	46,0	85,0	0,689090	0,686820	0,72688	0,71216
0,48	0,7200	0,73	26,0	50,0	0,716940	0,715410	0,73634	0,72544
0,56	0,7300	0,74	15,0	29,0	0,731740	0,730590	0,74273	0,73554
0,64	0,7400	0,74	8,2	16,0	0,739740	0,738850	0,74630	0,74193
0,72	0,7400	0,75	4,3	8,4	0,744121	0,737990	0,74808	0,74556

Область существования неизвестных точных решений

$$X_l^+(t; 5) - |\Delta X_l^+(t; 5)| < X_l^+(t) < X_l^+(t; 5) + |\Delta X_l^+(t; 5)|,$$

где $l = C, L; t = [t_0; T]$.

Уравнение связи $u_H(t) = u_C(t)$, поэтому решение $u_H(t)$ не строилось.

Результаты расчетов при $\delta(h) = 3 \cdot 10^{-3}$ представлены в табл. 7.4 и 7.5.

ТЕМА 8. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ

Общие указания

Целью курсового расчета является освоение студентами основных методов анализа линейных электрических цепей. В процессе самостоятельной работы студенты исследуют искажения сигналов при прохождении их через цепь методом переменных состояния, операторным методом и методами спектрального и гармонического анализа.

Все расчеты ориентированы на использование таких программных средств как Mathcad [6] и Multisim в информационно-вычислительном центре университета и центре компьютерных технологий ЦКТЭ кафедры ТОЭ.

Приобретение навыков работы в этих программных средах, несомненно, избавит студентов от рутинной работы в расчетах и будет способствовать в дальнейшем лучшему усвоению учебных материалов и по другим дисциплинам в процессе обучения в университете.

Состав методических указаний

Методические указания состоят из двух частей:

- Индивидуального задания по вариантам списка студентов учебной группы с примером расчета цепи и приложения.
- В приложении даны:
 1. Электронная версия расчетов в среде Mathcad.
 2. Электронная версия моделирования вариантов индивидуального задания в программе Multisim.

8.1. Задание на курсовой расчет

Импульс прямоугольной формы $f_1(t)$ (см. рис. 8.1, *a* или *б*) подается на вход цепи (рис. 8.2, 8.3, 8.4, 8.5). Требуется определить реакцию $f_2(t)$ на выходе цепи.

Варианты задания представлены в таблице.

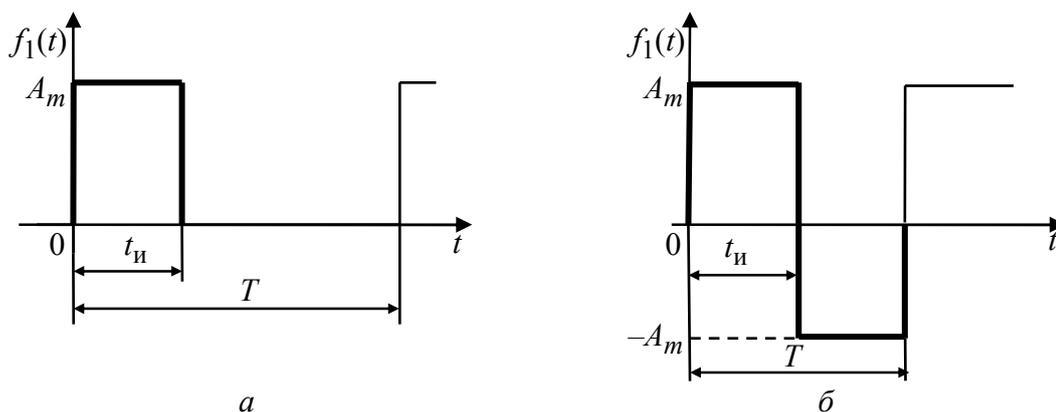


Рис. 8.1

Таблица

Варианты задания по списку группы	Входной сигнал	Параметры входного сигнала	Схема цепи в соответствии с № варианта
В связи с особенностями ПО Multisim – не принимать во внимание нумерацию элементов V, I, R, L, C на схемах цепи, обозначив их без индексов			
1.....6	Рис. 8.1, а	$U_m = 1 \text{ V}, I_m = 1 \text{ A}, t_{и} = 0.5 \text{ мС}, T = 2.5 \text{ мС}.$	VARIANT N-1 (рис. 8.2)
7.....12	Рис. 8.1, б	$U_m = 1 \text{ V}, I_m = 1 \text{ A}, t_{и} = 0.5 \text{ мС}, T = 1 \text{ мС}$	VARIANT N-2 (рис. 8.3)
13.....18	Рис. 8.1, а	$U_m = 10 \text{ V}, I_m = 0.5 \text{ A}, t_{и} = 0.5 \text{ мС}, T = 1 \text{ мС}$	VARIANT N-3 (рис. 8.4)
19.....24	Рис. 8.1, б	$U_m = 10 \text{ V}, I_m = 0.5 \text{ A}, t_{и} = 1 \text{ мС}, T = 2 \text{ мС}$	VARIANT N-4 (рис. 8.5)

Необходимо выполнить следующие расчеты:

1. Численный расчет методом переменных состояния.

1.1. Записать в аналитическом виде временную функцию входного воздействия $f_1(t)$ в форме одиночного импульса.

1.2. Составить систему дифференциальных уравнений состояния цепи и проверить ее по величинам вынужденных составляющих.

1.3. Рассчитать реакцию $f_2(t)$ на выходе цепи численным методом Рунге-Кутты. См. электронную версию «Расчет в Маткаде».

2. Операторный метод

2.1. Определить функцию передачи цепи $H(S)$ и проверить ее для $S = 0$ и $S = \infty$.

2.2. Записать изображение входного воздействия.

2.3. Определить реакцию на выходе цепи, используя преобразование Лапласа, и построить на одном рисунке графики $f_1(t)$ и $f_2(t)$. См. «Расчет в Маткаде».

3. Спектральный анализ

3.1. Построить частотные характеристики цепи $H(j\omega)$. См. «Расчет в Маткаде».

3.2. Записать амплитудный спектр $A(\omega)$ входного сигнала. Построить его на одном графике с АЧХ цепи $|H(j\omega)|$ и оценить степень искажения формы реакции. См. «Расчет в Маткаде».

4. Гармонический анализ цепи

4.1. Для периодической последовательности импульсов построить дискретные амплитудный (АДС) и фазовый (ФДС) спектры входного воздействия. Записать ряд Фурье для воздействия $f_1(t)$ и построить график его аппроксимации рядом Фурье. См. «Расчет в Маткаде».

4.2. Построить дискретные амплитудный (АДС) и фазовый (ФДС) спектры реакции на выходе цепи. Записать ряд Фурье и построить график $f_2(t)$. См. «Расчет в Маткаде».

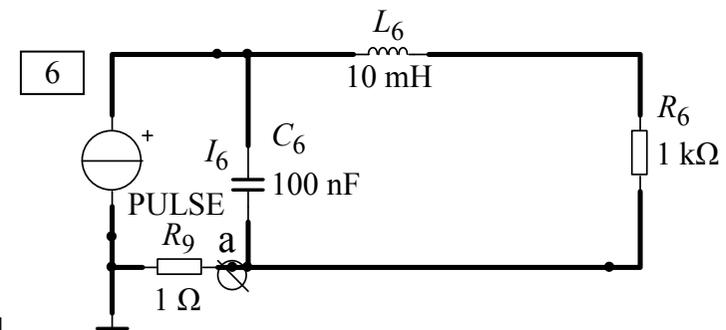
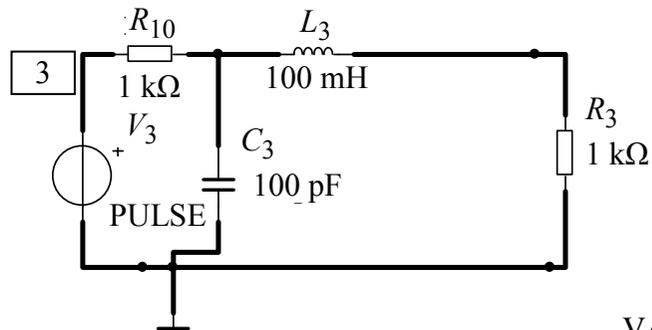
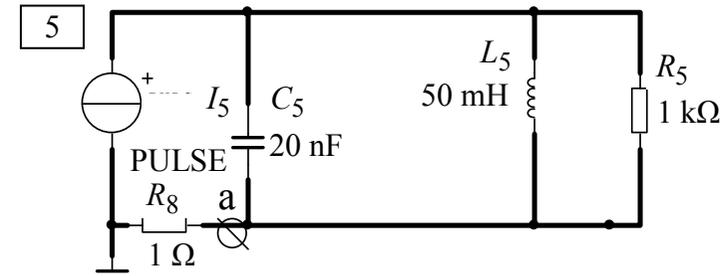
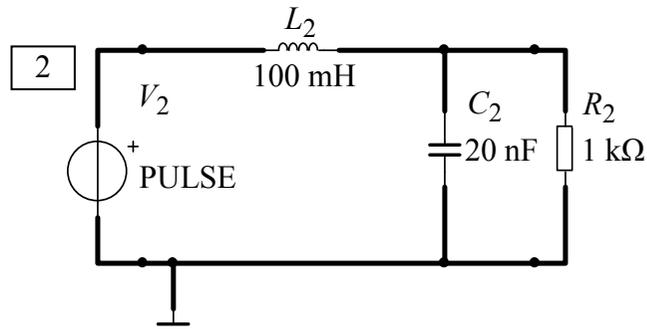
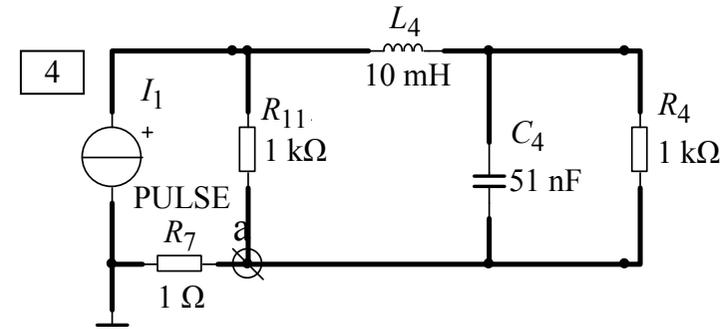
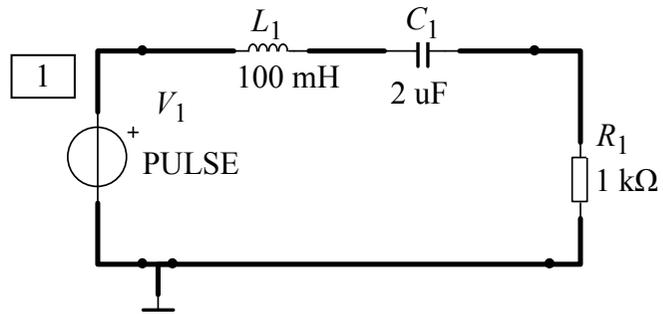
5. Моделирование переходного процесса в цепи

Выполняется с использованием электронной версии «Электрические цепи». Инструкция по моделированию приведена в файле «Моделирование цепи», как показано на рис. 8.6.

5.1. В программе Multisim-10 в схеме моделирования (рис. 8.6) заменить цепь примера цепью заданного варианта, скопировав ее из папки «Электрические цепи», открыв в строке состояния соответствующий Variant.

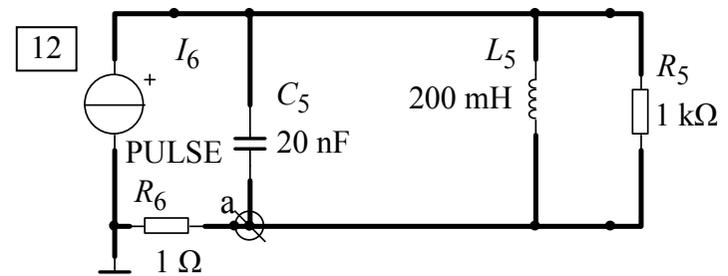
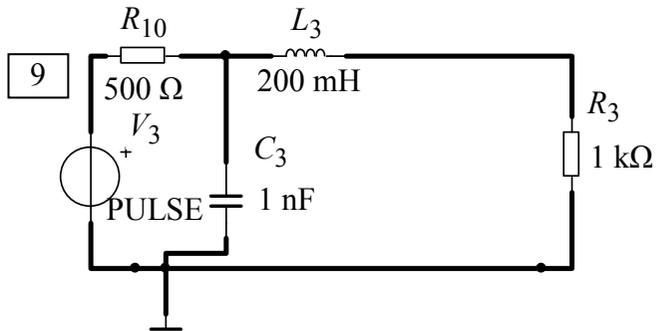
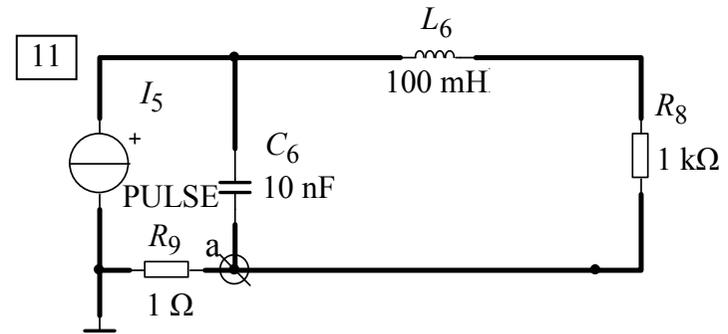
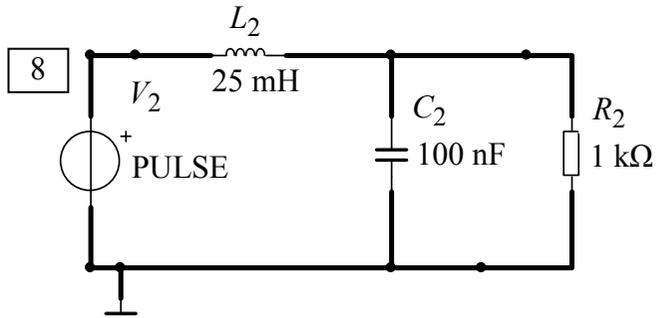
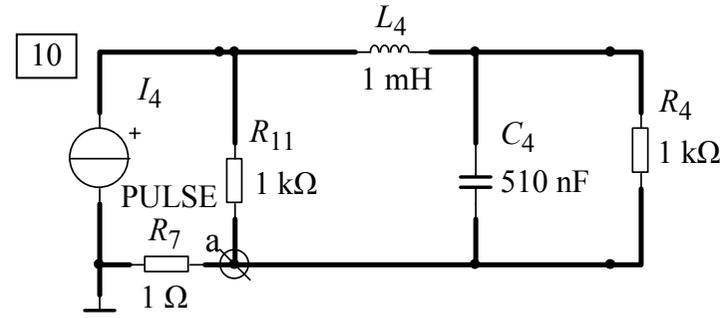
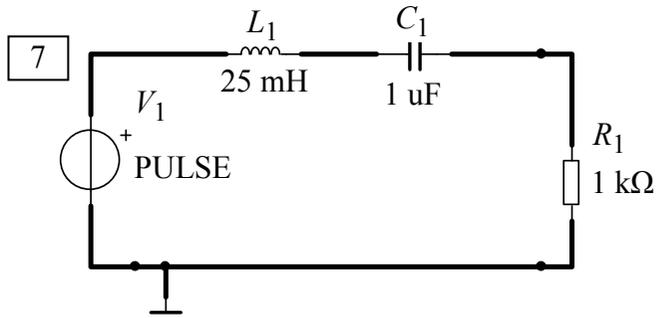
5.2. Подключить к цепи измерительные приборы ключом S1, как показано на рис. 8.6.

5.3. Снять осциллограмму и спектры входного воздействия и реакции, а также частотные характеристики АЧХ и ФЧХ цепи.



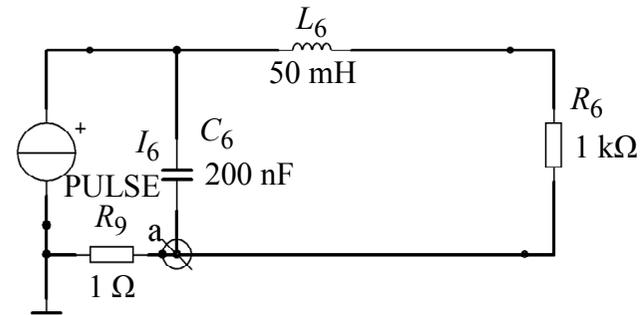
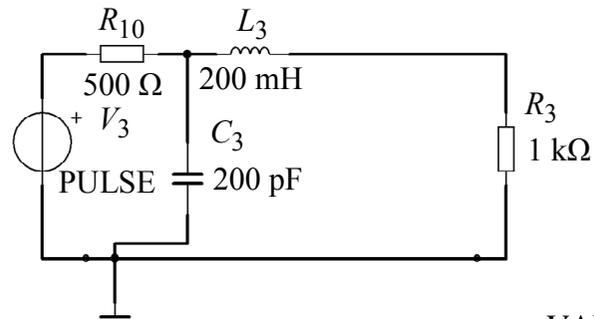
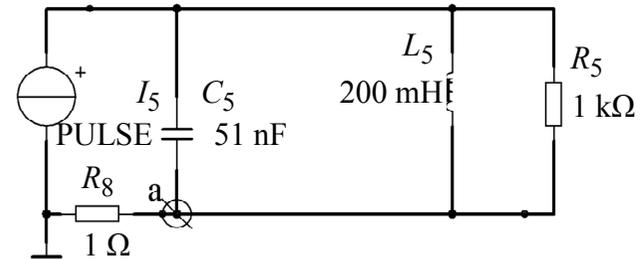
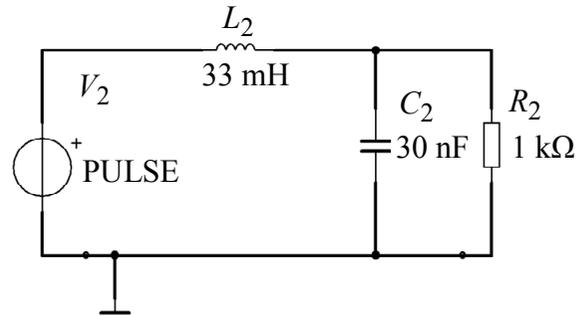
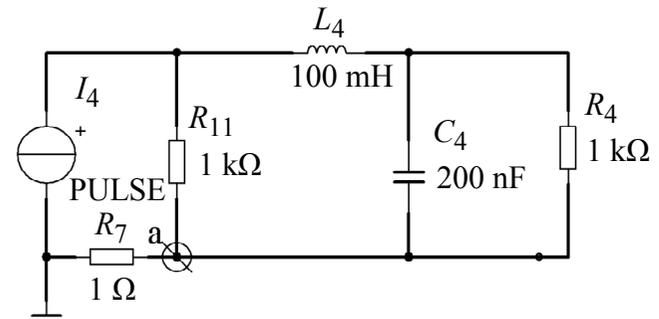
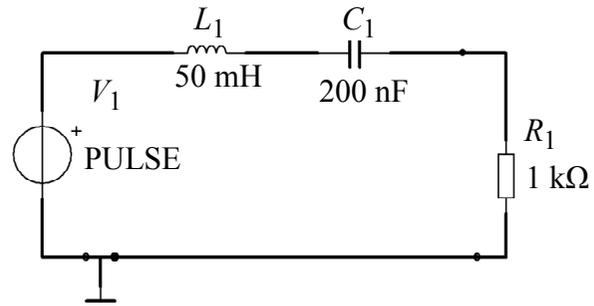
VARIANT N-1

Рис. 8.2. Схемы цепей для варианта № 1



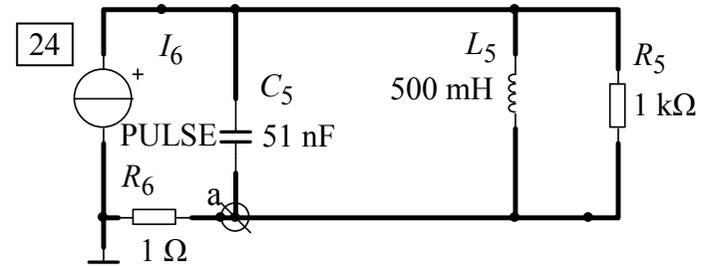
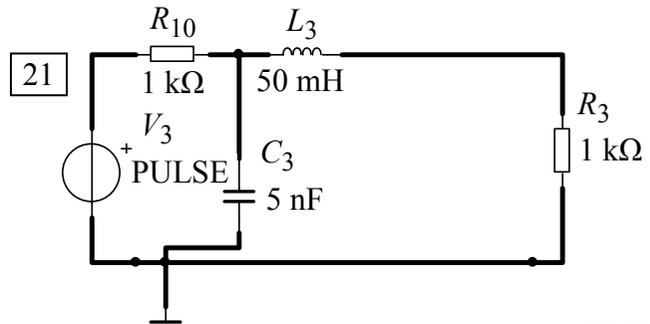
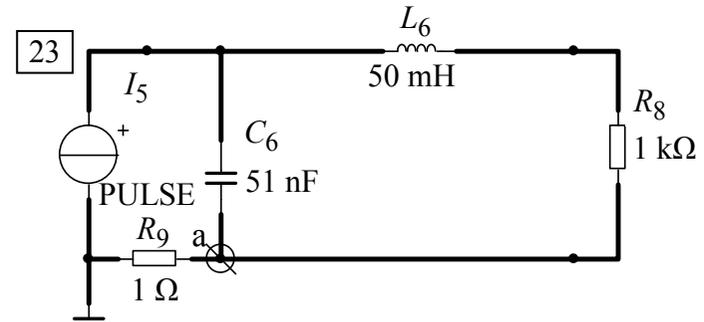
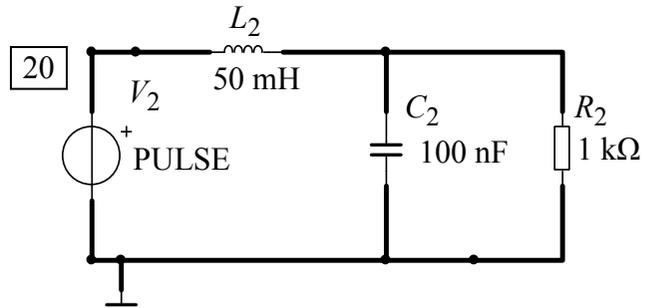
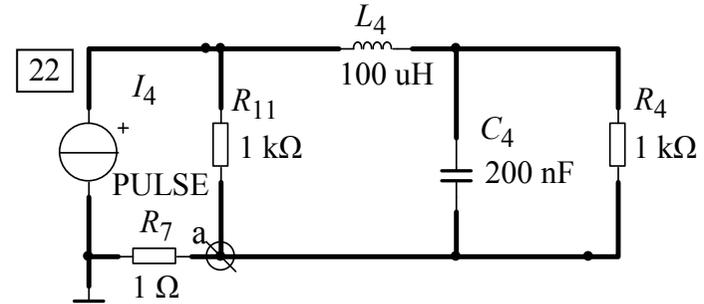
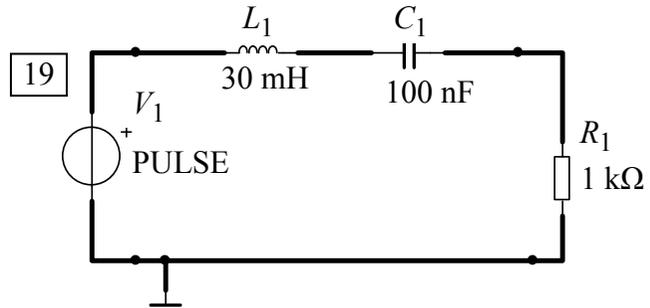
VARIANT N-2

Рис. 8.3. Схемы цепей для варианта № 2



VARIANT N-3

Рис. 8.4. Схемы цепей для варианта № 3



VARIANT N-4

Рис. 8.5. Схемы цепей для варианта № 4

Схема моделирования цепи - Multisim - [Схема моделирования цепи]

File Edit View Insert MCU Place Format Simulate Transfer Tools Reports Options Window Help

Circuit Description Box

Для моделирования необходимо:

- 1) Отключить схему примера переключателем S1. Скопировать цепь ЗАДАННОГО варианта, открыв свой вариант внизу окна (var1, var2, var3, var4).
- 3) Вставить копию рядом с цепью примера и подключить её к контактам переключателя S1. (Для цепей с источником тока входной контакт подключить к клемме "а". Включить активацию цепи.
- 4) Снять АЧХ и ФЧХ, открыв Bode Plotter XBP1, а также осциллограмму входного и выходного сигналов по осциллографу XSC1. (Для цепей с источником тока ШКАЛЫ каналов А и В установить соответственно 500mV/Div. и 500V/Div.)
- 5) Переключателем S2 подключить Spectrum Analyzer-XSA1 на вход цепи. Открыть его и на его лицевой панели, в разделе Амплитуда в режиме Lin по шкале V/Div, установить такие значения, при которых Амплитудный Дискретный спектр(АДС) будет виден в пределах экрана.

Кнопкой Stop остановить показания прибора и в режиме Установки(Frequency) задать Диапазон(Span), Начало(Start), Центр(Center) и Границу(End) частоты. Нажать кнопку **ВВОД(Enter)** на панели прибора. Задать Разрешение 39 Гц и запустить Анализатор кнопкой Start. На экране постепенно установятся 3-5 полос дискретного спектра.

Установив курсор мыши на Измерительном курсоре экрана прибора, правой кнопкой мыши задать ПЕРЕЙТИ к СЛЕДУЮЩЕМУ MAX - Y и записать значения частот и амплитуды ГАРМОНИК АДС входного сигнала.

- 6) Аналогично снять АДС реакции, переключив S2 на выход цепи.
- 7) Остановить активацию цепи. Закрыть окно программы без сохранения результатов моделирования!

Fig. 7

var2(x2) var4(x4) var1(x1) var3(x3) Схема моделирования цепи

Bode Plotter

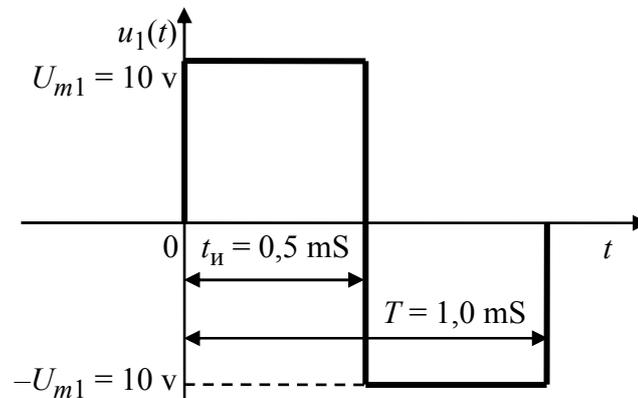
Рис. 8.6

Следует использовать имеющееся на кафедре ТОЭ приложение, которое выполнено в электронном виде и загружено в компьютеры ЦКТЭ кафедры ТОЭ. Приложение содержит файлы:

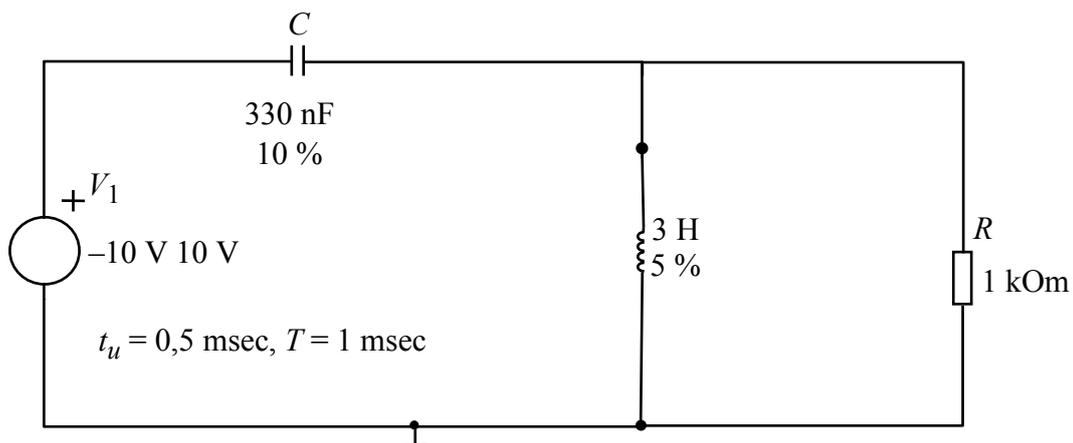
1. Титульный лист к отчету.
2. «Расчет в Маткаде».
3. «Электрические цепи».

8.2. Пример расчета

На входе цепи действует источник напряжения $u_1(t)$ заданной формы (рис. 8.7, а). Требуется определить форму напряжения $u_R(t)$ на выходе цепи (рис 9.7, б).



а



б

Рис. 8.7

8.2.1. Численный расчет методом переменных состояния

- 1) Определение функции входного воздействия

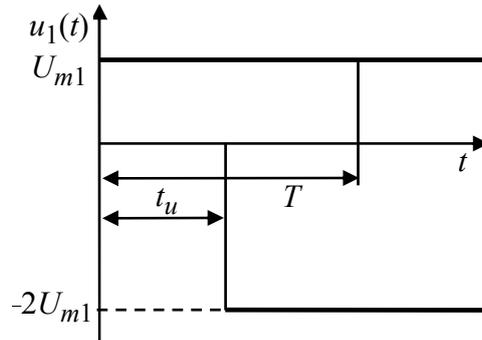


Рис. 8.8

Воздействие, изображенное на рис. 8.7, а, представим в виде (см. рис. 8.8):

$$u_1(t) = U_{m1}\delta_1(t) - 2U_{m1}\delta_1(t - t_u) + U_{m1}\delta_1(t - T).$$

2) Составление системы дифференциальных уравнений

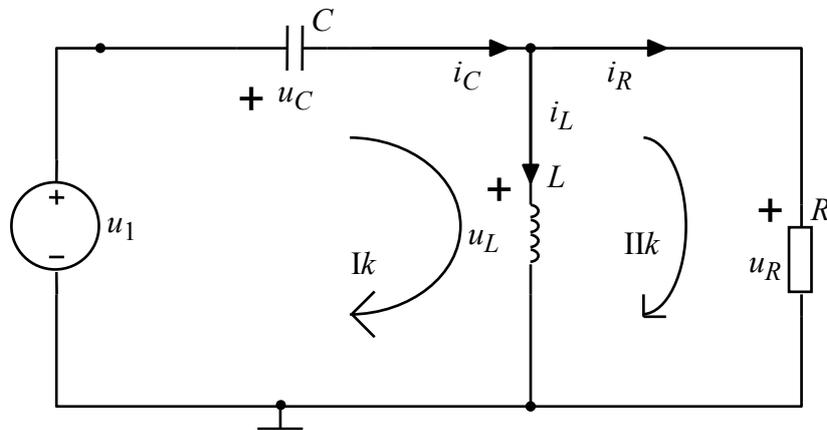


Рис. 8.9

Система уравнений Кирхгофа

Дополнительные уравнения

$$i_C - i_L - i_R = 0$$

$$u_L = u_R \quad i_R = u_L / R$$

$$u_C + u_L - u_1(t) = 0$$

$$u_R - u_L = 0$$

Из полученной системы уравнений выразим i_C и u_L

$$i_C = i_L + u_L / R, \quad u_L = u_1(t) - u_C$$

и приведем их к виду

$$\begin{aligned} u_L &= a_{11}i_L + a_{12}u_C + b_1, & i_C &= a_{21}i_L + a_{22}u_C + b_2, \\ u_L &= 0 - u_C + u_1(t), & i_C &= i_L - u_C / R + u_1(t) / R. \end{aligned}$$

Запишем систему уравнений состояния, используя ВАХ L- и C-элементов

$$i'_L(t) = 0 - u_C(t) / L + u_1(t) / L,$$

$$u'_C(t) = i_L(t)/C - u_C(t)/RC + u_1(t)/RC.$$

Для проверки полученной системы уравнений определим значения (при $t \rightarrow \infty$) вынужденных составляющих $u_{C\text{вын}} = u_1(\infty)$, $i_{L\text{вын}} = 0$ из расчета эквивалентной цепи при замене $C = XX$, $L = K3$ и подставим в уравнения, приравняв нулю производные $i'_L(\infty) = 0$ и $u'_C(\infty) = 0$. Полученное тождество

$$0 = 0 - u_1(\infty)/L + u_1(\infty)/L; 0 = 0/C - u_1(\infty)/RC + u_1(\infty)/RC$$

означает правильность выполненных расчетов.

3) Расчет переходного процесса численным методом Рунге-Кутты по системе уравнений переменных состояния и процедуре **rkfixed** с фиксированной запятой

Для расчета реакции цепи введем в системе Mathcad следующие команды (здесь и далее команды системы Mathcad выделены жирным шрифтом):

$$\delta 1(t) := \Phi(t); \text{Um1} := 10; \text{tu} := 0.5 \cdot 10^{-3}; \text{T} := 1 \cdot 10^{-3};$$

$$\mathbf{u1}(t) := \text{Um1} \cdot \delta 1(t) - 2\text{Um1} \cdot \delta 1(t - \text{tu}) + \text{Um1} \cdot \delta 1(t - \text{T});$$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}(t) := \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{u1}(t)}{L} \\ \frac{\mathbf{u1}(t)}{RC} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{d}(t, \mathbf{x}) := \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t); \quad \mathbf{X} := \text{rkfixed}(\mathbf{x}, t_0, t_{\text{end}}, \mathbf{N}, \mathbf{d}).$$

Входные величины в процедуру **rkfixed**:

$$t := \mathbf{X}^{<0>}; \quad i_L := \mathbf{X}^{<1>}; \quad u_C := \mathbf{X}^{<2>}.$$

Реакция на выходе цепи

$$u_R := u_1(t) - u_C.$$

Графики воздействия и реакции цепи, полученные в системе Mathcad, приведены на рис. 8.10.

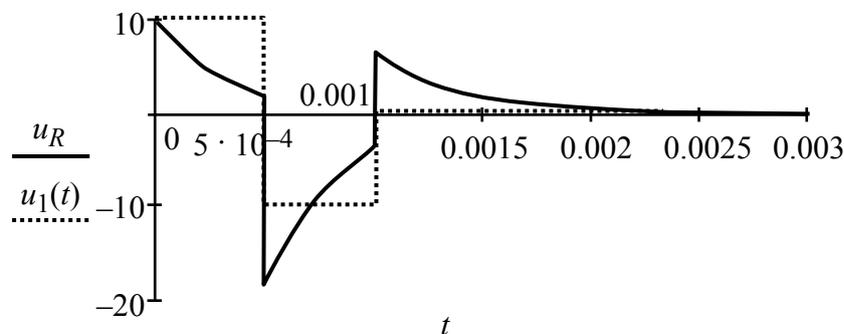


Рис. 8.10

8.2.2. Операторный метод расчета

1) Определение функции передачи цепи

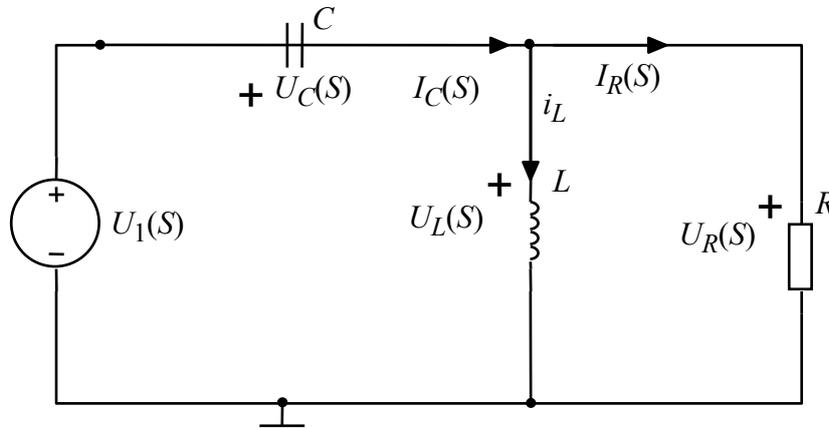


Рис. 8.11

Метод пропорциональных величин:

$$I_R(S) = \frac{U_R(S)}{R}, U_L(S) = U_R(S), I_L(S) = \frac{U_R(S)}{Z_L(S)},$$

$$I_C(S) = I_R(S) + I_L(S) = \frac{U_R(S)}{R} + \frac{U_R(S)}{Z_L(S)},$$

$$U_C(S) = I_C(S)Z_C(S) = Z_C(S)U_R(S)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L(S)}\right),$$

$$U_1(S) = U_C(S) + U_R(S).$$

После подстановки в это выражение полученных величин определим функцию передачи цепи по напряжению

$$H_u(S) = \frac{1}{\left(\left(Z_C(S)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L(S)}\right)\right) + 1\right)} = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{SC}\right)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{SL}\right) + 1\right)}.$$

Проверку полученной функция передачи выполним, подставив в нее $S = 0$, когда $H_u(0) = 0$ и $S = \infty$, когда $H_u(\infty) = 1$, что соответствует расчету эквивалентной цепи при $Z_C(0) = XX$, $Z_L(0) = K3$ и $Z_C(\infty) = K3$, $Z_L(\infty) = XX$.

2) Определение изображения одиночного входного воздействия

$$u_1(t) = 10 \cdot \delta_1(t) - 20 \cdot \delta_1(t - 0.5 \cdot 10^{-3}) + 10 \cdot \delta_1(t - 10^{-3}).$$

График входного воздействия, полученный в системе Mathcad, приведен на рис. 8.12.

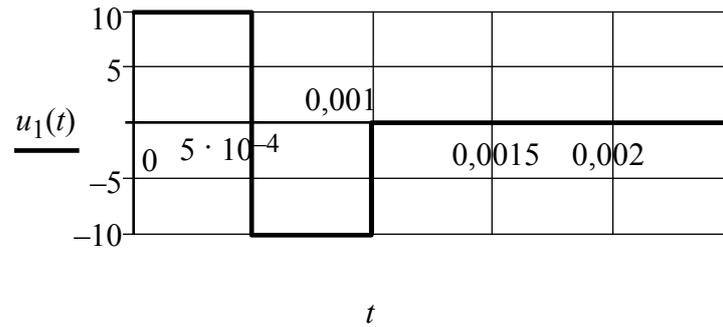


Рис. 8.12

Изображение входного воздействия

$$U_1(S) = \frac{U_{m1}}{S} - \frac{2U_{m1}}{S} e^{-St_u} + \frac{U_{m1}}{S} e^{-ST} = \frac{U_{m1}}{S} (1 - 2e^{-St_u} + e^{-ST}).$$

Численное значение функции передачи

$$H_u(S) = \frac{S^2}{S^2 + \frac{S}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{S^2}{S^2 + 3 \cdot 10^3 S + 10^6}.$$

Корни знаменателя

$$S_{1,2} = -1,5 \cdot 10^3 \pm \sqrt{(1,5 \cdot 10^3)^2 - 10^6}.$$

3) Расчет реакции операторным методом

Задание условий для вычисления реакции цепи в Mathcad:

$$j := \sqrt{-1}; \quad tu := 0.5 \cdot 10^{-3}; \quad T := 10^{-3}; \quad Um1 := 10;$$

$$Hu(S) = \frac{S^2}{S^2 + 3 * 10^3 * S + 10^6}$$

Корни знаменателя функции передачи

$$S1 := -382, \quad S2 := -2.618 \cdot 10^3.$$

Изображение несмещенной составляющей воздействия

$$U11(S) := \frac{Um1}{S}.$$

Изображение несмещенной составляющей реакции на это воздействие

$$U21(S) := U11(S) * Hu(S).$$

Решение несмещенной составляющей временной функции реакции может быть найдено по теореме разложения в следующем виде:

$$U_{21}(S) = \frac{U_{m1}(S) \cdot S}{S^2 + 3 \cdot 10^3 S + 10^6} \xrightarrow{\cdot} A_1 \cdot e^{S_1 t} + A_2 \cdot e^{S_2 t}$$

или по обратному преобразованию Лапласа

$$u_{21}(t) := \frac{10 \cdot S}{S^2 + 3 \cdot 10^3 S + 10^6} \Big|_{\text{invlaplace}, S}^{\text{float}, 3} \rightarrow -1.71 \exp(-382t) + 11.7 \exp(-2.62 \cdot 10^4 t)$$

Задание масштаба и диапазона времени

$$t := 0, 0.000001..0.003$$

Задание графиков входного воздействия и реакции цепи

$$u_1(t) := U_{m1} \cdot \delta_1(t) - 2U_{m1} \cdot \delta_1(t - t_u) + U_{m1} \cdot \delta_1(t - T);$$

$$u_R(t) := u_{21}(t) \cdot \delta_1(t) - 2 \cdot u_{21}(t - t_u) \cdot \delta_1(t - t_u) + u_{21}(t - T) \cdot \delta_1(t - T).$$

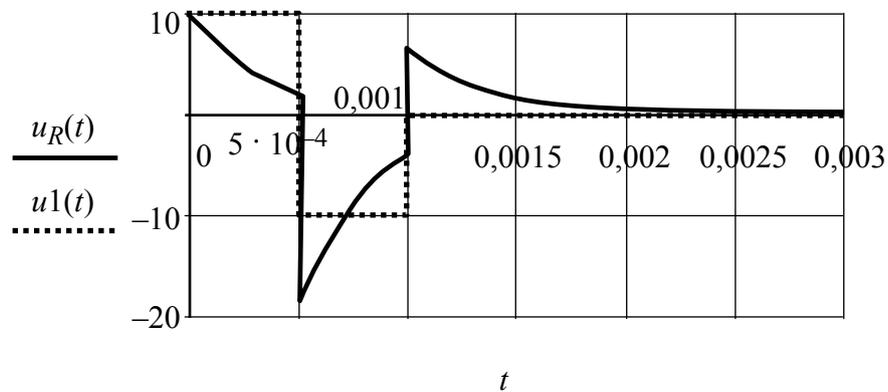


Рис. 8.13

Графики воздействия и реакции цепи, полученные в системе Mathcad, приведены на рис. 8.13.

8.2.3. Спектральный анализ

1) Построение частотных характеристик цепи

$$H_u(j\omega) = H_u(S) \Big|_{S=j\omega}$$

Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) – обобщенная ЧХ

$$H_u(j\omega) = \left(\frac{S^2}{S^2 + 3 \cdot 10^3 S + 10^6} \right) \Big|_{S=j\omega} = \frac{(j\omega)^2}{(10^6 - \omega^2) + j(3 \cdot 10^3)}$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$H_u(\omega) = \sqrt{\frac{(\omega)^2}{(10^6 - \omega^2)^2 + (3 \cdot 10^3)^2}}$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = 180^0 - \begin{cases} \arctg\left(\frac{3 \cdot 10^3 \omega}{10^6 - \omega^2}\right), \omega \leq 10^3, \\ \left[\pi + \arctg\left(\frac{3 \cdot 10^3 \omega}{10^6 - \omega^2}\right) \right], \omega > 10^3. \end{cases}$$

Данные для построения частотных характеристик

$$j := \sqrt{-1} \quad \omega := 0, 0.1..10000;$$

$$Hu(S) := \frac{S^2}{S^2 + 3 \cdot 10^3 \cdot S + 10^6}.$$

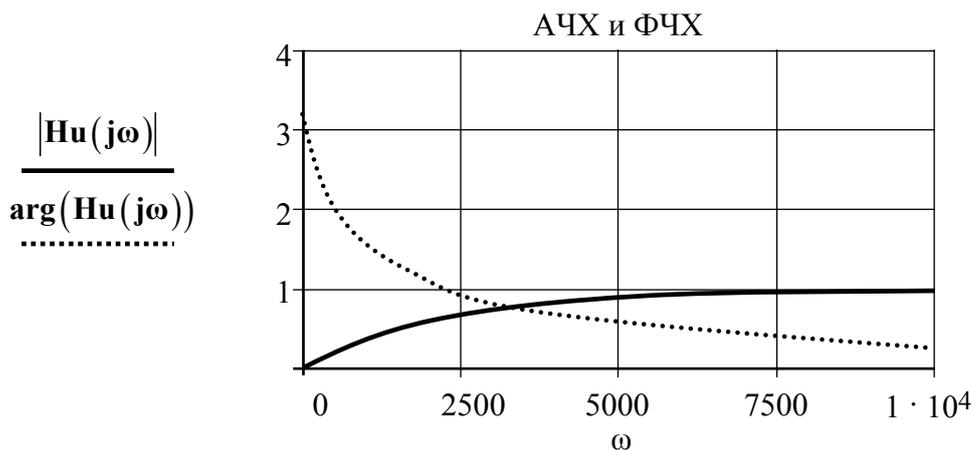
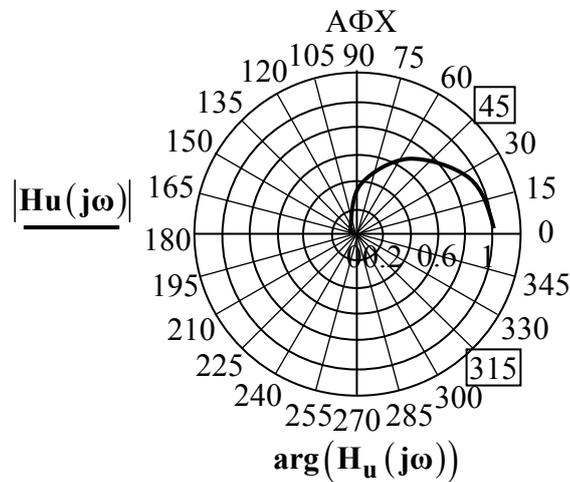


Рис. 8.14

Графики частотных характеристик, полученные в системе Mathcad, приведены на рис. 8.14.

2) Оценка искажения формы входного сигнала цепью

Преобразование Фурье (спектр) воздействия может быть получено по его изображению

$$U_{m1}(j\omega) = U_{m1}(S)|_{S=j\omega} = \frac{4}{\omega} U_{m1} \sin^2\left(\frac{\omega t_{\text{и}}}{2}\right) e^{j(90-\omega t_{\text{и}})}$$

Амплитудный спектр входного воздействия

$$U_{m1}(\omega) = \frac{4}{\omega} U_{m1} \sin^2\left(\frac{\omega t_{\text{и}}}{2}\right)$$

Данные для построения графиков

$$j := \sqrt{-1}$$

$$Hu(S) := \frac{S^2}{S^2 + 3 \cdot 10^3 \cdot S + 10^6}; \quad Um1(S) := \frac{Um1(1 - 2 \cdot e^{-St_{\text{и}}} + e^{-ST})}{S}$$

Оценка искажений по критерию первого лепестка:

$$K_{\text{иск}} = \left(1 - \frac{12848 - 2820}{12848}\right) \cdot 100\% \approx 22\%$$

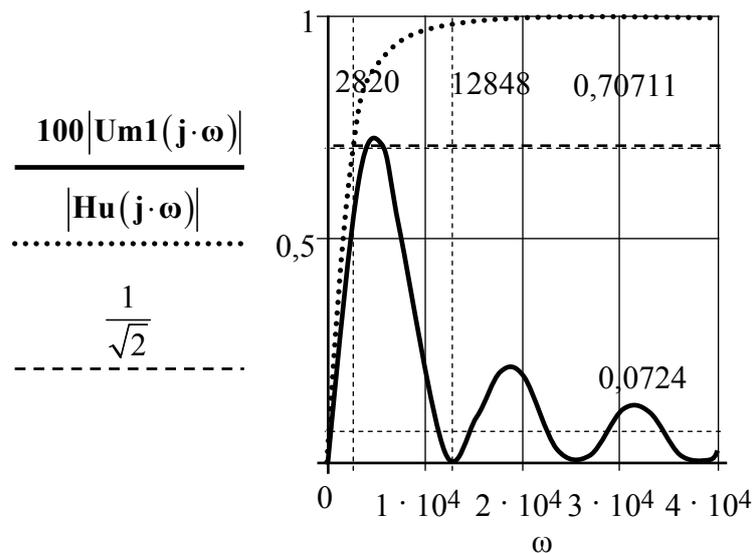


Рис. 8.15

Изображения амплитудного спектра воздействия и АЧХ цепи, полученные в системе Mathcad, приведены на рис. 8.15.

8.2.4. Гармонический анализ при периодическом воздействии

Периодические сигналы сложной формы раскладываются в ряд Фурье в виде гармонических составляющих. Комплексные амплитуды их могут быть найдены по изображению одиночного импульса

$$U_{m1}(jk\omega_1) = \frac{2U_{m1}(S)}{T} \Big|_{S=jk\omega_1}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

1) Разложение входного воздействия на составляющие.
Дискретный спектр воздействия

$$U_{m1}(jk\omega_1) = \frac{4U_{m1} \sin^2\left(k \frac{\omega_1 t_u}{2}\right)}{k\pi} e^{j(90 - k\omega_1 t_u)}$$

Данные для построения спектральных характеристик воздействия

$$j = \sqrt{-1}, U_{m1} := 10, t_u := 0.5 \cdot 10^{-3}, T := 10^{-3}, \omega_1 := \frac{2\pi}{T};$$

$$U_{m1}(S) := \frac{2 * U_{m1}(1 - 2 * e^{-St_u} + e^{-ST})}{S * T}$$

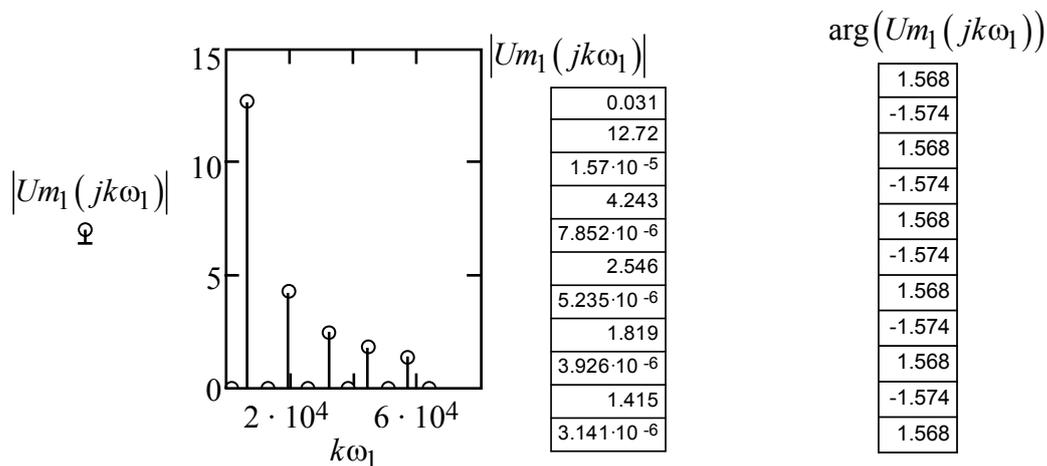


Рис. 8.16

Полученные в системе Mathcad спектральные характеристики воздействия приведены на рис. 8.16.

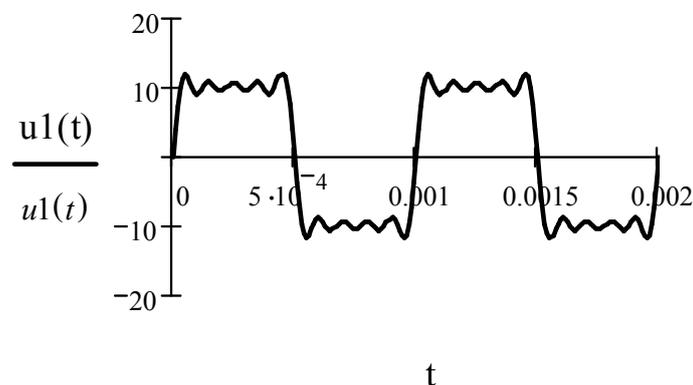


Рис. 8.17

Ряд Фурье входного сигнала

$$u_1(t) := 12.72 \cdot \cos(\omega_1 t - 1.574) + 4.23 \cdot \cos(3\omega_1 t - 1.574) + 2.55 \cdot \cos(5\omega_1 t - 1.574) + 1.82 \cdot \cos(7\omega_1 t - 1.574) + 1.41 \cdot \cos(9\omega_1 t - 1.574).$$

График аппроксимации входного периодического сигнала, полученный в системе Mathcad, показан на рис. 8.17.

2) Расчет ряда Фурье периодической реакции

Дискретный спектр реакции

$$Um_R(jk\omega_1) = Um_1(jk\omega_1) \cdot H_u(jk\omega_1)$$

Данные для построения спектральных характеристик реакции в системе Mathcad:

$$Hu(S) := \frac{S^2}{S^2 + 3 \cdot 10^3 \cdot S + 10^6}; \quad Um_R(S) := Um_1(S) \cdot Hu(S)$$

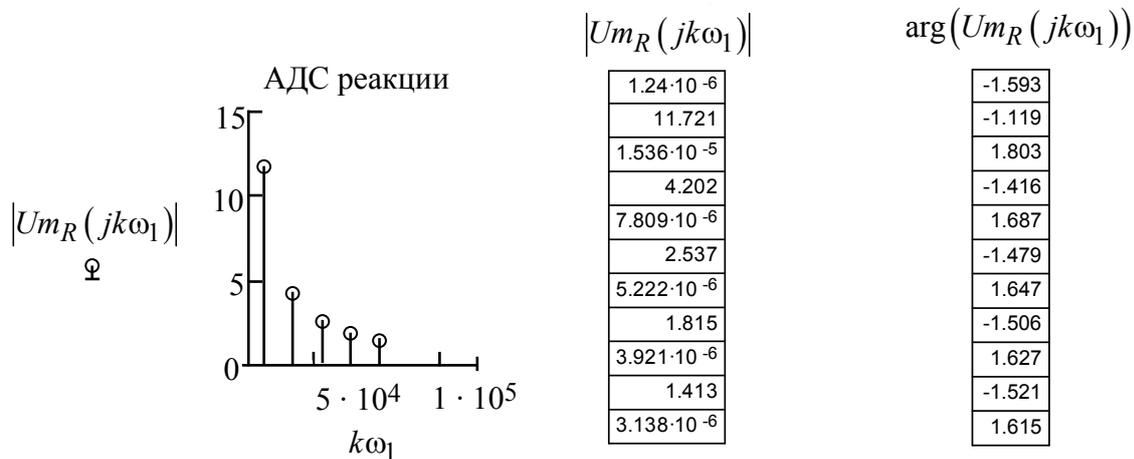


Рис. 8.18

Спектральные характеристики периодической реакции, полученные в системе Mathcad, приведены на рис. 8.18.

Ряд Фурье реакции

$$u_R(t) := 11.72 \cdot \cos(\omega_1 t - 1.12) + 4.2 \cdot \cos(3\omega_1 t - 1.416) + 2.54 \cdot \cos(5\omega_1 t - 1.48) + 1.82 \cdot \cos(7\omega_1 t - 1.5) + 1.4 \cdot \cos(9\omega_1 t - 1.52).$$

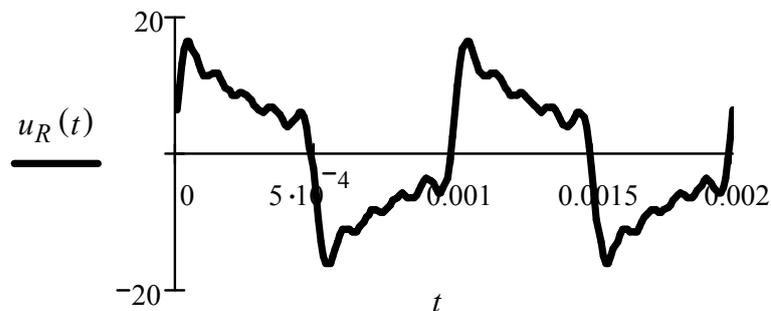


Рис. 8.19

График аппроксимации выходного периодического сигнала, полученный в системе Mathcad, приведен на рис. 8.19.

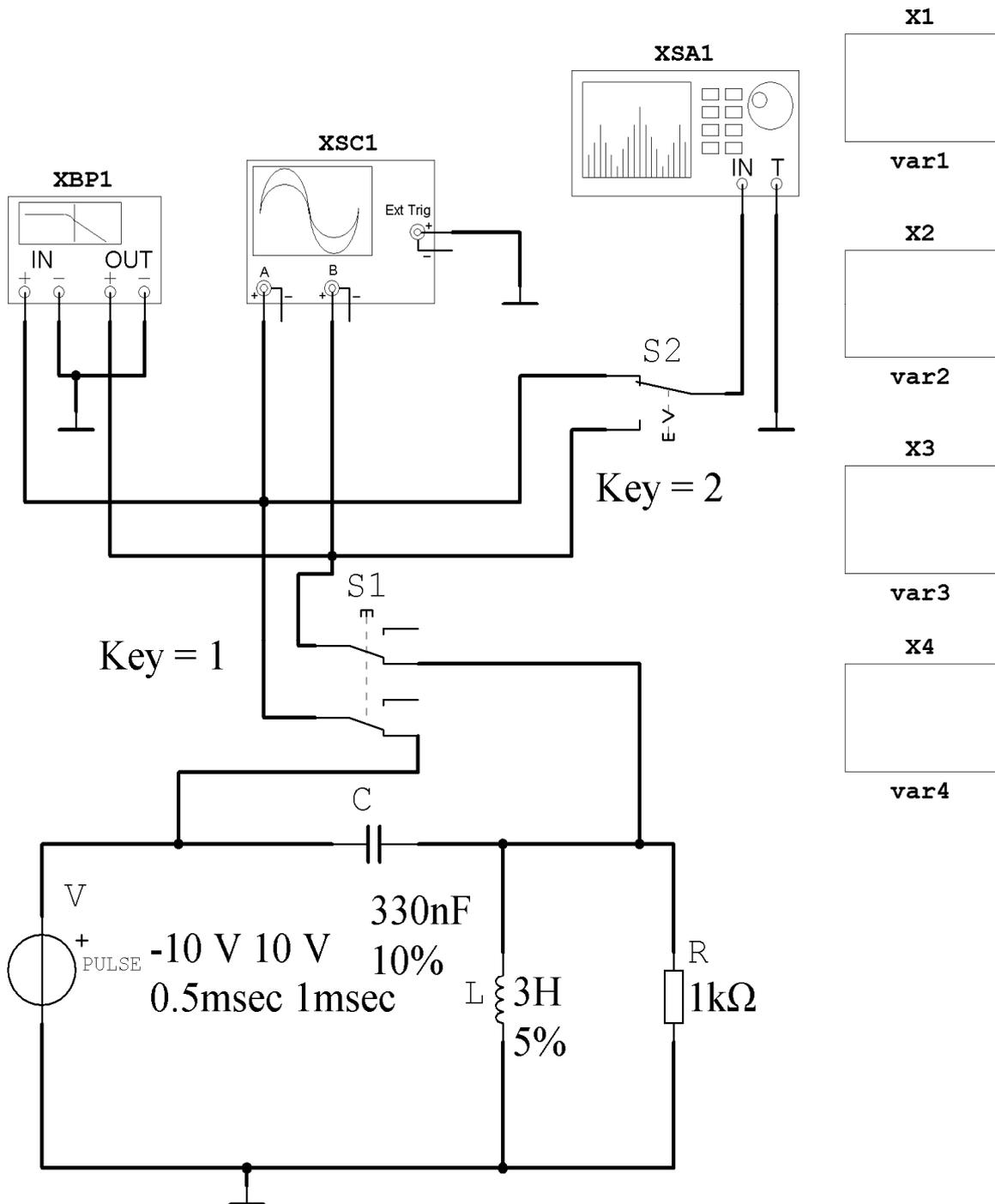


Рис. 8.20

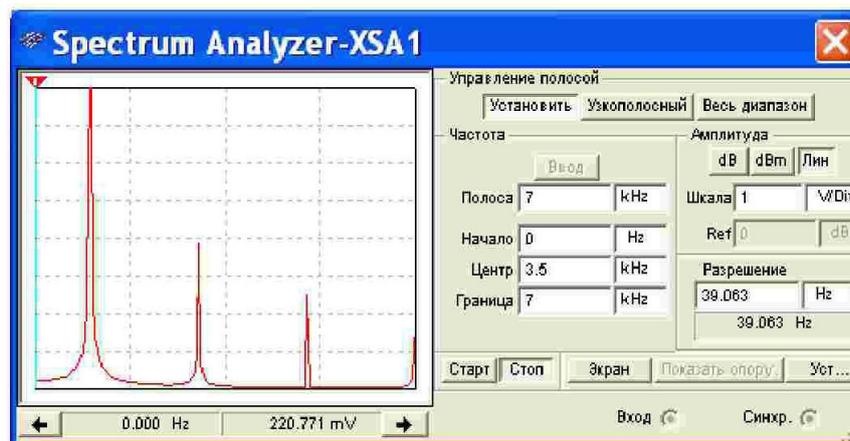
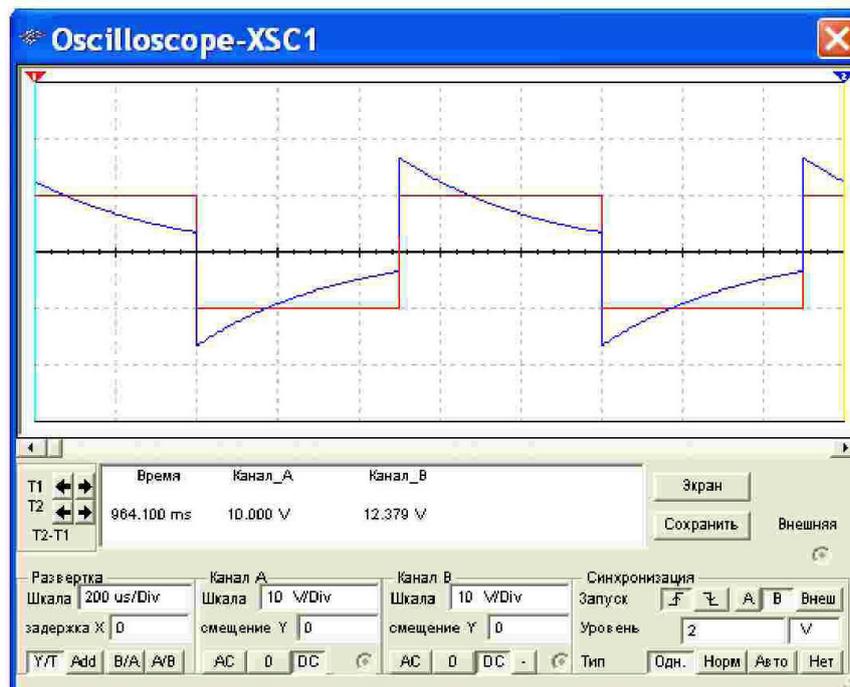
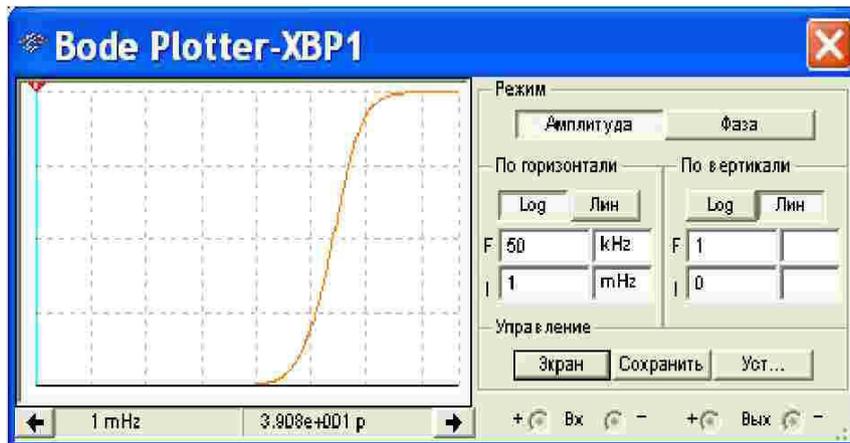


Рис. 8.21

8.2.5. Моделирование переходного процесса

Для исследования модели электрической цепи необходимо открыть в приложении «Электрические цепи» папку «Схема моделирования цепи».

После ввода программы Multisim v. 10 активировать электронную модель цепи переключателем Simulation Switch. Двойным щелчком курсора мыши по изображениям измерительных приборов открыть их лицевые платы и снять осциллограммы входного и выходного сигналов, частотные АЧХ и ФЧХ характеристики цепи и дискретные спектры входного и выходного сигналов как показано на рис. 8.20. Инструкция действий открывается слева от окна модели выбором в меню View опции Circuit Description Box. Результаты моделирования приведены на рис. 8.21.

Список литературы

1. Основы теоретической электротехники / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Э. П. Чернышев, А. Н. Белянин. – СПб.: Издательство «Лань», 2008.
2. Теоретические основы электротехники. Справочник по теории электрических цепей / Под ред. Ю.А. Бычкова, В.М. Золотницкого, Э.П. Чернышева. – СПб.: Питер, 2008.
3. Сборник задач по основам теоретической электротехники: Учебное пособие / Под ред. Ю.А. Бычкова, В.М. Золотницкого, Э.П. Чернышева, А.Н. Белянина, Е.Б. Соловьевой. – СПб.: Издательство «Лань», 2011.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А., Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1980.
5. Бычков Ю.А. Аналитически-численный расчет динамики нелинейных систем. Детерминированные кусочно-степенные модели с сосредоточенными параметрами. Переходные и периодические режимы. Анализ, синтез, оптимизация / СПбГЭТУ. СПб., 1997.
6. Р. И. Ивановский Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем MathCAD Pro.– М.: Высш.шк., 2003.
7. В.П. Дьяконов MATLAB 7.* /R2006/R2007. Самоучитель. – М.: «ДМК-Пресс», 2008.

А. Mathcad для электротехнических расчетов

Назначение данной работы – показать на некоторых примерах приемы расчетов в среде Mathcad, построение графиков. Как всегда, применение компьютера не только не исключает, но требует аналитической работы до и во время выполнения курсового задания.

1. Формирование передаточной функции

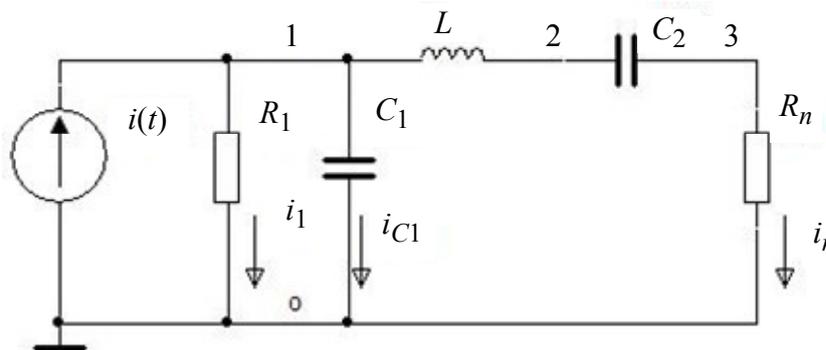


Рис. А.1

Параметры цепи для расчета в Mathcad:

$$R1 := 0.25; Rn := 1; C1 := 1; C2 := 0.25; L := 0.5.$$

Для заданной цепи получить передаточную функцию по току, т. е. отношение

$$H(S) = I_n(S) / I(S).$$

Мы имеем схему во временной области. На этой схеме наносим положительные направления токов. Считаем, что в каждом элементе схемы ток и напряжение согласованы (ток в элементе направлен от "+" к "-"). Для получения передаточной функции нужна операторная схема замещения. Так как передаточная функция вычисляется при нулевых предначальных условиях, операторная схема выглядит также как и временная. Но в ней все напряжения и токи даются в изображениях по Лапласу $U(S)$ и $I(S)$. Примем для расчета метод пропорциональных величин. Для этого ток в нагрузке условно считаем равным единице. При «движении» от выхода схемы ко входу применяем все уравнения законов Ома и Кирхгофа и находим входной ток источника, при котором ток нагрузки равен 1. Применим символ-

ные расчеты. Здесь **simplify** – команда упрощения выражения, а **float, 3** – расчет с плавающей запятой и точностью 3 значащих цифры.

$$YC1(S) := C1S;$$

$$In := 1;$$

$$UC1(S) := In \cdot \left(S \cdot L + \frac{1}{S \cdot C2} + Rn \right);$$

$$IC1(S) := C1 \cdot S \cdot \left[In \cdot \left(S \cdot L + \frac{1}{S \cdot C2} + Rn \right) \right];$$

$$IC1(S) := UC1(S) \cdot YC1(S);$$

$$I1(S) := \frac{UC1(S)}{R1};$$

$$I1(S) := \frac{In \cdot \left(S \cdot L + \frac{1}{S \cdot C2} + Rn \right)}{R1};$$

$$I(S) := In + IC1(S) + I1(S);$$

$$I(S) := 1 + \left[C1 \cdot S \cdot \left[In \cdot \left(S \cdot L + \frac{1}{S \cdot C2} + Rn \right) \right] \right] \dots \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow$$

$$+ \frac{In \cdot \left(S \cdot L + \frac{1}{S \cdot C2} + Rn \right)}{R1}$$

$$0.500 \cdot \frac{(18 \cdot S + S^3 + 6 \cdot S^2 + 32)}{S^1};$$

$$H(S) := \frac{1}{I(S)};$$

$$H(S) := \frac{2S}{S^3 + 6S^2 + 18S + 32}.$$

Нули функции:

$$S_{01} := 0$$

$$S_{02} := \infty$$

$$S_{03} := \infty$$

Полюсы функции можно получить разными способами. Применим символьные вычисления

$$\left(\frac{2S}{S^3 + 6S^2 + 18S + 32}\right)^{-1} \Bigg|_{\substack{\text{solve, S} \\ \text{float, 3}}} \rightarrow \begin{pmatrix} -3.47 \\ -1.26 - 2.76i \\ -1.26 + 2.76i \end{pmatrix}$$

Другой способ – через коэффициенты полинома знаменателя функции. Для этого полином знаменателя нужно вводить без знака умножения при S в различных степенях:

$$S^3 + 6S^2 + 18S + 32.$$

Подводим курсор под S в любой степени, нажимаем Symbolic, затем Polynomial Coefficients:

$$\begin{pmatrix} 32 \\ 18 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем корни полинома

$$Sp := \text{polyroots} \left(\begin{pmatrix} 32 \\ 18 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

По умолчанию в Mathcad счет элементов матрицы или вектора начинается с 0.

$$Sp = \begin{pmatrix} -3.47 \\ -1.265 + 2.761i \\ -1.265 - 2.761i \end{pmatrix};$$

$$Sp_0 = -3.47;$$

$$Sp_1 = -1.265 + 2.761i;$$

$$Sp_2 = -1.265 - 2.761i.$$

Здесь индекс вводим с помощью клавиши открывающей квадратной скобки [.

Изобразим полюсы на комплексной плоскости

$$k := 0..2.$$

Вначале получается график вида рис. А.2

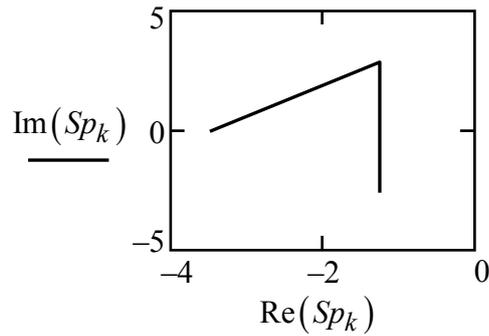


Рис. А.2

Здесь по умолчанию осуществляется линейная интерполяция между соседними точками. Дважды «кликаем» по графику, выделяем Traces, Type. Вместо lines вводим points, выделяем Weight. Вместо 1 вводим, например, 3. Результат показан на рис. А.3.

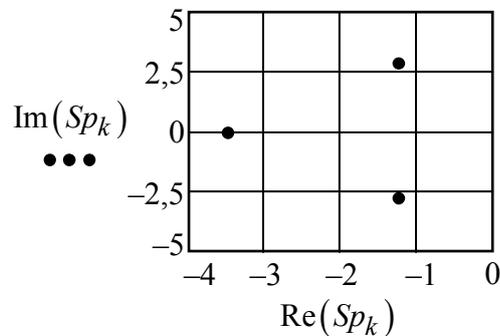


Рис. А.3

2. Построение частотных характеристик цепи

В передаточной функции $H(S)$ заменяем S на $j^*\omega$, где

$$j := \sqrt{-1},$$

ω – текущее значение частоты.

$$\omega := 0, 0.01..10;$$

$$H(S) := \frac{2S}{S^3 + 6S^2 + 18S + 32};$$

$$H(\omega) := \frac{j2\omega}{32 - 6\omega^2 + j\omega(18 - \omega^2)}.$$

Амплитудно-частотная характеристика АЧХ (рис. А.4)

$$H(\omega) := \left| \frac{2\omega}{\sqrt{(32 - 6\omega^2)^2 + \omega^2(18 - \omega^2)^2}} \right|.$$

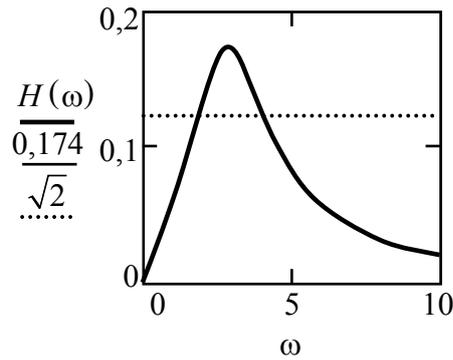


Рис. А.4

Для определения полосы пропускания цепи «кликаем» по графику АЧХ. Слева вверху высветится максимальное значение амплитуды. Добавляем в качестве второго графика $0,707H_{\max}$. Пересечение этого уровня с графиком АЧХ дает частоты среза. Для их определения правой клавишей мыши «кликаем» по графику, нажимаем trace. Появляется окно X-Y Trace. Теперь при подведении курсора к любой точке графика в окне высвечиваются координаты данной точки. Их можно скопировать. В нашем примере

$$\omega c1 := 1.87;$$

$$\omega c2 := 3.99.$$

Полоса пропускания

$$\Delta\omega := \omega c2 - \omega c1;$$

$$\Delta\omega = 2,12.$$

Фазочастотная характеристика ФЧХ « $\phi(\omega) = \phi(\omega)$ числителя – $\phi(\omega)$ знаменателя». Фаза числителя равна $0,5\pi$, следовательно,

$$\phi(\omega) := \frac{\pi}{2} - \left[\text{atan} \left[\omega \frac{(18 - \omega^2)}{32 - 6\omega^2} \right] \right].$$

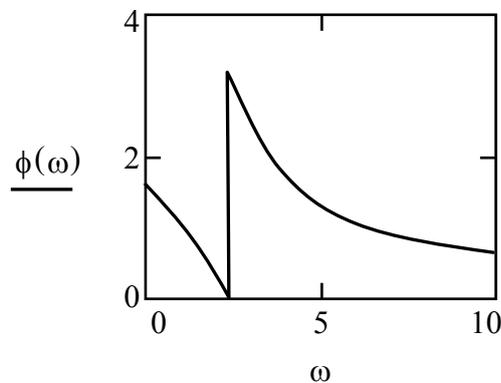


Рис. А.5

Здесь на частоте, соответствующей изменению знака вещественной части, происходит скачок фазы, поскольку в системе Mathcad выделяется

только главное значение арктангенса (см. рис. А.5). Поэтому можно предложить следующую формулу, в которой $\Phi(\omega)$ – единичная «ступенька» от частоты $\delta_1(\omega)$.

$$\phi(\omega) := \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan} \left[\omega \frac{(18 - \omega^2)}{32 - 6\omega^2} \right] - \pi \cdot \Phi \left(\omega - \sqrt{\frac{32}{6}} \right).$$

Уточненный график ФЧХ приведен на рис. А.6.

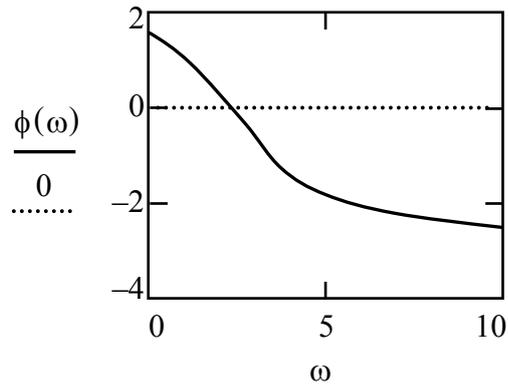


Рис. А.6

Построение амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) можно выполнить в декартовых координатах. Тогда по осям откладываем вещественную и мнимую составляющие $H(j^*\omega)$. При этом нужно выровнять масштаб по осям. Построим АФХ в полярных координатах (рис. А.7). Вводим диапазон частот. Обычно предельная частота здесь берется много больше, чем для АЧХ и ФЧХ.

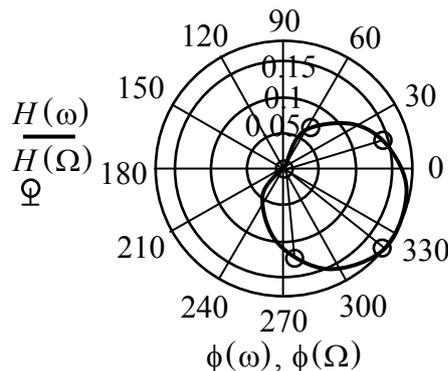


Рис. А.7

Чтобы показать несколько точек для конкретных частот, строим этот же график с другим шагом по частоте

$$\omega := 0,0.01..30;$$

$$\Omega := 0..4.$$

Второй график вводим точками через point или векторами через stem.

3. Спектральные характеристики аperiodических сигналов

Изображение по Фурье аperiodического сигнала часто получают путем замены S на $j \cdot \omega$ в изображении по Лапласу для этого сигнала. В изображении по Фурье выделяем амплитудно-частотный и фазочастотный спектры. Необходимо провести анализ полученных зависимостей, в первую очередь в особых точках. После этого можно строить графики спектральных характеристик.

Получим спектры для входного сигнала вида полупериода синусной кривой (рис А.8):

$$I_{\max} := 1;$$

$$t_i := 2;$$

$$\omega_0 := \frac{2\pi}{2t_i};$$

$$\omega_0 = 1.571;$$

$$t := 0, 0.01..3;$$

$$i(t) := I_{\max} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \Phi(t) + I_{\max} \cdot \sin[\omega_0 \cdot (t - t_i)] \Phi(t - t_i).$$

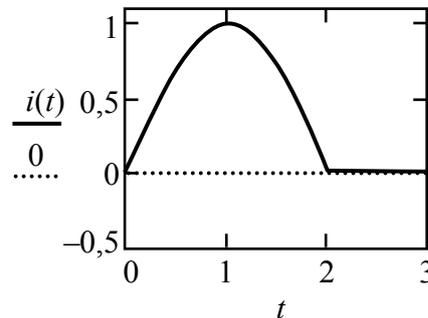


Рис. А.8

Здесь $\Phi(t)$ – единичная ступенчатая функция, т.е. $\delta_1(t)$.

Изображение по Лапласу входного сигнала

$$I(S) := \frac{I_{\max} \cdot \omega_0}{S^2 + \omega_0^2} (1 + e^{-S \cdot t_i}).$$

Изображение по Фурье

$$F(j \cdot \omega) \leftarrow \frac{2 \cdot I_{\max} \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos\left(\omega \cdot \frac{t_i}{2}\right) e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{t_i}{2}}.$$

Амплитудно-частотный спектр

$$A(\omega) := \left| \frac{2 \cdot I_{\max} \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos\left(\omega \cdot \frac{t_i}{2}\right) \right|.$$

Раскроем неопределенность типа 0/0 при $\omega = \omega_0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left| \frac{2I_{\max} \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos\left(\omega \cdot \frac{t_i}{2}\right) \right| \rightarrow 1.$$

Тогда

$$A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{if } \omega = \omega_0 \\ \left| \frac{2I_{\max} \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos\left(\omega \cdot \frac{t_i}{2}\right) \right| & \text{otherwise} \end{cases}$$

Вычислим частоты, на которых амплитудно-частотный спектр обращается в ноль, т.е. узловые частоты ω_{yk} :

$$\omega_{yk} = k \frac{\pi}{t_i}.$$

Теперь можно строить график

$$\omega := 0, 0.01..8.$$

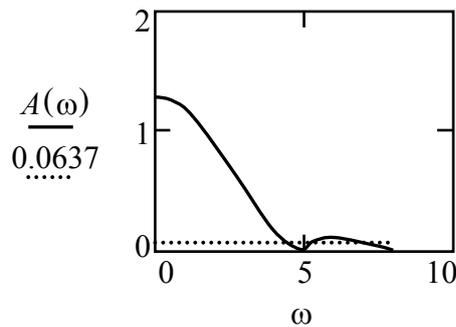


Рис. А.9

Практическая ширина спектра по 10%-му амплитудному критерию

$$\omega_{гр} = 4,26;$$

$$\omega_{y1} = 4,712.$$

Сравнивая практическую ширину спектра с полосой пропускания цепи, можно сделать выводы о качестве прохождения сигнала через цепь и об искажениях формы сигнала на выходе.

Фазочастотный спектр воздействия можно построить с помощью оператора **if** (рис. А.10, а) или с использованием единичной ступенчатой функции $\Phi(\omega)$ (рис. А.10, б):

$$\theta(\omega) := \begin{cases} -\frac{t_i}{2} \cdot \omega \\ \left(-\frac{t_i}{2} \cdot \omega + \pi \right) & \text{if } \omega > \frac{3\pi}{t_i} \end{cases};$$

$$\Theta(\omega) := \begin{cases} \frac{t_i}{2} \cdot \omega \\ -\frac{t_i}{2} \cdot \omega + \pi \cdot \Phi(\omega - \omega_{y1}) \end{cases}$$

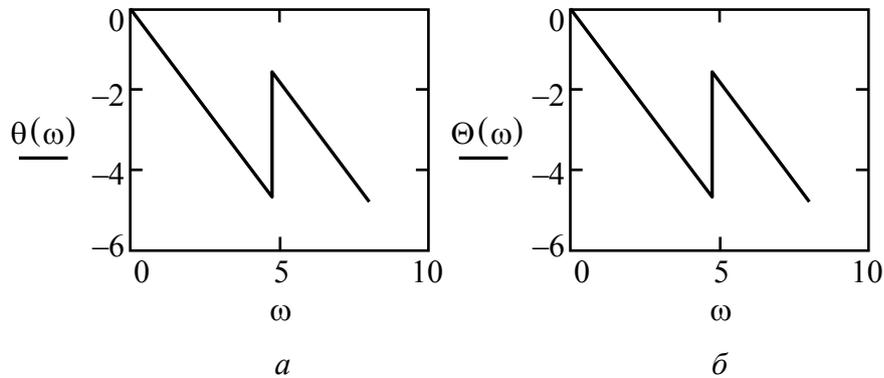


Рис. А.10

Разложение в ряд Фурье периодического сигнала (рис. А.11)

$$i(t) := I_{\max} \cdot |\sin(\omega_0 \cdot t)|.$$

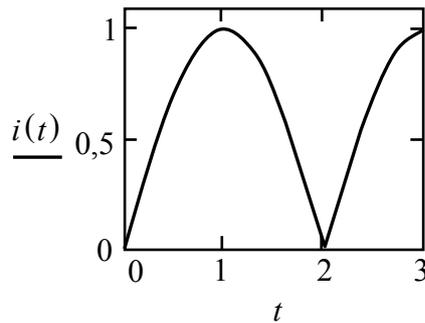


Рис. А.11

Период повторения

$$T := 2.$$

Основная частота

$$\omega_1 := \frac{2\pi}{T};$$

$$\omega_1 = 3.142.$$

Номер гармоники

$$k := 0..6;$$

$$\omega_k := k\omega_1.$$

Используем связь дискретного спектра ряда Фурье со спектром одиночного сигнала. Исследуем выражения на особые точки. Графики редактируем, вводя вместо line stem

$$A_k := \frac{2I_{\max} \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - (\omega_k)^2} \cdot \cos\left(\omega_k \cdot \frac{t_i}{2}\right);$$

$$IIm_k := \frac{2}{T} \left| \frac{2I_{\max} \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - (\omega_k)^2} \cdot \cos\left(\omega_k \cdot \frac{t_i}{2}\right) \right|;$$

$$\alpha_k := \begin{cases} -\frac{t_i}{2} \cdot \omega_k \\ \left(-\frac{t_i}{2} \cdot \omega_k + \pi\right) \text{ if } A_k < 0 \end{cases}$$

Амплитудно-частотный дискретный спектр приведен на рис. А.12, а, а фазочастотный дискретный спектр – на рис. А.12, б.

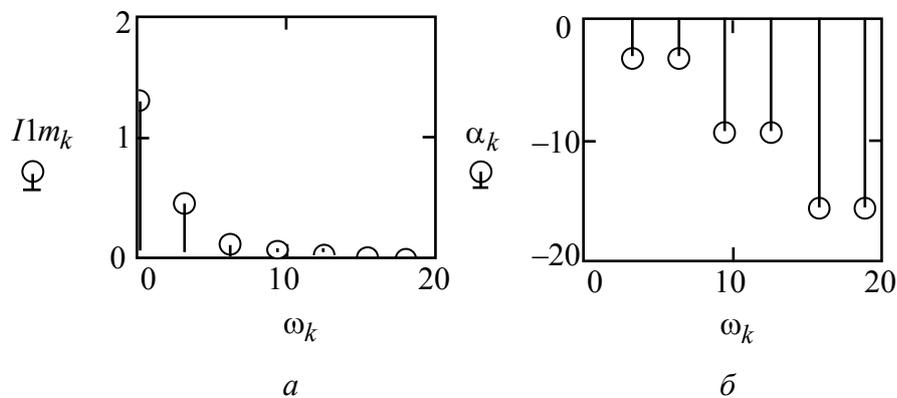


Рис. А.12

Запишем выражение для воздействия в виде отрезка ряда Фурье:

$$t := 0, 0.01..3;$$

$$ir(t) := \frac{1.273}{2} + \sum_{k=1}^3 IIm_k \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t + \alpha_k).$$

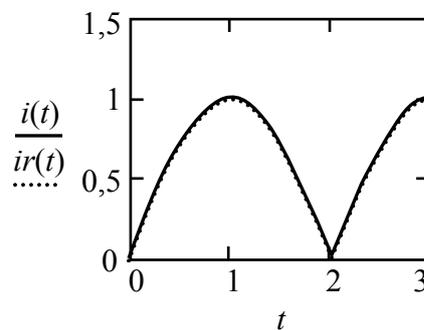


Рис. А.13

Графики воздействия и его аппроксимации отрезком ряда Фурье приведены на рис. А.13.

4. Переход от изображений к оригиналам.

Если функция, описывающая изображение по Лапласу, не имеет комплексных полюсов, можно применить символьную функцию **parfrac** – разложение на простые дроби с вычислением вычетов в полюсах.

$$F(S) := \frac{10S + 6}{(S + 2)^2 \cdot (S^2 + 5S + 4)} \text{convert, parfrac, S} \rightarrow \dots$$

$$\frac{7}{(S + 2)^2} - \frac{3}{2 \cdot (S + 2)} + \frac{17}{6 \cdot (S + 4)} - \frac{4}{3 \cdot (S + 1)}.$$

Тогда оригинал

$$f(t) := 7t \cdot e^{-2t} - 1.5e^{-2t} + \frac{17}{6}e^{-4t} - \frac{4}{3}e^{-t}.$$

Случай с комплексными полюсами разберем при определении импульсной характеристики $h(t)$ для заданной схемы. Передаточную функцию переписываем через ее полюсы и применяем теорему разложения:

$$\frac{2S}{(S - Sp_0) \cdot (S - Sp_1) \cdot (S - Sp_2)} \leftarrow \frac{A_0}{S - Sp_0} + \frac{A_1}{S - Sp_1} + \frac{A_2}{S - Sp_2};$$

$$Sp := \begin{pmatrix} -3.47 \\ -1.26 - 2.76i \\ -1.26 + 2.76i \end{pmatrix}.$$

Вычеты в полюсах определяем по теореме Коши о вычетах

$$k := 0..2;$$

$$\lim_{S \rightarrow Sp_k} (S - Sp_k) \cdot \frac{2S}{(S + 3.47) \cdot (S - Sp_1) \cdot (S - Sp_2)} \text{float, 3} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.555 \\ 0.278 + 0.140i \\ 0.278 - 0.140i \end{pmatrix}.$$

Нас интересуют вычеты A_0 и A_2 – вычет в том полюсе, в котором мнимая часть положительна:

$$A_0 := -0.555;$$

$$A_2 := 0.278 + 0.140i;$$

$$|A_2| = 0.311;$$

$$\beta_1 := \arg(A_2);$$

$$\beta_1 = 0.467.$$

Тогда импульсная характеристика

$$h(t) := -0.555 \cdot e^{-3.47t} + 2 \cdot 0.311 \cdot e^{-1.26t} \cdot \cos(0.14t + 0.467).$$

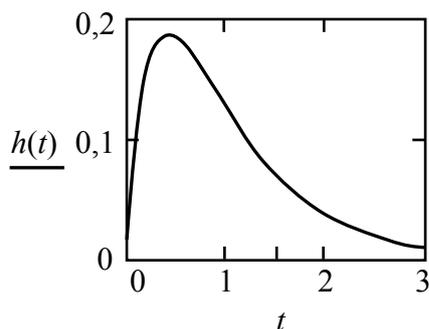


Рис. А.14

График найденной характеристики изображен на рис. А.14.

5. Определение реакции на одиночный импульс операторным методом

Изображение входного тока

$$I(S) := \frac{I_{\max} \cdot \omega_0}{S^2 + \omega_0^2} (1 + e^{-S \cdot t_i}).$$

Передаточная функция цепи

$$H(S) := \frac{2S}{S^3 + 6S^2 + 18S + 32}.$$

Изображение реакции

$$I_n(S) := I(S) \cdot H(S);$$

$$I_n(S) := \frac{I_{\max} \cdot \omega_0}{S^2 + \omega_0^2} (1 + e^{-S \cdot t_i}) \cdot \frac{2S}{S^3 + 6S^2 + 18S + 32}.$$

Расчеты удобно произвести для первого слагаемого (если раскрыть скобки), т. е. для

$$I_n(S) := \frac{I_{\max} \cdot \omega_0}{S^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{2S}{S^3 + 6S^2 + 18S + 32}.$$

Вычисляем полюсы:

$$\left(\frac{I_{\max} \cdot \omega_0}{S^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{2S}{S^3 + 6S^2 + 18S + 32} \right)^{-1} \Big|_{\substack{\text{solve, } S \\ \text{float, } 3}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.57i \\ -1.57i \\ -3.47 \\ -1.26 - 2.76i \\ -1.26 + 2.76i \end{pmatrix};$$

$$S_n := \begin{pmatrix} 1.57i \\ -1.57i \\ -3.47 \\ -1.26 - 2.76i \\ -1.26 + 2.76i \end{pmatrix}.$$

Записываем разложение на простейшие дроби:

$$\frac{I_{\max} \cdot \omega_0}{S^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{2S}{S^3 + 6S^2 + 18S + 32} \leftarrow \frac{B_0}{S - S_{n_0}} + \frac{B_1}{S - S_{n_1}} + \frac{B_2}{S - S_{n_2}} \dots$$

$$+ \frac{B_3}{S - S_{n_3}} + \frac{B_4}{S - S_{n_4}}.$$

Определяем вычеты в полюсах:

$$k := 0..4;$$

$$\lim_{S \rightarrow S_{n_k}} (S - S_{n_k}) \left[\frac{I_{\max} \cdot 2S}{(S - S_{n_0})(S - S_{n_1})(S - S_{n_2})(S - S_{n_3})(S - S_{n_4})} \right] \text{float,3} \rightarrow \dots$$

$$\begin{pmatrix} 1.94 \cdot 10^{-2} - 2.74 \cdot 10^{-2}i \\ 1.94 \cdot 10^{-2} + 2.74 \cdot 10^{-2}i \\ -3.83 \cdot 10^{-2} \\ -2.51 \cdot 10^{-4} - 3.98 \cdot 10^{-2}i \\ -2.51 \cdot 10^{-4} + 3.98 \cdot 10^{-2}i \end{pmatrix}.$$

Нас интересуют вычеты B_0 , B_3 и B_4 .

$$B := \begin{pmatrix} 1.94 \cdot 10^{-2} - 2.74 \cdot 10^{-2}i \\ 1.94 \cdot 10^{-2} + 2.74 \cdot 10^{-2}i \\ -3.83 \cdot 10^{-2} \\ -2.51 \cdot 10^{-4} - 3.98 \cdot 10^{-2}i \\ -2.51 \cdot 10^{-4} + 3.98 \cdot 10^{-2}i \end{pmatrix}.$$

$$|B_0| = 0.034;$$

$$\alpha_0 := \arg(B_0);$$

$$\alpha_0 = -0.955;$$

$$|B_4| = 0.04;$$

$$\alpha_4 := \arg(B_4);$$

$$\alpha_4 = 1.577.$$

$$\begin{aligned} \text{inn}(t) := & 2 \cdot 0.034 \cos(\omega_0 \cdot t - 0.955) - 3.83 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-3.47t} + \\ & + 2 \cdot 0.04 \cdot e^{-1.26t} \cdot \cos(2.76t + 1.577). \end{aligned}$$

Окончательный ответ для тока нагрузки:

$$t := 0, 0.01..4;$$

$$\text{in}(t) := \text{inn}(t) \cdot \Phi(t) + \text{inn}(t - t_i) \cdot \Phi(t - t_i);$$

$$i(t) := I_{\max} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \Phi(t) + I_{\max} \cdot \sin[\omega_0 \cdot (t - t_i)] \cdot \Phi(t - t_i).$$

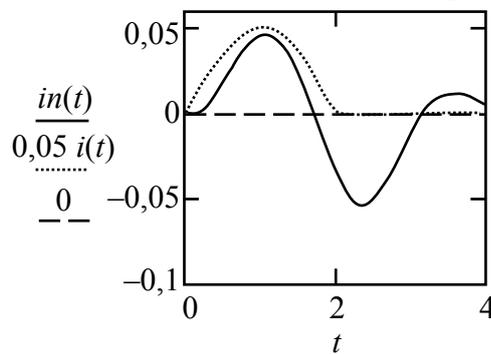


Рис. А.15

Графики воздействия и реакции приведены на рис. А.15.

6. Расчеты во временной области

Уравнения состояния цепи:

$$\begin{pmatrix} \frac{duc1}{dt} \\ \frac{duc2}{dt} \\ \frac{diL}{dt} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} uc1(t) \\ uc2(t) \\ iL(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot i1(t).$$

Матрица параметров цепи:

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A

$$\text{eigenvals}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -3.47 \\ -1.265 + 2.761i \\ -1.265 - 2.761i \end{pmatrix}.$$

Определим переходную характеристику $h_1(t)$ для тока нагрузки численным, т. е. приближенным методом. Это значит, что $I_1(t) = 1$ при $t > 0$. Практическая длительность переходного процесса $t_{\text{практ}} = (3 \div 5) \tau_{\text{max}}$. Имеем:

$$\tau_1 := \frac{1}{3.47}; \quad \tau_1 = 0.288; \quad \tau_2 := \frac{1}{1.265}; \quad \tau_2 = 0.791; \quad 3\tau_2 = 2.372.$$

Принимаем время счета равным 3 с. Число шагов $n = 300$.

Шаг счета

$$\mathbf{h} := \frac{3}{300}; \quad \mathbf{h} = 0.01; \quad \mathbf{k} := 0.300;$$

текущее время

$$\mathbf{t}_k := \mathbf{k} \cdot \mathbf{h};$$

независимые начальные условия

$$\mathbf{UC1}_0 := 0; \quad \mathbf{UC2}_0 := 0; \quad \mathbf{IL}_0 := 0.$$

Применим самый простой из численных методов – явную форму алгоритма Эйлера:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{UC1}_{k+1} \\ \mathbf{UC2}_{k+1} \\ \mathbf{IL}_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{UC1}_k \\ \mathbf{UC2}_k \\ \mathbf{IL}_k \end{pmatrix} + \mathbf{h} \cdot \left[\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{UC1}_k \\ \mathbf{UC2}_k \\ \mathbf{IL}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{1} \right],$$

ток нагрузки равен току индуктивного элемента в данной цепи

$$\mathbf{h1}_k := \mathbf{IL}_k.$$

Точное решение для переходной характеристики:

$$\mathbf{h11}(t) := 0,64e^{-3,47t} + 0,816e^{-1,26t} \cdot \cos(2,76t - 2,47).$$

Чтобы наложить график приближенного решения на график точного решения, последнее записываем через индексированную переменную.

$$\mathbf{h11}_k := 0,64e^{-3,47\mathbf{t}_k} + 0,816e^{-1,26\mathbf{t}_k} \cdot \cos(2,76\mathbf{t}_k - 2,47).$$

Графики переходной характеристики, полученной аналитическим и численным методами, приведены на рис. А.16.

Некоторые рекомендации. При присвоении обозначений для вводимых переменных нужно избегать обозначений, которые могут быть неправильно

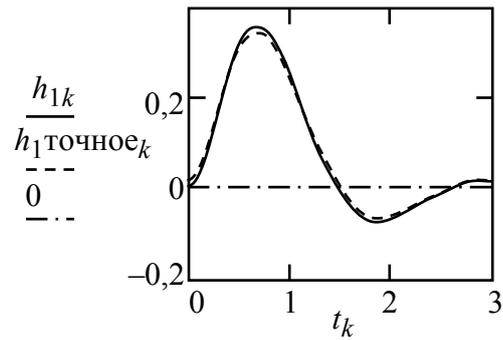


Рис. А.16

поняты компьютером. Например, для амплитуды тока лучше записать I_{\max} вместо I_m . Выражения, для которых предполагаются символьные вычисления (взятие предела, дифференцирование и т. д.), по мере возможности вводите без символа умножения. Здесь приведены расчеты, которые иногда могут быть сделаны с помощью других приемов. Однако приведенные примеры уже проверены студентами при выполнении курсовых заданий.

Б. Анализ линейной электрической цепи с использованием пакета MATLAB

Приведенный расчет основан на типовом примере из темы 2. В качестве исходных данных для компьютерного расчета использованы нормированные величины параметров цепи и сигналов, а также результаты, полученные в п. 2.4 с использованием аналитических методов.

1. Системные требования

Для расчета рекомендуется использовать пакет MATLAB версии не ниже 7 с установленным Control System Toolbox [7].

2. Подготовка

```
clear all  
close all  
clc
```

Комментарии:

- указанные операторы выполняют очистку командного окна, удаление всех переменных из рабочей области памяти и закрытие всех окон с графикой.

3. Ввод исходных данных

```
t = 0:0.0001:15;  
w = 0:0.001:3;  
Um = 100;  
ti = 15*pi;  
T = 2*ti;
```

Комментарии:

- t – вектор дискретных отсчетов времени, заданных от 0 до конечного значения с шагом 0,0001; шаг расчета и конечное значение выбираются с учетом отображения на графиках характерных точек соответствующих зависимостей и исходя из времени практического затухания переходных процессов;

- w – вектор значений угловой частоты, заданных в интервале от 0 до 3 с шагом 0,001; шаг расчета и конечное значение интервала частот выбираются таким образом, чтобы на графике АЧХ были отображены полоса пропускания цепи и характерные точки кривой;

- Um – амплитуда входного импульса;
- ti – длительность входного импульса;
- T – период периодического воздействия;
- комментарий в системе MATLAB начинается с символа «%».

4. Расчет частотных характеристик цепи

Создание модели линейной цепи

```
num = [1 0 1];  
den = [10 14 12 4];  
sys = tf(num, den);
```

Расчет частотных характеристик цепи:

```
H = freqresp(sys, w);  
GFC = abs(H(:));  
PhFC = angle(H(:));
```

Построение графиков:

```
plot(w, GFC), title('Амплитудно-частотная характеристика'),...  
grid, pause;  
plot(w, PhFC), title('Фазочастотная характеристика'), grid, pause;  
w = 0:0.001:1000;  
H = freqresp(sys, w);  
plot(real(H(:)), imag(H(:))),...  
title('Амплитудно-фазовая характеристика'), grid;  
hold on;  
w2 = [0, 0.535, 1, 1.1];  
H = freqresp(sys, w2);  
plot(real(H(:)), imag(H(:)), 'ok', 'LineWidth', 0.1), pause;  
hold off;
```

Комментарии:

- символ «'» - операция транспонирования;
- оператор «...» обозначает продолжение текущей команды на следующей строке;
- *num* – вектор коэффициентов числителя ПФ цепи (коэффициенты записываются в порядке убывания степеней переменной *s*);
- *den* – вектор коэффициентов знаменателя ПФ цепи (коэффициенты записываются в порядке убывания степеней переменной *s*);
- *sys* – модель линейной электрической цепи, описанной своей передаточной функцией;
- *H* – вектор отсчетов комплексной частотной характеристики цепи, соответствующих отсчетам угловой частоты (вектор *w*);
- *GFC* – вектор отсчетов АЧХ;
- *PhFC* – вектор отсчетов ФЧХ;
- функция *freqresp(sys, w)* вычисляет комплексную частотную характеристику линейной системы *sys*, взятую в дискретных точках оси частот, задаваемых вектором *w*; данная функция может использоваться для вычисления частотных характеристик систем с несколькими входами и

несколькими выходами и возвращает многомерную матрицу в качестве результата, поэтому для получения ЧХ цепи с одним входом и одним выходом необходимо использовать вектор $\mathbf{H}(\cdot)$.

- функция $abs(\mathbf{H}(\cdot))$ вычисляет модули элементов вектора $\mathbf{H}(\cdot)$;
- функция $angle(\mathbf{H}(\cdot))$ вычисляет аргументы элементов вектора $\mathbf{H}(\cdot)$;
- функция $real(\mathbf{H}(\cdot))$ возвращает действительные части элементов вектора $\mathbf{H}(\cdot)$;
- функция $imag(\mathbf{H}(\cdot))$ возвращает мнимые части элементов вектора $\mathbf{H}(\cdot)$;
- команда $plot(\mathbf{w}, \mathbf{GFC})$ строит график функции, значения которой заданы вектором \mathbf{GFC} , значения аргумента функции заданы вектором \mathbf{w} ;
- операторы $xlabel('текст')$ и $ylabel('текст')$ устанавливают надписи по осям абсцисс и ординат соответственно;
- оператор $title('текст')$ устанавливает название рисунка;
- для задания текста, устанавливаемого операторами $xlabel$, $ylabel$ и $title$ может быть использован формат TeX, например, подпись « $\Phi_1(\omega)$ » по оси ординат можно установить с помощью оператора $ylabel('\Phi_1(\omega)')$;
- оператор $grid$ выводит координатную сетку;
- оператор $pause$ приостанавливает работу системы MATLAB до нажатия любой клавиши клавиатуры;
- команда $hold$ позволяет строить несколько графиков разных типов на одном рисунке;
- $\mathbf{w2}$ – вектор значений частоты, соответствующих выделенным точкам на графике АФХ.

5. Определение переходной и импульсной характеристик

Расчет импульсной и переходной характеристик:

```
 $\mathbf{h} = (0.229 * \exp(-0.545 * \mathbf{t}) + 0.16 * \exp(-0.428 * \mathbf{t}) * \cos(0.743 * \mathbf{t} + 2.509)) * \text{stepfun}(\mathbf{t}, 0);$ 
```

```
 $\mathbf{h1} = (0.25 - 0.421 * \exp(-0.545 * \mathbf{t}) + 0.188 * \exp(-0.428 * \mathbf{t}) * \cos(0.743 * \mathbf{t} + 0.415)) * \text{stepfun}(\mathbf{t}, 0);$ 
```

Построение графиков:

```
 $plot(\mathbf{t}, \mathbf{h}), title('Импульсная характеристика'), grid, pause;$   
 $plot(\mathbf{t}, \mathbf{h1}), title('Переходная характеристика'), grid, pause;$ 
```

Проверка ИХ и ПХ:

```
 $\%plot(\mathbf{t}, \mathbf{h}, \mathbf{t}, \text{impulse}(\text{sys}, \mathbf{t})), title('Проверка ИХ'), pause;$   
 $\%plot(\mathbf{t}, \mathbf{h1}, \mathbf{t}, \text{step}(\text{sys}, \mathbf{t})), title('Проверка ПХ'), pause;$ 
```

Численный расчет ПХ с помощью метода Эйлера:

```
 $dt = 0.3;$ 
```

```

A = [0 1 0; -1 -1 -1; 0 -0.2 -0.4];
B = [0 0.5 0.1]';
t = 0:dt:15;
Fss = [0;0;0];
for n = 1:length(t)-1
    Fss(:,n+1) = Fss(:,n) + dt*(A*Fss(:,n) + B*stepfun(n,0));
end
h11 = Fss(3,:);
h1 = (0.25 - 0.421*exp(-0.545*t) + 0.188*exp(-0.428*t).*cos(0.743*t +...
0.415)).*stepfun(t,0);
plot(t,h11,'--',t,h1), pause;

```

Комментарии:

- h – вектор значений импульсной характеристики в дискретные моменты времени, заданные вектором t ;
- $h1$ – вектор значений переходной характеристики в дискретные моменты времени, заданные вектором t ;
 - длина векторов h и $h1$ соответствует длине вектора t ;
 - dt – шаг расчета для вычисления ПХ на основе алгоритма Эйлера;
 - A, B – матрицы коэффициентов уравнений состояния;
 - Fss – матрица, содержащая численные решения для переменных состояния (каждая строка данной матрицы содержит значения соответствующей переменной состояния, вычисленные в моменты времени, которые заданы вектором t);
 - $h11$ – ПХ, полученная численным методом;
 - символ «.*» – операция поэлементного умножения векторов;
 - функция $stepfun(t,t0)$ формирует вектор отсчетов единичной ступенчатой функции (задержанной на время $t0$ (в примере $t0 = 0$)), соответствующих отсчетам времени вектора t ;
 - оператор for организует вычисления в циклах, каждый из которых соответствует одному шагу численного расчета методом Эйлера.
 - проверку ИХ и ПХ можно осуществить с помощью соответствующих функций системы MATLAB:

```

%plot(t,h,t,impulse(sys,t)), title('Проверка ИХ'), pause;
%plot(t,h1,t,step(sys,t)), title('Проверка ПХ'), pause;

```

Для использования указанных команд необходимо удалить символы «%», расположенные в начале каждой строки. Функция $plot(t,h,t,impulse(sys,t))$ строит на одном рисунке график ИХ, вычисленной вручную через ПФ, и график ИХ, полученной с помощью встроенной функции MATLAB (без учета дельта-функции). Функция $plot(t,h1,t,step(sys,t))$ выполняет аналогичную операцию для ПХ. В обоих случаях, если соответствующая характеристика вычислена правильно, графики на рисунке должны совпадать.

6. Вычисление реакции при воздействии одиночного импульса

Вычисление значений реакции и воздействия:

```
t = 0:0.001:1.4*ti;  
f1 = Um*stepfun(t,0) - Um*stepfun(t,ti);  
f2 = (25 - 42.1*exp(-0.545*t) + 18.8*exp(-0.428*t).*cos(0.743*t + ...  
0.415)).*stepfun(t,0) - (25 - 42.1*exp(-0.545*(t-ti)) + ...  
18.8*exp(-0.428*(t-ti)).*cos(0.743*(t-ti) + 0.415)).*stepfun(t,ti);
```

Построение графиков:

```
plot(t,GFC(1)*f1,t,f2), title('Импульсное воздействие (измененное в A(0) раз)  
и реакция на него'), grid, pause;
```

Комментарии:

- **f1** – вектор значений импульсного воздействия, вычисленных в моменты времени, заданные вектором **t**;
- **f2** – вектор значений реакции цепи, вычисленных в моменты времени, заданные вектором **t**;

Проверку правильности нахождения реакции цепи на импульсное воздействие можно осуществить с помощью встроенной функции системы MATLAB:

```
%plot(t,f2,t,lsim(sys,f1,t)), title('Проверка реакции'), pause;
```

Для использования указанной команды необходимо удалить символ «%», расположенный в начале строки. Функция `plot(t,f2,t,lsim(sys,f1,t))` строит на одном рисунке график реакции, вычисленной по выражению, полученному операторным методом, и график реакции, полученной с помощью встроенной функции `lsim(sys,f1,t)`. Если реакция вычислена правильно, графики на рисунке должны совпадать.

7. Определение спектральных характеристик одиночного импульса воздействия

Входные переменные:

```
j = sqrt(-1);  
dw = 0.00003;  
W = 1.4;  
w = 0:dw:W;
```

Расчет спектров импульса:

```
F1 = 2*Um*sin(w*ti/2)./w.*exp(-j*w*ti/2);  
A1 = abs(F1);  
Ph1 = angle(F1);
```

Построение графиков:

```
plot(w,A1), title('Амплитудный спектр импульса'), grid, pause;  
plot(w,Ph1), title('Фазовый спектр импульса'), grid, pause;
```

Комментарии:

- j – мнимая единица ();
- dw – шаг расчета для построения графиков спектров;
- W – значение частоты, соответствующее окончанию расчета;
- $F1$ – вектор значений комплексного спектра импульсного воздействия;
- $A1$ – вектор значений амплитудного спектра импульсного воздействия;
- $Ph1$ – вектор значений фазового спектра импульсного воздействия;
- символ «./» - операция поэлементного деления векторов;
- символ «.^» - операция поэлементного возведения вектора в степень;
- конечное значение частоты и шаг расчета выбираются таким образом, чтобы на графике были отражены характерные точки амплитудного спектра и его ширина.

8. Вычисление спектра реакции при одиночном импульсе на входе цепи

```
H = freqresp(sys,w);  
GFC = abs(H(:));  
PhFC = angle(H(:));
```

```
A2 = A1.*GFC;  
Ph2 = Ph1 + PhFC;
```

```
plot(w,A2), title('Амплитудный спектр реакции'), pause;  
plot(w,Ph2), title('Фазовый спектр реакции'), pause;
```

Комментарии:

- $A2$ – вектор значений амплитудного спектра реакции на одиночный импульс воздействия;
- $Ph1$ – вектор значений фазового спектра реакции на одиночный импульс воздействия.

9. Определение спектра периодического входного сигнала

Входные переменные:

```
N = 5;  
k = 0:N;  
w1 = 2*pi/T;  
t = 0:T/1000:2*T;
```

Периодическое воздействие и его спектры:

$A_1k = [100 \ 200/\pi \ 0 \ 200/(3*\pi) \ 0 \ 200/(5*\pi)];$
 $Ph_1k = [0 \ -\pi/2 \ 0 \ -\pi/2 \ 0 \ -\pi/2];$

Построение графиков:

```
stem(k*w1, A_1k),title('Амплитудный дискретный спектр воздействия');  
hold on;  
plot(0:dw:(N*w1), A1(1:length(0:dw:N*w1))*2/T, '--'), pause;  
hold off;  
stem(k*w1, Ph_1k), title('Фазовый дискретный спектр воздействия');  
hold on;  
plot(0:dw:(N*w1), Ph1(1:length(0:dw:N*w1)), '--'), pause;  
hold off;
```

Комментарии:

- N – число гармоник отрезка ряда Фурье, аппроксимирующего периодическое воздействие;
- k – вектор номеров гармоник отрезка ряда Фурье;
- $f1$ – одиночный импульсный сигнал, соответствующий первому периоду периодического сигнала;
- A_1k – вектор значений амплитудного дискретного спектра периодического воздействия;
- Ph_1k – вектор значений фазового дискретного спектра периодического воздействия;
- функция $stem(...)$ строит графики дискретных спектров;
- команды $plot(...)$ строят графики амплитудного (умноженного на коэффициент $2/T$) и фазового спектров одиночного импульса штриховыми линиями.

Первые два периода воздействия:

$f1 = Um*stepfun(t,0) - Um*stepfun(t,ti) + Um*stepfun(t,T) - ...$
 $Um*stepfun(t,T+ti);$

Аппроксимация воздействия отрезком ряда Фурье:

```
f1_F = zeros(size(t));  
f1_F = f1_F + A_1k(1)/2;  
plot(t,f1_F, ':k','LineWidth',1),...  
title('Периодическое воздействие и его аппроксимация');  
hold on;  
plot(t,f1,'--k','LineWidth',0.5);  
n = 1;  
for i = 2:N+1  
    f1_F = f1_F + A_1k(i)*cos(n*w1*t + Ph_1k(i));  
    plot(t,A_1k(i)*cos(n*w1*t + Ph_1k(i)), ':k', 'LineWidth', 1);
```

```

    n = n+1;
end
plot(t,f1_F, 'k','LineWidth',2), grid, pause;
hold off;

```

Комментарии:

- $w1$ – частота первой гармоники ряда Фурье;
- T – период воздействия;
- t – вектор дискретных отсчетов времени, заданных в интервале от 0 до T с шагом $T/1000$;
- $f1_F$ – вектор значений сигнала, аппроксимирующего периодическое воздействие;
- $zeros(...)$ – функция, возвращающая матрицу, заполненную нулями; размерность матрицы задается в аргументе функции;
- $size(t)$ – функция, возвращающая размерность вектора t ;
- оператор *for* организует циклы, внутри которых вычисляются значения составляющих сигнала, соответствующих отдельным гармоникам ряда Фурье; команда $plot(...)$ внутри каждого цикла строит график соответствующей гармоники ряда Фурье тонкой пунктирной линией.

10. Приближенный расчет реакции при периодическом воздействии

Входные переменные:

```
w = 0:w1:N*w1;
```

Вычисление спектров реакции:

```

H = freqresp(sys,w);
GFC = abs(H(:))';
PhFC = angle(H(:))';
A_2k = A_1k.*GFC;
Ph_2k = Ph_1k + PhFC;

```

Построение графиков:

```

stem(k*w1, A_2k), title('Амплитудный дискретный спектр реакции');
hold on;
plot(0:dw:(N*w1), A2(1:length(0:dw:N*w1))*2/T, '--'), pause;
hold off;
stem(k*w1, Ph_2k), title('Фазовый дискретный спектр реакции');
hold on;
plot(0:dw:(N*w1), Ph2(1:length(0:dw:N*w1)), '--'), pause;
hold off;

```

Реакция при периодическом воздействии:

```
f2_F = zeros(size(t));
```

```

f2_F = f2_F + A_2k(1)/2*cos(Ph_2k(1));
n = 1;
for i = 2:N+1
    f2_F = f2_F + A_2k(i)*cos(n*w1*t + Ph_2k(i));
    n = n+1;
end

```

Построение графика:

```

plot(t,f1*GFC(1),t,f2_F),...
title('Аппроксимация реакции отрезком ряда Фурье'), grid, pause;

```

Комментарии:

- \boldsymbol{w} – вектор дискретных отсчетов угловой частоты;
- $\boldsymbol{H}(\cdot)$ – вектор значений комплексной частотной характеристики цепи, соответствующих отсчетам угловой частоты (вектор \boldsymbol{w});
- \boldsymbol{A}_{2k} – вектор значений амплитудного дискретного спектра реакции;
- \boldsymbol{Ph}_{2k} – вектор значений фазового дискретного спектра реакции;
- $\boldsymbol{f2}_F$ – вектор значений сигнала, аппроксимирующего реакцию.

Содержание

Курсовое проектирование по теории электрических цепей.....	3
Общие требования	3
Тема 1. Исследование характеристик линейных электрических цепей.....	4
Тема 2. Исследование искажений сигналов на выходе фильтра нижних частот	20
Тема 3. Исследование линейной цепи в переходных и установившемся периодическом режимах.....	44
Тема 4. Анализ линейной цепи	62
Тема 5. Исследование прохождения сигналов через линейную активную электрическую цепь.....	84
Тема 6. Определение характеристик линейных цифровых фильтров	97
Тема 7. Анализ линейной и нелинейной цепей	106
Тема 8. Анализ и моделирование переходных процессов в линейной цепи	128
Список литературы.....	149
Приложения.....	150
А. Mathcad для электротехнических расчетов	150
Б. Анализ линейной электрической цепи с использованием пакета MATLAB.....	166

Барков Анатолий Павлович
Бычков Юрий Александрович
Дегтярев Сергей Андреевич
Завьялов Андрей Евгеньевич
Золотницкий Владимир Михайлович
Зубарев Александр Владимирович
Иншаков Юрий Михайлович
Морозов Дмитрий Александрович
Панкин Валерий Васильевич
Портной Марк Саулович
Соклакова Марина Вячеславовна
Соколов Валентин Николаевич
Соловьева Елена Борисовна
Чернышев Эдуард Павлович