1. Равновесие тела под действием плоской системы сил

Плоской называется система сил, расположенных в одной плоскости.

Пусть на твердое тело действует система сил $\left\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right\}$, лежащих в плоскости Oxy.

По основной теореме статики плоскую систему сил можно привести к произвольно выбранному центру, заменив эквивалентной системой, состоящей из силы и пары сил. Сила называется главным вектором системы сил, равна геометрической сумме всех сил системы и приложена в центре приведения, $\vec{R} = \Sigma\overrightarrow{F_k}$. Момент пары сил называется главным моментом системы сил относительно центра и для плоской системы сил равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно этого центра, $M_O = \Sigma m_0\left(\overrightarrow{F_k}\right)$.

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно выполнение условий $\begin{cases} \vec{R} = 0; \\ M_O = 0. \end{cases}$

Учитывая, что модуль главного вектора равен $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, где $R_x = \Sigma F_{kx}$, $R_y = \Sigma F_{ky}$, получаем основную или первую форму условий равновесия плоской системы сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0;\ \Sigma F_{ky} = 0;\ \Sigma m_o\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0.$$

Если ось Ox не перпендикулярна прямой AB, то можно записать вторую форму условий равновесия:

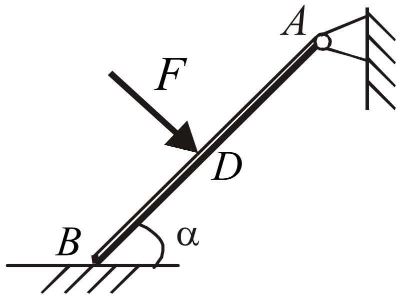
$$\Sigma F_{kx} = 0;\ \Sigma m_A\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0;\ \Sigma m_B\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0.$$

Если точки A, B и C не лежат на одной прямой, то получаем третью форму условий равновесия:

$$\Sigma m_A\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0;\ \Sigma m_B\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0;\ \Sigma m_C\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0.$$

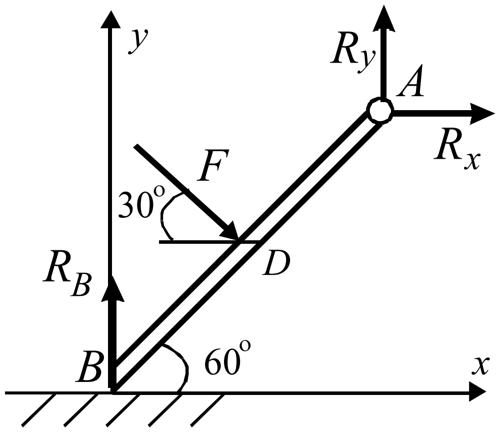
Пример 1

Балка AB находится в равновесии под действием силы $F = 40\,\text{Н}$, перпендикулярной балке. Определить реакции цилиндрического шарнира в точке A и абсолютно гладкой опоры в точке B, если $AD = DB$ и угол $\alpha = 60^\circ$. Весом балки пренебречь.



Решение:

1. Рассматриваем равновесие балки AB.
2. На балку действуют активная сила $\vec{F}$ и реакции опор в точках A и B. Реакцию цилиндрического шарнира раскладываем на две взаимно перпендикулярные составляющие R_x, R_y, тогда модуль реакции в точке A будет равен $R_A = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$. Реакция в точке B перпендикулярна гладкой горизонтальной плоскости.



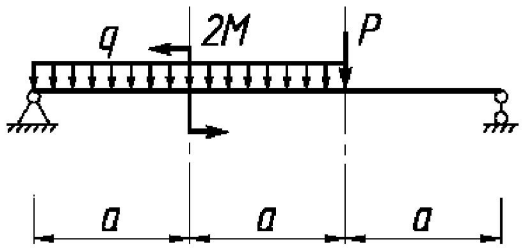
3. Вводим оси координат Bx, By и составляем уравнения равновесия, используя условия равновесия в первой форме:

$$\begin{cases} \Sigma F_{kx} = 0 \\ \Sigma F_{ky} = 0 \\ \Sigma m_A\left(\vec{F_k}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x + F\cos 30^\circ = 0 \\ R_y + R_B - F\sin 30^\circ = 0 \\ F \cdot \dfrac{AB}{2} - R_B \cdot AB\cos 60^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = -20\sqrt{3} \\ R_y = -20 \\ R_B = 40. \end{cases}$$

Величина R_x оказалась отрицательной. Следовательно, составляющая R_x имеет направление, противоположное указанному на чертеже. Полная реакция шарнира A равна $R_A = \sqrt{\left(20\sqrt{3}\right)^2 + \left(-20\right)^2} = 40\,\text{Н}$.

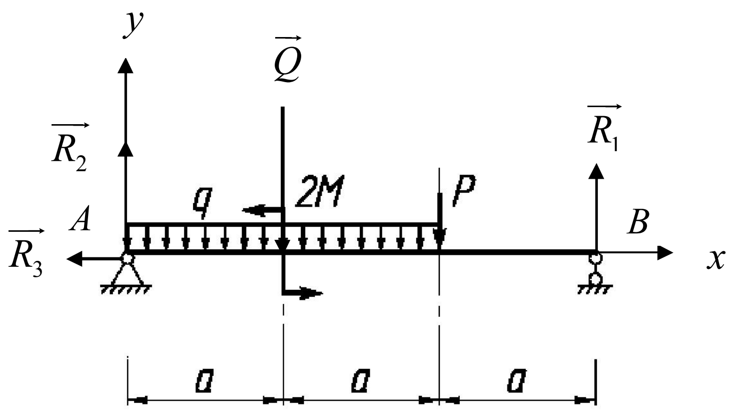
Ответ: $R_A = 40\,\text{Н}$, $R_B = 20\,\text{Н}$.

Пример 2



Балка находится в равновесии под действием сосредоточенной силы $P = 20\,\text{Н}$, пары сил с моментом $2M = 40\,\text{Нм}$ и равномерно распределенной нагрузки интенсивности $q = 10\,\text{Н/м}$. Определить, используя вторую форму условий равновесия плоской системы сил, реакции неподвижного шарнира и идеального стержня, если $a = 2\,\text{м}$. Сделать проверку. Весом балки пренебречь.

Решение:



1. Рассматриваем равновесие балки.
2. На балку действуют активная сила $\vec{P}$, пара сил с моментом $2M$, равнодействующая распределенной нагрузки $Q = q \cdot 2a = 40\,\text{кН}$, реакция идеального стержня $\vec{R_1}$ и реакции цилиндрического шарнира $\vec{R_2}$ и $\vec{R_3}$.
3. Вводим оси координат и составляем уравнения равновесия, используя условия равновесия во второй форме:

$$\begin{cases} \Sigma F_{kx} = 0 \\ \Sigma m_A\left(\vec{F_k}\right) = 0 \\ \Sigma m_B\left(\vec{F_k}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -R_3 = 0 \\ -Q \cdot a + 2M - P \cdot 2a + R_1 \cdot 3a = 0 \\ P \cdot a + 2M + Q \cdot 2a - R_2 \cdot 3a = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $R_1 = 20\,\text{кН},\ R_2 = 40\,\text{кН}$.

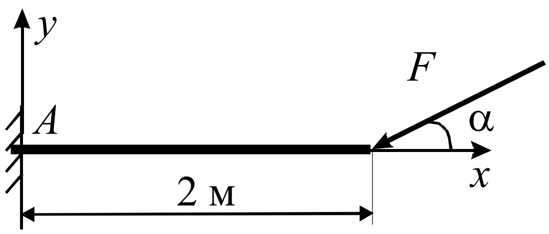
Для проверки используем уравнение

$\Sigma F_{ky} = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 - P - Q = 0,\ 20 + 40 - 20 - 40 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Ответ: $R_1 = 20\,\text{кН},\ R_2 = 40\,\text{кН},\ R_3 = 0$.

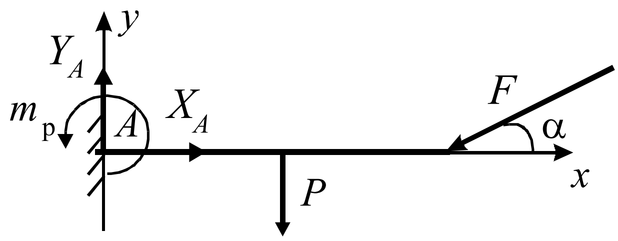
Пример 3

Консольная балка с заделкой на левом конце находится в равновесии под действием силы $F = 10\text{Н}$. Определить реакции жесткой заделки в точке A, если угол $\alpha = 30^\circ$, вес балки $P = 30\,\text{Н}$.



Решение:

1. Рассматриваем равновесие балки.
2. На балку действуют активные силы $\vec{F}$, $\vec{P}$ и реакции жесткой заделки, состоящие из двух составляющих силы $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и реактивного момента m_p.



3. Вводим оси координат Ax, Ay и составляем уравнения равновесия, используя условия равновесия в первой форме:

$$\begin{cases} \Sigma F_{kx} = 0 \\ \Sigma F_{ky} = 0 \\ \Sigma m_A\left(\vec{F_k}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A - F\cos 30^\circ = 0 \\ Y_A - P - F\sin 30^\circ = 0 \\ -F\cdot 2\sin 30^\circ - P\cdot 1 + m_p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 5\sqrt{3} \\ Y_A = 35 \\ m_p = 40 \end{cases}.$$

Ответ: $X_A = 5\sqrt{3}\,\text{Н}$, $Y_A = 35\,\text{Н}$, $m_p = 40\,\text{Нм}$.

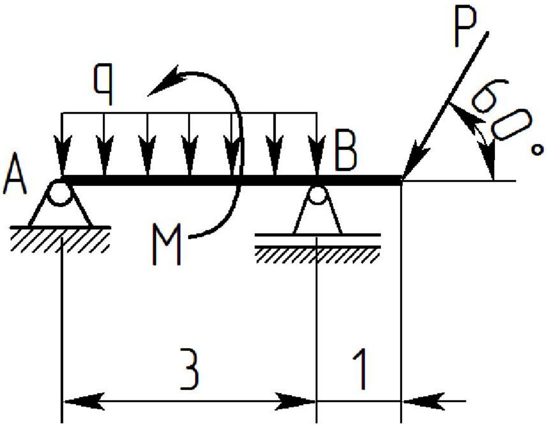
Задания 1. Равновесие тела под действием плоской системы сил

<table>
<tr>
<td>

Задание 1.1

Дано: $P = 12$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 6$ кНм.

Определить реакции цилиндрического шарнира в точке A и шарнирно-подвижной опоры в точке B.

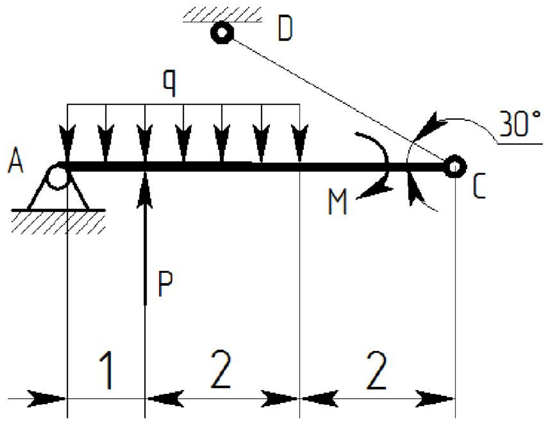


</td>
<td>

Задание 1.2

Дано: $P = 4$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 8$ кНм.

Определить реакции цилиндрического шарнира в точке A и усилие в стержне CD.

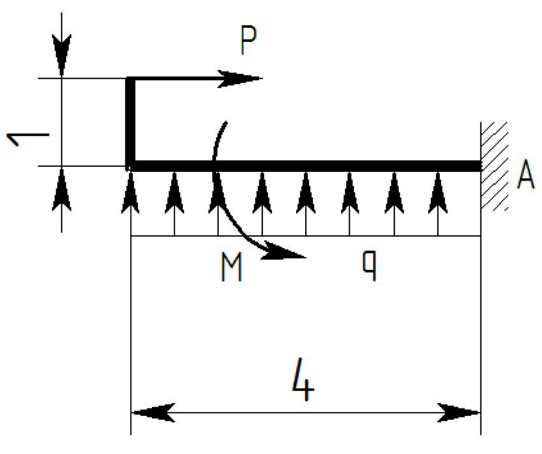


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Задание 1.3

Дано: $P = 10$ кН, $q = 4$ кН/м, $M = 12$ кНм.

Определить реакции жесткой заделки в точке A.



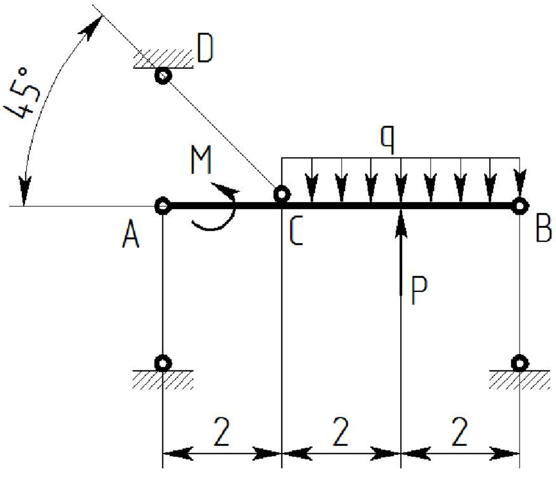
</td>
<td>

Задание 1.4

Дано:

$P = 6$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 10$ кНм.

Определить усилия в стержнях в точках A, B и C.

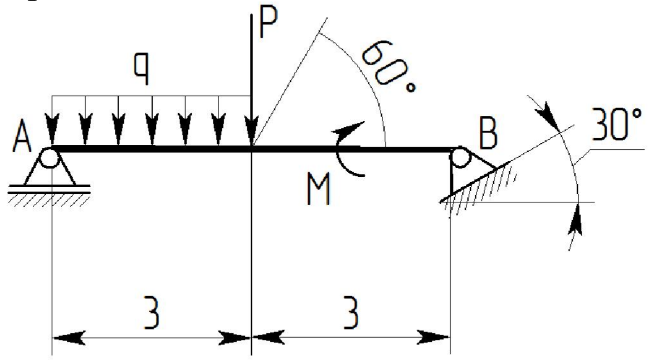


</td>
</tr>
</table>

Задание 1.5

Дано: $P = 14$ кН, $q = 4$ кН/м, $M = 6$ кНм.

Определить реакции цилиндрического шарнира в точке *B* и шарнирно-подвижной опоры в точке *A*.

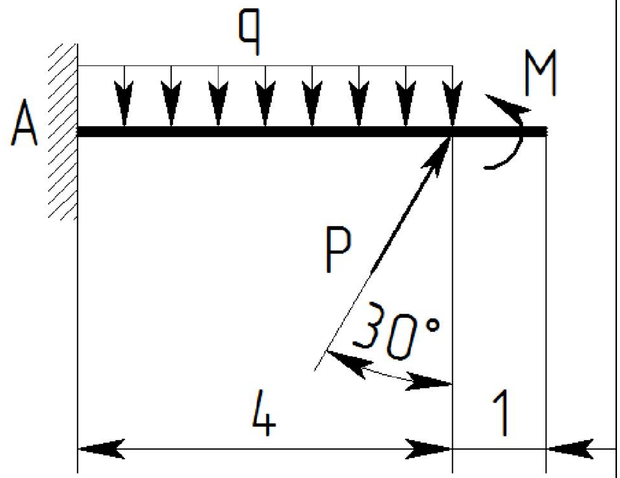


Задание 1.6

Дано:

$P = 12$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 8$ кНм.

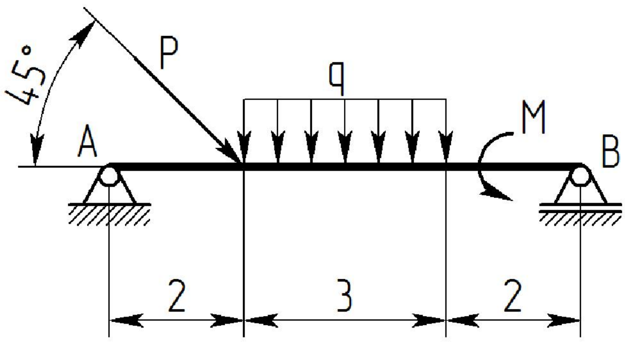
Определить реакции жесткой заделки в точке *A*.



Задание 1.7

Дано: $P = 12$ кН, $q = 6$ кН/м, $M = 10$ кНм.

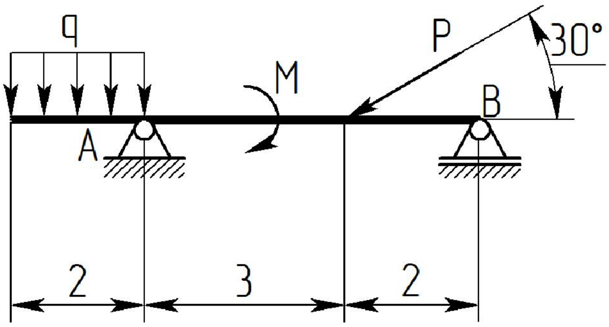
Определить реакции цилиндрического шарнира в точке *A* и шарнирно-подвижной опоры в точке *B*.



Задание 1.8

Дано: $P = 8$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 6$ кНм.

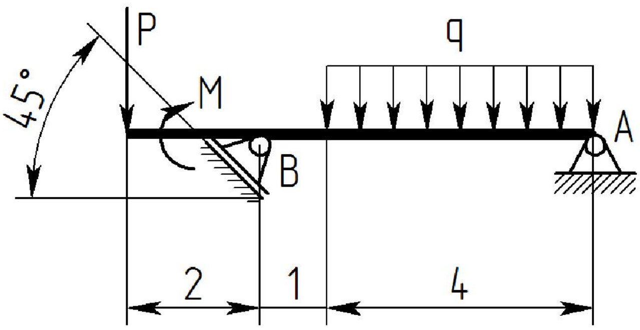
Определить реакции цилиндрического шарнира в точке *A* и шарнирно-подвижной опоры в точке *B*.



Задание 1.9

Дано: $P = 8$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 12$ кНм.

Определить реакции цилиндрического шарнира в точке A и шарнирно-подвижной опоры в точке B.

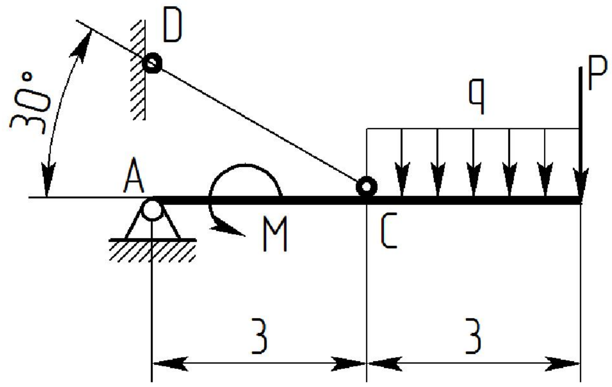


Задание 1.10

Дано:

$P = 2$ кН, $q = 4$ кН/м, $M = 14$ кНм.

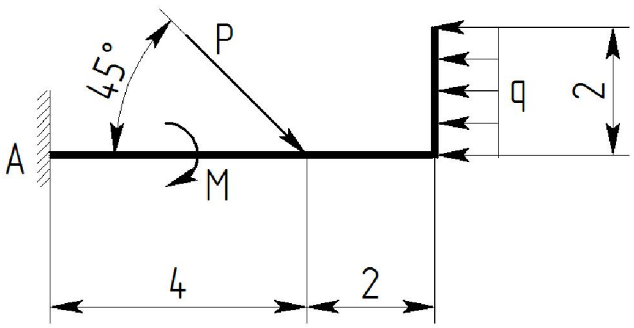
Определить реакции цилиндрического шарнира в точке A и усилие в стержне CD.



Задание 1.11

Дано: $P = 8$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 9$ кНм.

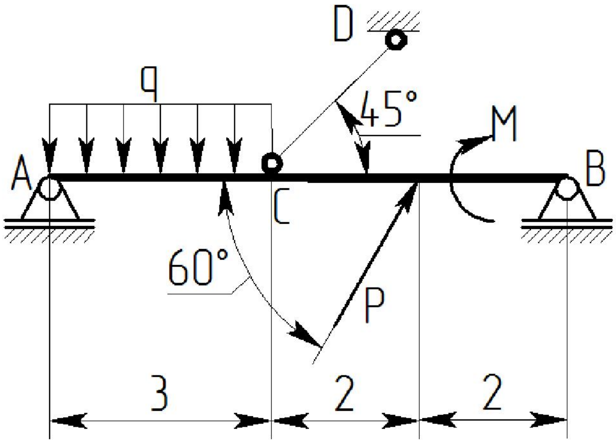
Определить реакции жесткой заделки в точке A.



Задание 1.12

Дано: $P = 7$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 4$ кНм.

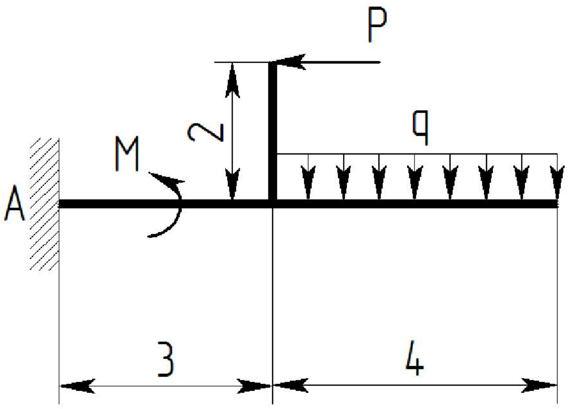
Определить реакции цилиндрического шарнира в точке A и усилие в стержне CD.



Задание 1.13

Дано: $P = 8$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 12$ кНм.

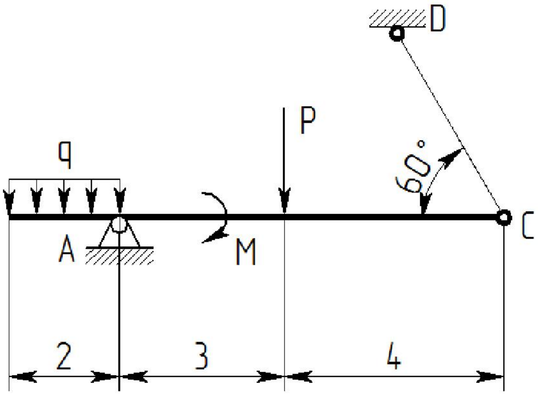
Определить реакции жесткой заделки в точке A.



Задание 1.14

Дано: $P = 12$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 7$ кНм.

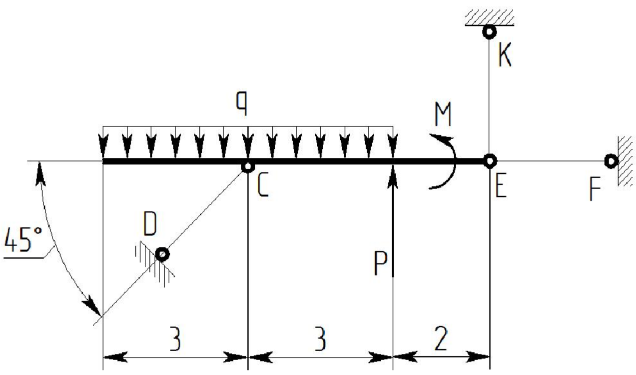
Определить реакции цилиндрического шарнира в точке A и усилие в стержне CD.



Задание 1.15

Дано: $P = 10$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 8$ кНм.

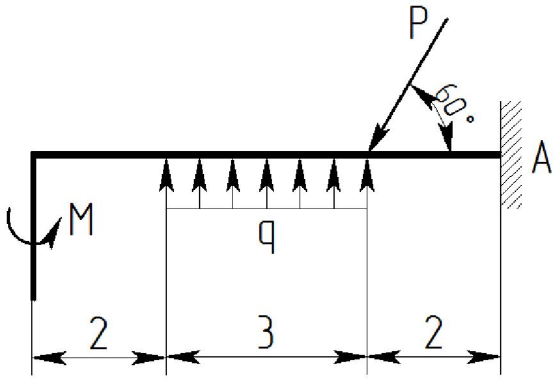
Определить усилия в стержнях CD, EK и EF.

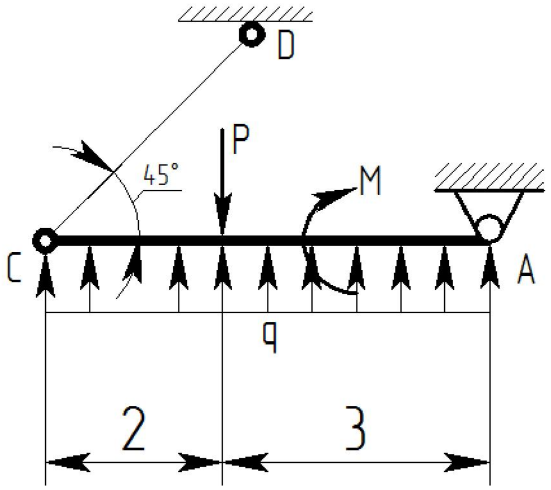
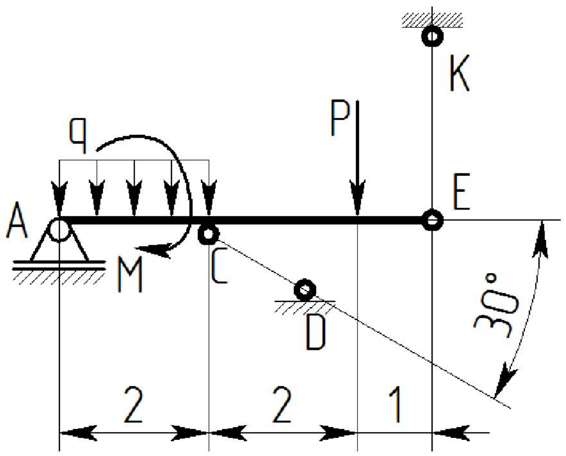
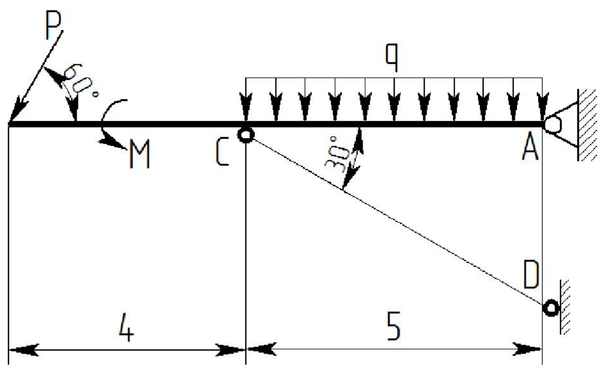
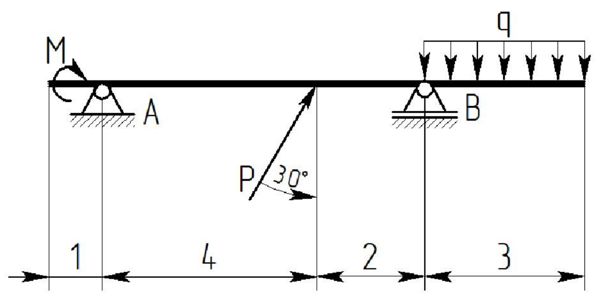


Задание 1.16

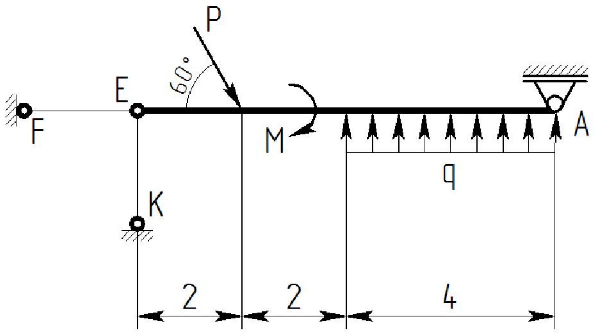
Дано: $P = 5$ кН, $q = 4$ кН/м, $M = 12$ кНм.

Определить реакции жесткой заделки в точке A.

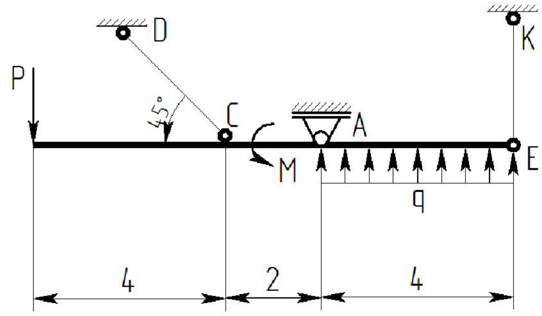


Задание 1.17 Дано: $P = 3$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 5$ кНм. Определить реакции цилиндрического шарнира в точке A и усилие в стержне CD.  	Задание 1.18 Дано: $P = 6$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 8$ кНм. Определить реакции шарнирно-подвижной опоры в точке A и усилия в стержнях CD и EK. 
Задание 1.19 Дано: $P = 14$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 2$ кНм. Определить реакции цилиндрического шарнира в точке A и усилие в стержне CD.  	Задание 1.20 Дано: $P = 12$ кН, $q = 6$ кН/м, $M = 8$ кНм. Определить реакции цилиндрического шарнира в точке A и шарнирно-подвижной опоры в точке B. 

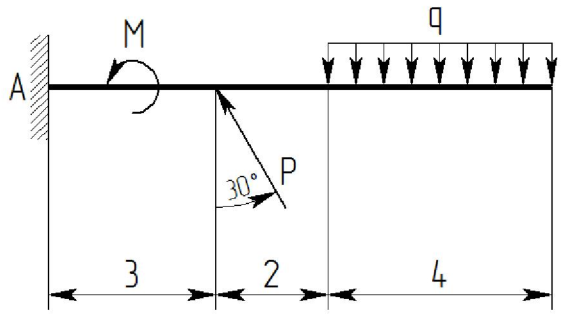
Задание 1.21
Дано: $P = 13$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 6$ кНм.
Определить реакции шарнирно-подвижной опоры в точке A и усилия в стержнях EK и EF.



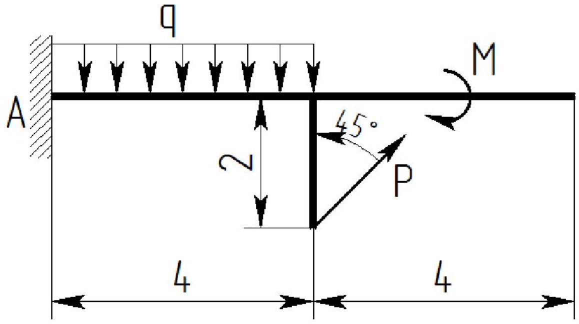
Задание 1.22
Дано: $P = 3$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 7$ кНм.
Определить реакции шарнирно-подвижной опоры в точке A и усилия в стержнях CD и EK.



Задание 1.23
Дано: $P = 12$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 8$ кНм.
Определить реакции жесткой заделки в точке A.



Задание 1.24
Дано:
$P = 10$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 12$ кНм.
Определить реакции жесткой заделки в точке A.



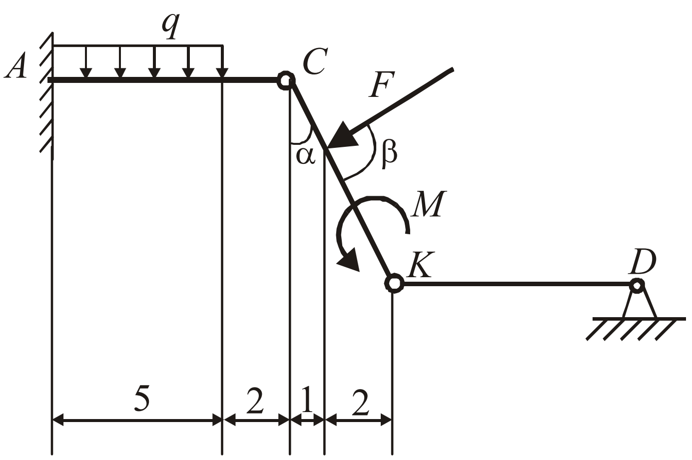
2. Равновесие системы тел

Конструкция называется статически определимой, если число неизвестных реакций связей равно числу независимых уравнений равновесия.

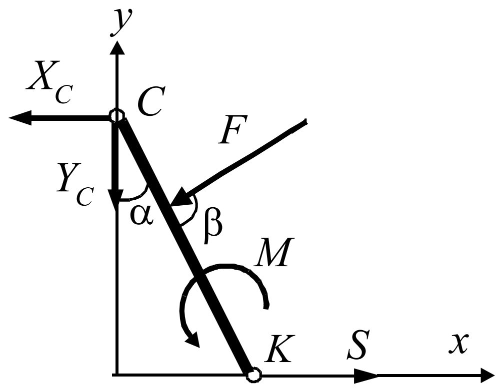
Если конструкция состоит из двух частей, то для определения реакций можно использовать любой из двух способов:

1. Разбить конструкцию на части и рассмотреть равновесие каждой.
2. Рассмотреть равновесие конструкции в целом, а затем равновесие любой ее части.

Пример 1 (первый способ)



Конструкция состоит из двух балок AC и CK, соединенных между собой шарниром в точке C. Балка AC имеет в точке A жесткую заделку и нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = 20\,\text{Н/м}$. Балка CK закреплена в точке K при помощи идеального стержня KD и нагружена сосредоточенной силой $F = 30\,\text{Н}$ и парой сил с моментом $M = 15\,\text{Нм}$. *Определить* реакции опор в точках A, C и K, пренебрегая весом балок. Принять $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$, размеры в метрах показаны на чертеже.



Разбиваем конструкцию на две части и сначала рассмотрим ту часть, на которую действует меньшее число неизвестных реакций связей. В данной задаче это балка CK. На балку действуют активные силы: сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M, а также реакции X_C, Y_C цилиндрического шарнира C и усилие $\vec{S}$ в идеальном стержне KD. Вводим оси координат и составляем уравнения равновесия, используя условия равновесия в первой форме:

$$\begin{cases} \Sigma F_{kx} = 0 \\ \Sigma F_{ky} = 0 \\ \Sigma m_C\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -X_C - F\cos\alpha + S = 0 \\ Y_C - F\sin\alpha = 0. \\ -F\cdot\dfrac{1}{\sin\alpha} + S\cdot 3\mathrm{ctg}\alpha + M = 0 \end{cases}.$$

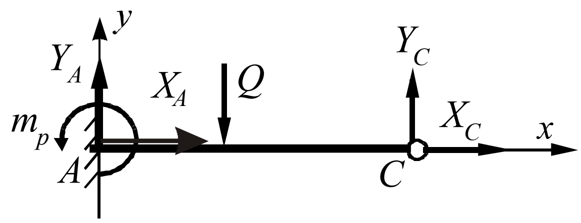
Учитывая, что $\alpha = 30^\circ$ и $\sin\alpha = \dfrac{1}{2},\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{3}$, находим

$Y_C = F\sin\alpha = 30\cdot\dfrac{1}{2} = 15\ \text{Н}$,

$S\cdot 3\mathrm{ctg}\alpha = F\cdot\dfrac{1}{\sin\alpha} - M, \quad S\cdot 3\sqrt{3} = 60 - 15,\ \ S = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66\,\text{Н}$,

$X_C = S - F\cos\alpha = 5\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -10\sqrt{3} \approx -17{,}3\,\text{Н}$.

Затем рассматриваем равновесие балки AC. На балку действует равнодействующая распределенной нагрузки $Q = q\cdot 5 = 20\cdot 5 = 100\,\text{Н}$, реакции



жесткой заделки X_A, Y_A, m_p и реакции X_C, Y_C цилиндрического шарнира C, направленные, по III закону Ньютона, противоположно показанным для балки CK. Вводим оси координат и составляем уравнения равновесия, используя условия равновесия в первой форме:

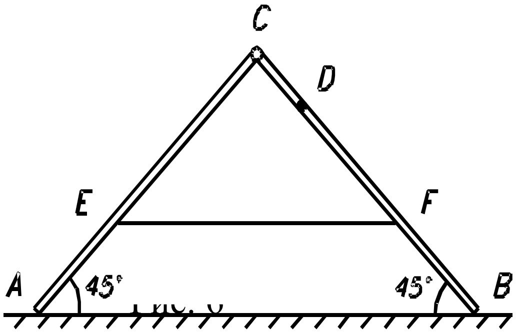
$$\begin{cases} \Sigma F_{kx} = 0 \\ \Sigma F_{ky} = 0 \\ \Sigma m_A\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A + X_C = 0 \\ Y_A - Q + Y_C = 0 \\ -Q\cdot 2{,}5 + Y_C\cdot 7 + m_p = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим $\begin{cases} X_A = -X_C = 17{,}3\,\text{Н} \\ Y_A = Q - Y_C = 100 - 15 = 85\,\text{Н} \\ m_p = Q\cdot 2{,}5 - Y_C\cdot 7 = 100\cdot 2{,}5 - 15\cdot 7 = 145\text{Нм}. \end{cases}$

Ответ: $X_A = 17{,}3$ Н, $Y_A = 85$ Н, $m_p = 145$ Нм,

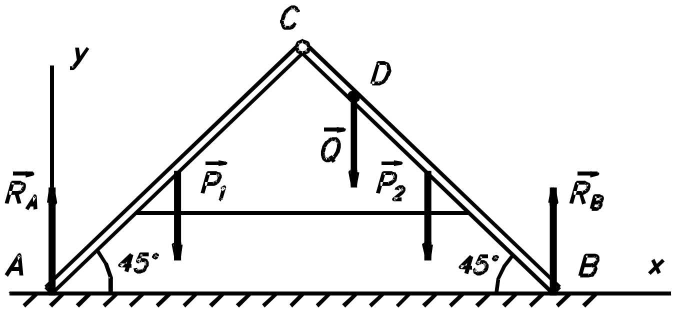
$X_C = -17{,}3$ Н, $Y_C = 15$ Н, $S = 8{,}66$ Н.

Пример 2 (второй способ)



На гладкой горизонтальной плоскости стоит передвижная лестница, состоящая из двух частей *AC* и *BC*, длиной 3м и весом 120 Н каждая, соединенных шарниром *C* и веревкой *EF*; расстояния *BF* = *AE* = 1 м; центр тяжести каждой из частей *AC* и *BC* находится в ее середине. В точке *D* на расстоянии $CD = 0{,}6$ м стоит человек весом 720 Н. *Определить* реакции пола и шарнира, а также натяжение *T* веревки *EF*, если $\angle BAC = \angle ABC = 45°$.

Решение:



1. Для определения реакций пола рассмотрим равновесие всей лестницы и покажем действующие на нее силы: силу тяжести человека $\vec{Q}$, приложенную в точке *D*, силы тяжести частей лестницы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, приложенные в середине частей *AC* и *BC*, и реакции гладкой плоскости $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$, направленные перпендикулярно плоскости.

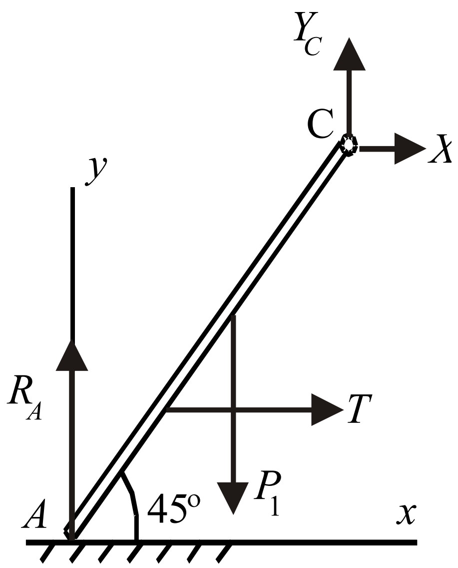
Для полученной плоской системы параллельных сил составляем два уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A + R_B - P_1 - P_2 - Q = 0 \\ P_2 \cdot \dfrac{CB}{2} \cdot \cos 45^\circ + Q \cdot DB \cdot \cos 45^\circ + P_1 \cdot \left(CB + \dfrac{AC}{2} \right) \cdot \cos 45^\circ - \\ -R_A \cdot \left(CB + AC \right) \cdot \cos 45^\circ = 0. \end{cases}$$

Подставляя в эти уравнения числовые значения заданных величин, и решая систему уравнений, находим искомые реакции: $R_A = 408$ Н, $R_B = 552$ Н.

2. Для определения натяжения веревки и реакции шарнира *C* расчленим систему и рассмотрим равновесие левой части лестницы. Покажем действующие на нее силы: $\vec{P}_1$ – силу тяжести части *AC*, $\vec{T}$ – натяжение веревки *EF*, составляющие $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ реакции шарнира *C* и $\vec{R}_A$ – реакцию плоскости. Для полученной произвольной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:



$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_C\left(\vec{F}_k\right) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} X_C + T = 0, \\ R_A + Y_C - P_1 = 0, \\ -R_A \cdot AC \cdot \cos 45^\circ + T \cdot EC \cdot \sin 45^\circ + P_1 \cdot \dfrac{AC}{2} \cdot \cos 45^\circ = 0. \end{cases}$$

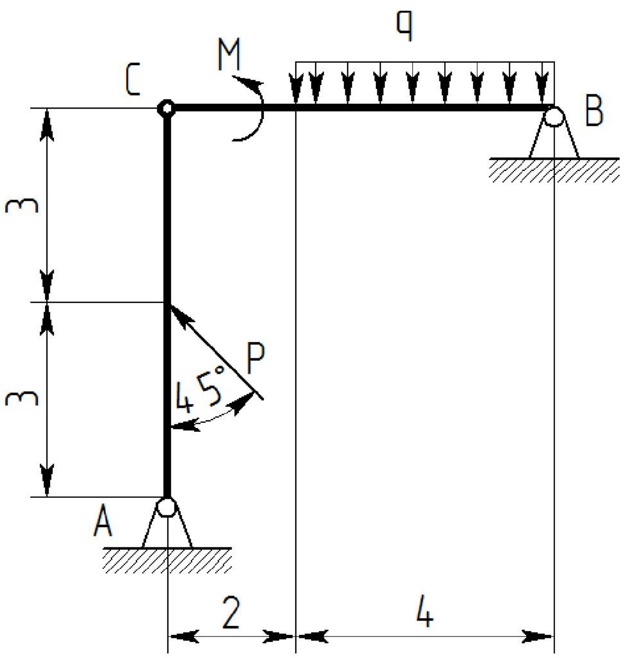
Подставляя в составленные уравнения числовые значения, и решая систему уравнений, находим искомые реакции: $X_C = -522$ Н, $Y_C = -288$ Н, $T = 522$ Н. Знаки указывают, что $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ направлены противоположно указанным на рисунках.

Замечание. На правую часть лестницы в точке *C* будут действовать силы $\vec{X}'_C$, Y'_C, численно равные найденным $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, но направленные в противоположную сторону в силу III закона Ньютона, т.е. $\vec{X}_C = -\vec{X}'_C$, $\vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C$, $X_C = X'_C = -522\,\text{Н}$, $Y_C = Y'_C = -288\,\text{Н}$.

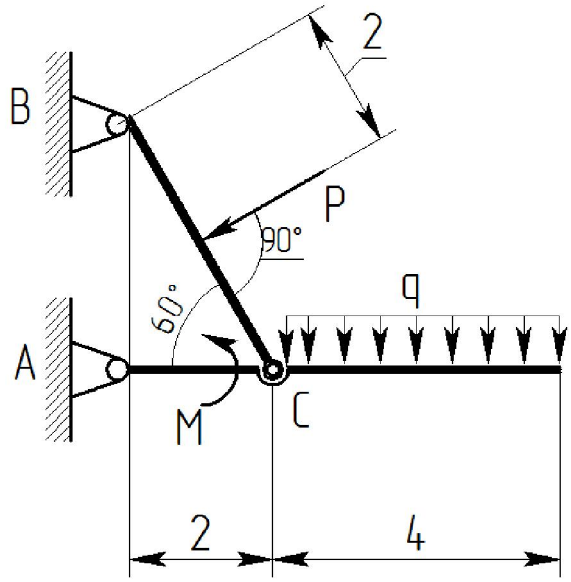
Ответ: $R_A = 408$ Н, $R_B = 552\,\text{Н}$, $X_C = -522\,\text{Н}$, $Y_C = -288$ Н, $T = 522\,\text{Н}$.

Задания 2. Равновесие системы тел

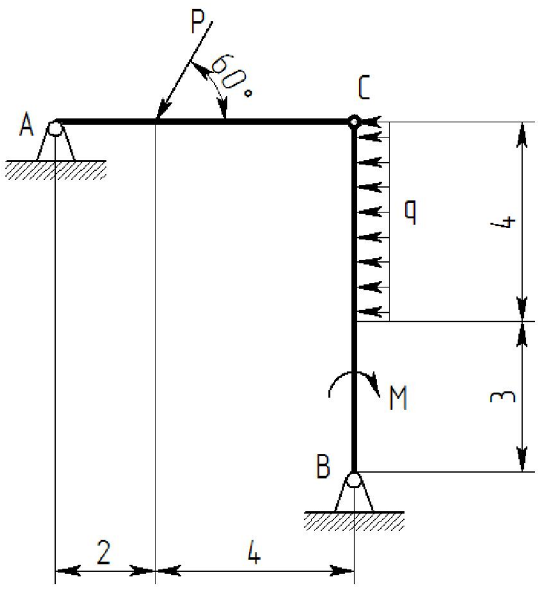
Задание 2.1
Дано:
$P = 12$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 40$ кНм.
Определить реакции цилиндрических шарниров в точках *A*, *B* и *C*.



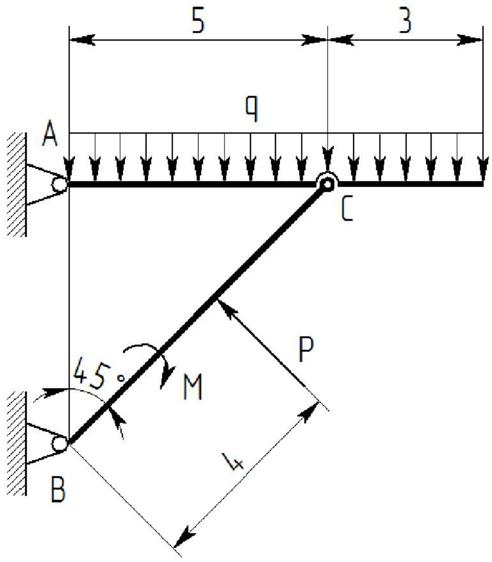
Задание 2.2
Дано:
$P = 8$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 12$ кНм.
Определить реакции цилиндрических шарниров в точках *A*, *B* и *C*.



Задание 2.3
Дано: $P = 2$ кН, $q = 4$ кН/м, $M = 14$ кНм.
Определить реакции цилиндрических шарниров в точках *A*, *B* и *C*.



Задание 2.4
Дано:
$P = 6$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 8$ кНм.
Определить реакции цилиндрических шарниров в точках *A*, *B* и *C*.



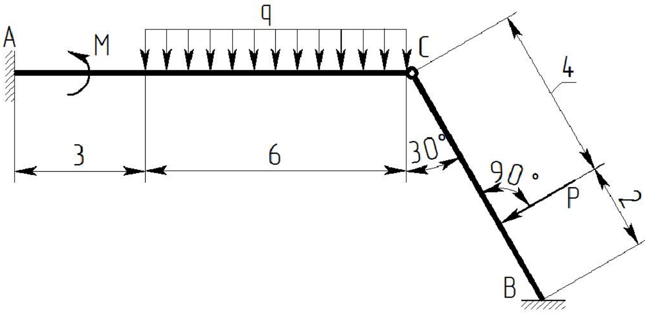
Задание 2.5

Задание 2.6

Дано:

$P = 14\,\text{кН},\ \ q = 4\,\text{кН/м},\ \ M = 10\,\text{кНм}.$

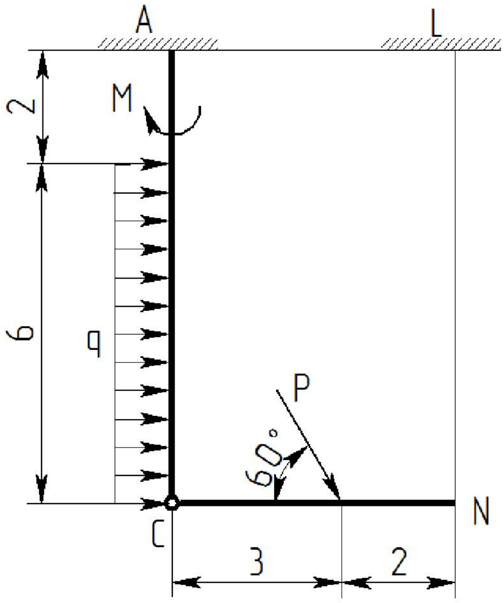
Определить реакции жесткой заделки в точке *A*, цилиндрического шарнира в точке *C* и абсолютно гладкой плоскости в точке *B*.



Дано:

$P = 16\,\text{кН},\ \ q = 2\,\text{кН/м},\ \ M = 24\,\text{кНм}.$

Определить реакции жесткой заделки в точке *A*, цилиндрического шарнира в точке *C* и натяжение нити NL.

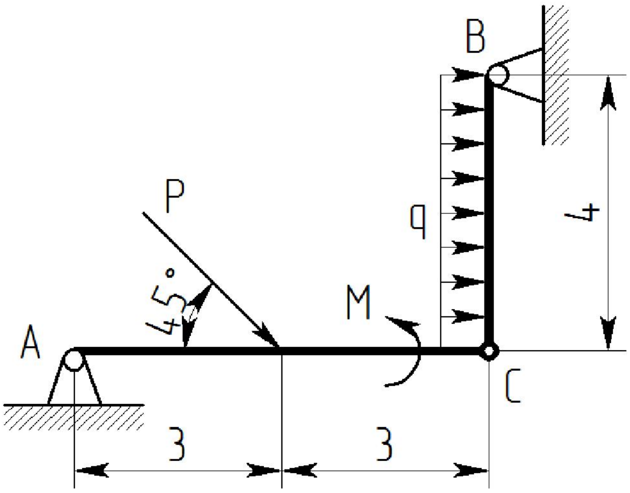


Задание 2.7

Дано:

$P = 18\,\text{кН},\ \ q = 3\,\text{кН/м},\ \ M = 22\,\text{кНм}.$

Определить реакции цилиндрических шарниров в точках *A*, *B* и *C*.

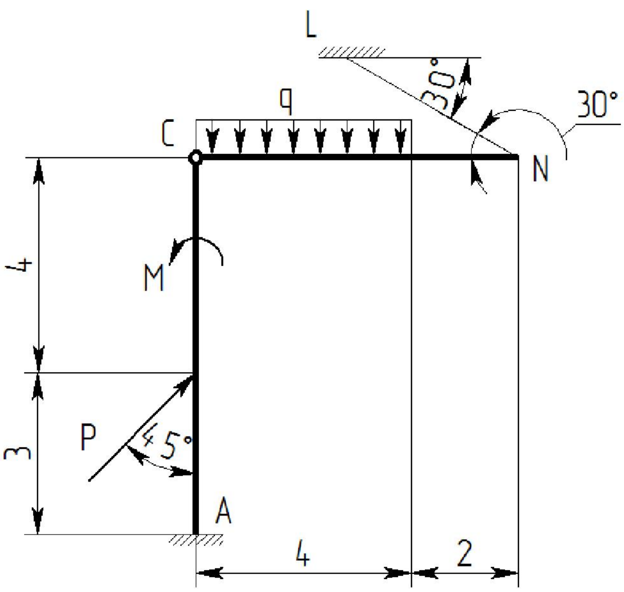


Задание 2.8

Дано:

$P = 12\,\text{кН},\ \ q = 2\,\text{кН/м},\ \ M = 16\,\text{кНм}.$

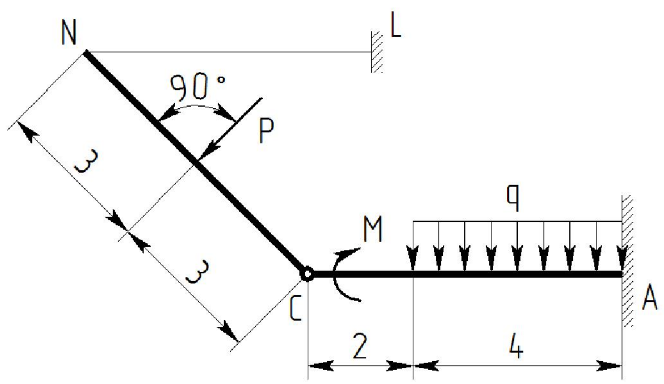
Определить реакции жесткой заделки в точке *A*, цилиндрического шарнира в точке *C* и натяжение нити NL.



Задание 2.9

Дано: $P = 16$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 12$ кНм.

Определить реакции жесткой заделки в точке *A*, цилиндрического шарнира в точке *C* и натяжение нити NL.

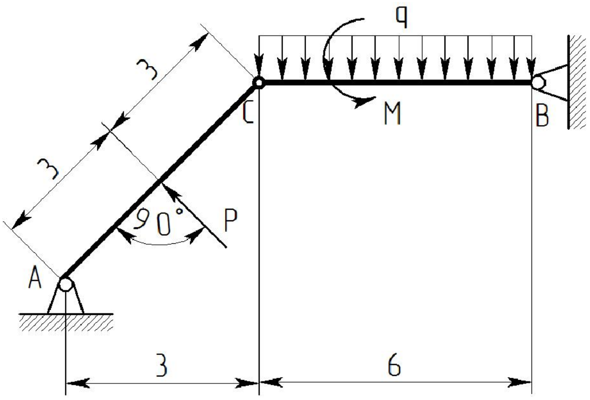


Задание 2.10

Дано:

$P = 20$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 18$ кНм.

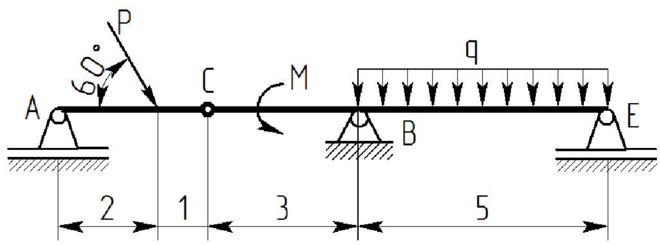
Определить реакции цилиндрических шарниров в точках *A*, *B* и *C*.



Задание 2.11

Дано: $P = 14$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 20$ кНм.

Определить реакции цилиндрических шарниров в точках *B* и *C* и шарнирно-подвижных опор в точках *A* и *E*.

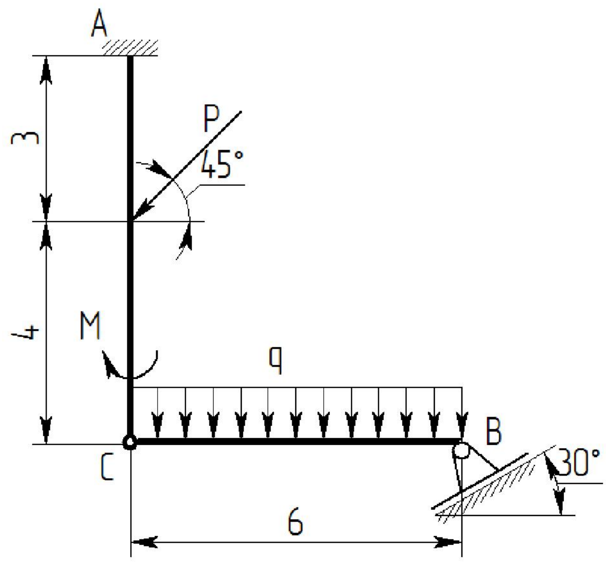


Задание 2.12

Дано:

$P = 24$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 8$ кНм.

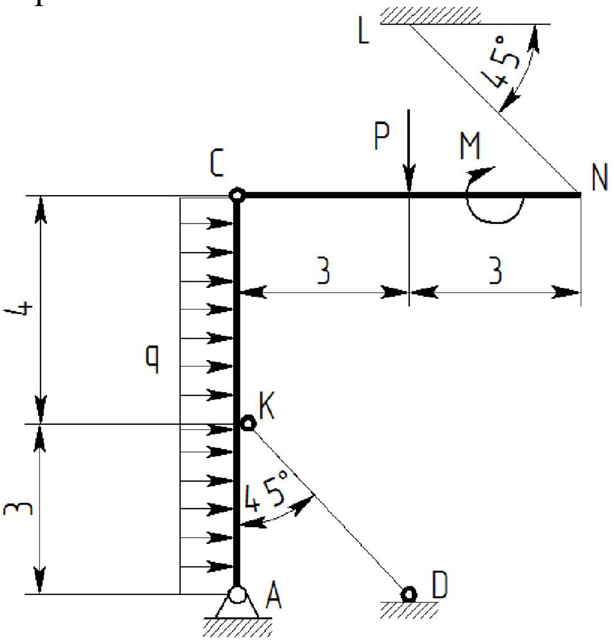
Определить реакции жесткой заделки в точке *A*, цилиндрического шарнира в точке *C* и шарнирно-подвижной опоры в точке *B*.



Задание 2.13

Дано: $P = 7$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 12$ кНм.

Определить реакции цилиндрических шарниров в точках A и C и усилия в стержнях DK и NL.

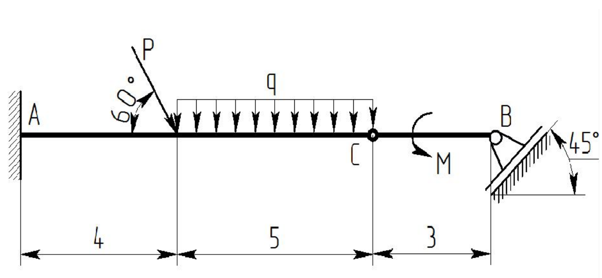


Задание 2.14

Дано:

$P = 8$ кН, $q = 4$ кН/м, $M = 14$ кНм.

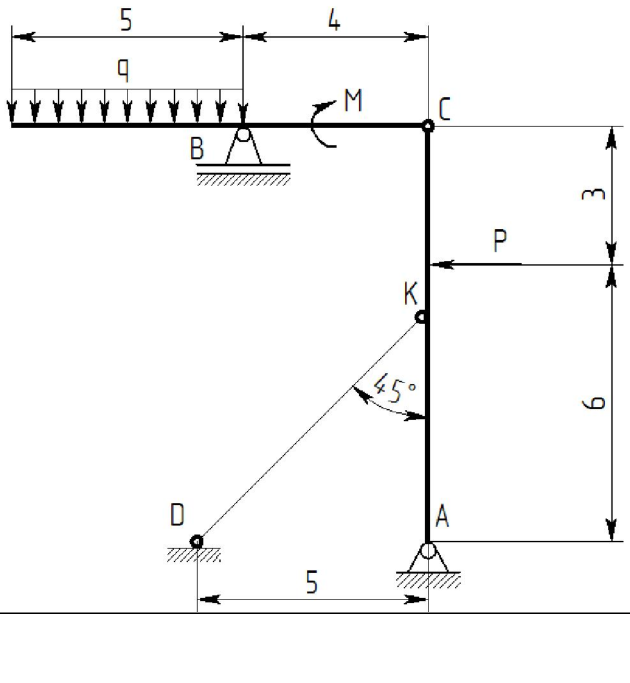
Определить реакции жесткой заделки в точке A, цилиндрического шарнира в точке C и шарнирно-подвижной опоры в точке B.



Задание 2.15

Дано: $P = 14$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 8$ кНм.

Определить реакции цилиндрических шарниров в точках A и C, шарнирно-подвижной опоры в точке B и усилие в стержне KD.

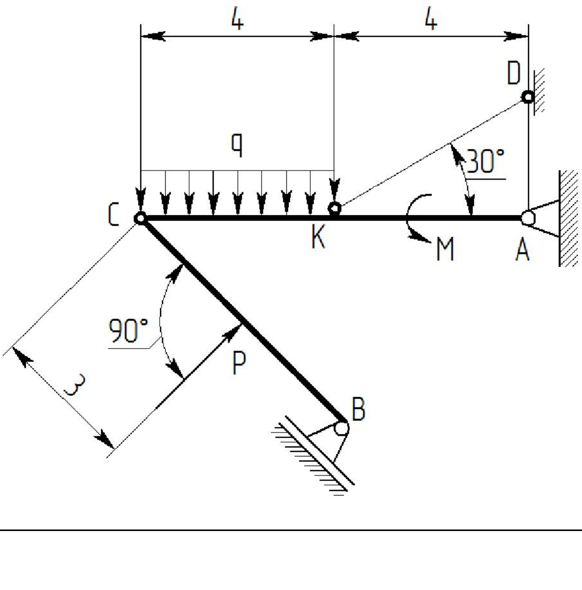


Задание 2.16

Дано: $P = 20$ кН, $q = 3$ кН/м,

$M = 30$ кНм. Сила P приложена в середине балки BC.

Определить реакции цилиндрических шарниров в точках A и C, шарнирно-подвижной опоры в точке B и усилие в стержне KD.

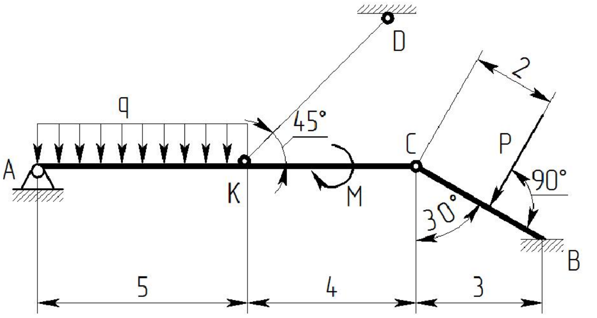


Задание 2.17

Дано:

$P = 16$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 6$ кНм.

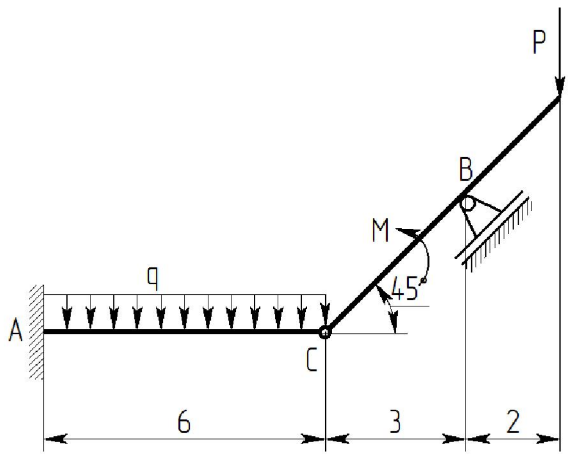
Определить реакции цилиндрических шарниров в точках *A* и *C*, усилие в стержне *KD* и реакцию гладкой опоры в точке *B*.



Задание 2.18

Дано: $P = 8$ кН, $q = 1$ кН/м, $M = 6$ кНм.

Определить реакции жесткой заделки в точке *A*, цилиндрического шарнира в точке *C* и шарнирно-подвижной опоры в точке *B*.

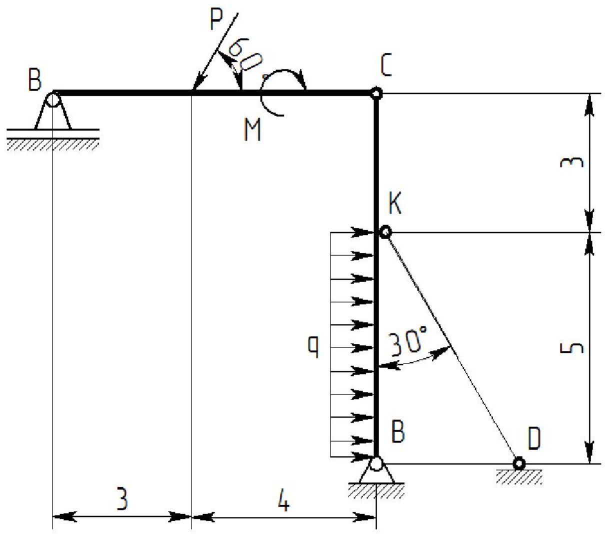


Задание 2.19

Дано:

$P = 12$ кН, $q = 4$ кН/м, $M = 10$ кНм.

Определить реакции цилиндрических шарниров в точках *A* и *C*, усилие в стержне *KD* и реакцию шарнирно-подвижной опоры в точке *B*.

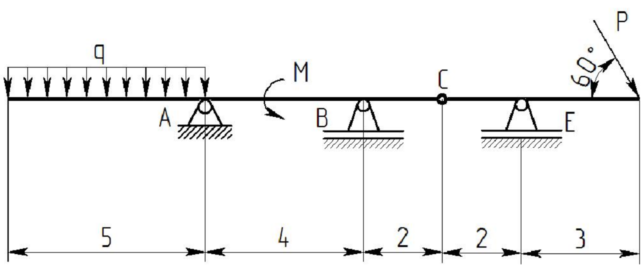


Задание 2.20

Дано:

$P = 14$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 16$ кНм.

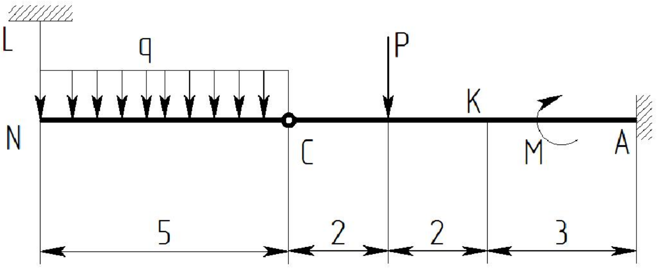
Определить реакции цилиндрических шарниров в точках *A* и *C* и шарнирно-подвижных опор в точках *B* и *E*.



Задание 2.21

Дано: $P = 7$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 18$ кНм.

Определить реакции жесткой заделки в точке *A*, цилиндрического шарнира в точке *C* и натяжение нити *NL*.

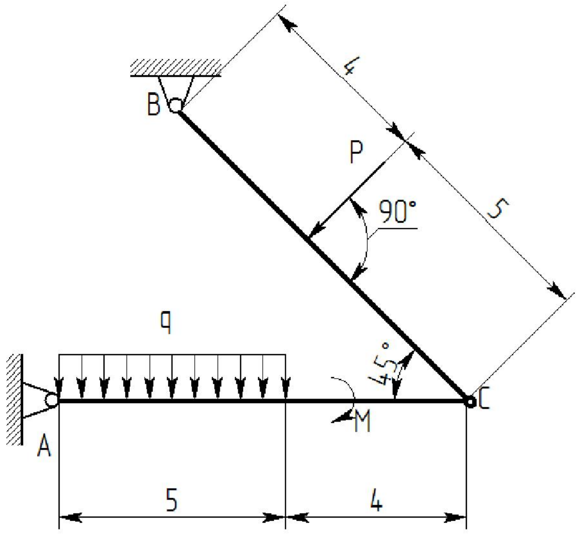


Задание 2.22

Дано:

$P = 16$ кН, $q = 4$ кН/м, $M = 12$ кНм.

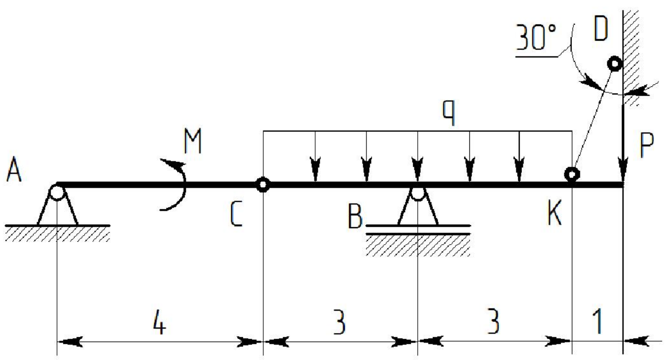
Определить реакции цилиндрических шарниров в точках *A B*, и *C*.



Задание 2.23

Дано: $P = 10$ кН, $q = 4$ кН/м, $M = 16$ кНм.

Определить реакции цилиндрических шарниров в точках *A* и *C*, усилие в стержне *KD* и реакцию шарнирно-подвижной опоры в точке *B*.

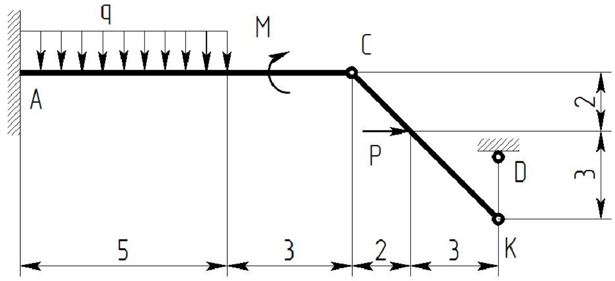


Задание 2.24

Дано:

$P = 18$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 14$ кНм.

Определить реакции жесткой заделки в точке *A*, цилиндрического шарнира в точке *C* и усилие в стержне *KD*.



3. Плоское движение твердого тела. Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев плоского механизма

Определение. Плоскопараллельным или плоским называется движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Плоское движение твердого тела вполне определяется движением его любого плоского сечения (плоской фигуры), проведенного параллельно этой плоскости.

Теорема 1. Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса $\vec{v}_A$ и скорости данной точки во вращательном движении вместе с фигурой вокруг полюса $\vec{v}_{BA}$:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Теорема 2. Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой:

$$\text{пр}_{AB}\vec{v}_A = \text{пр}_{AB}\vec{v}_B.$$

Теорема 3. При непоступательном движении плоской фигуры существует единственная точка этой фигуры или жестко связанной с ней плоскости, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эта точка называется мгновенным центром скоростей.

В каждый момент времени плоская фигура совершает мгновенное вращение вокруг мгновенного центра скоростей (точки *P*).

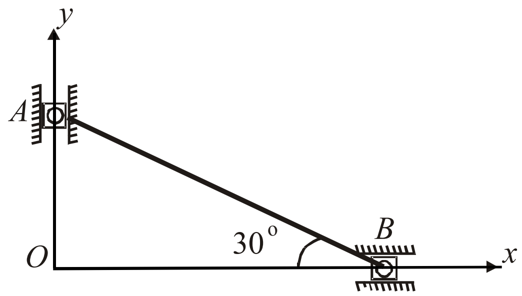
Угловая скорость тела при плоском движении равна отношению скорости произвольно выбранной точки к расстоянию от этой точки до мгновенного центра скоростей:

$$\omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_B}{BP}.$$

Скорости точек тела при плоском движении пропорциональны расстояниям до мгновенного центра скоростей P:

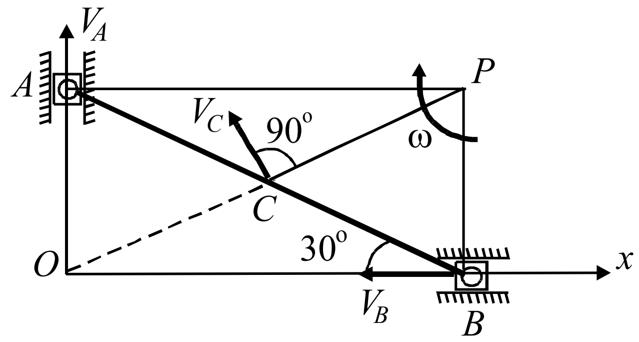
$$\frac{v_C}{v_B} = \frac{CP}{BP}.$$

Пример 1



Ползуны A и B линейки эллипсографа длиной $AB = l = 0{,}6\,\text{м}$ движутся по взаимно перпендикулярным направляющим. Ползун A движется вверх со скоростью $v_A = 0{,}3\,\text{м/с}$. Для указанного на рисунке положения механизма *определить* угловую скорость линейки AB и скорости точек B и C, если C – середина AB.

Решение:



Линейка AB совершает плоскопараллельное движение. Точка B движется вдоль оси Ox, поэтому ее скорость направлена по горизонтали влево. Зная направления скоростей двух точек линейки AB, строим мгновенный центр скоростей. Для этого находим точку пересечения перпендикуляров к скоростям точек A и B. Находим угловую скорость линейки:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{0{,}3}{0{,}6\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{рад/с}.$$

Учитывая, что треугольник BCP – равносторонний и $BP = CP$ находим скорости точек B и C

$$v_B = \omega \cdot BP = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}6 \sin 30^\circ = 0{,}2\sqrt{3}\,\text{см/с};$$

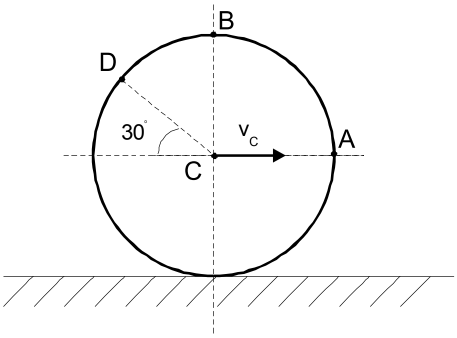
$$v_C = \omega \cdot CP = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}6 \sin 30^\circ = 0{,}2\sqrt{3}\,\text{см/с}, \quad \vec{v}_C \perp CP.$$

Скорость точки B можно определить при помощи теоремы о проекциях скоростей двух точек на прямую, проходящую через эти точки, т. е.

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 60^\circ \Rightarrow v_B = \frac{v_A}{\sqrt{3}} = 0{,}2\sqrt{3}\,\text{см/с}.$$

Ответ: $\omega == \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{рад/с}$, $v_B = 0{,}2\sqrt{3}\,\text{см/с}$, $v_C = 0{,}2\sqrt{3}\,\text{см/с}$.

Пример 2

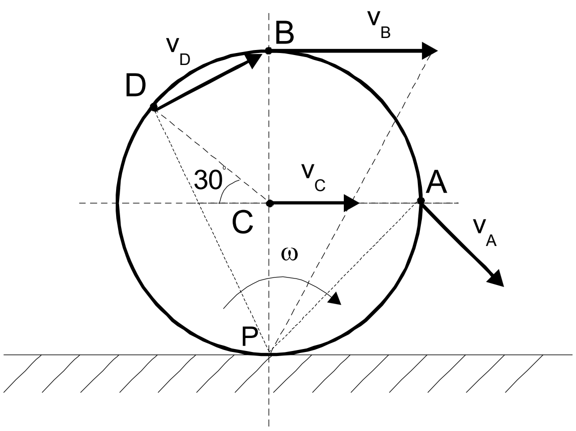


Колесо радиуса $R = 0,4$ м катится без скольжения по горизонтальному рельсу. Скорость центра колеса равна $v_C = 8$ м/с.

Определить угловую скорость колеса и скорости точек A, B и D в положении, указанном на рисунке.

Решение:

Колесо совершает плоское движение. При качении без скольжения его мгновенный центр скоростей находится в точке касания с неподвижной плоскостью (точка P на рисунке).



Зная положение мгновенного центра скоростей и скорость центра колеса, находим его угловую скорость:

$$\omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{8}{0,4} = 20 \text{ рад/с}.$$

В данный момент времени колесо совершает мгновенное вращение вокруг точки P. Определяем скорости всех точек колеса и показываем на рисунке направления скоростей:

$v_A = \omega \cdot AP = \omega R\sqrt{2} = 20 \cdot 0,4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ м/с, $v_A \perp AP$;

$v_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot 2R = 20 \cdot 2 \cdot 0,4 = 16$ м/с, $v_B \perp BP$;

$v_D = \omega \cdot DP = \omega R\sqrt{3} = 20 \cdot 0,4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ м/с, $v_D \perp DP$.

Расстояние DP находим из треугольника DPC по теореме косинусов:

$DP = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2\cos 120^\circ} = R\sqrt{3}$.

Максимальную скорость имеет точка колеса, наиболее удаленная от мгновенного центра скоростей, т. е. точка B.

Ответ: $\omega = 20$ рад/с, $v_A = 8\sqrt{2}$ м/с, $v_B = 16$ м/с, $v_D = 8\sqrt{3}$ м/с.

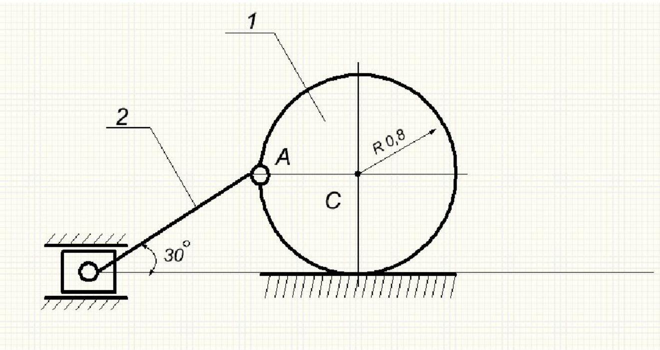
Задания 3. Плоское движение твердого тела.

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев плоского механизма

Задание 3.1

Дано: $\omega_1 = 12$ рад/с. Диск 1 катится без скольжения.

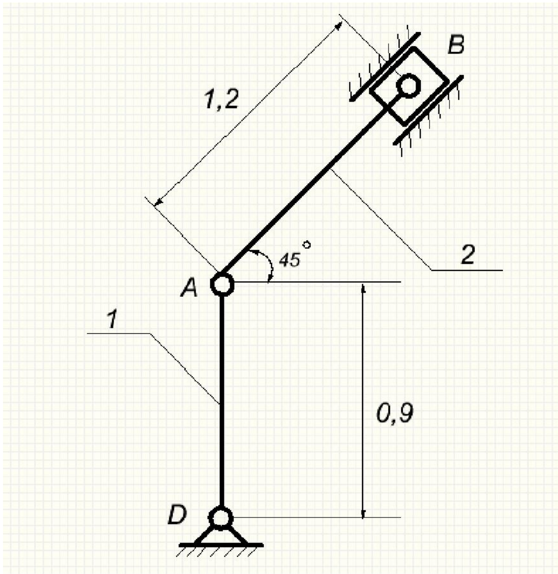
Определить: ω_2, V_A, V_B, V_C.



Задание 3.2

Дано: $V_A = 2$ м/с.

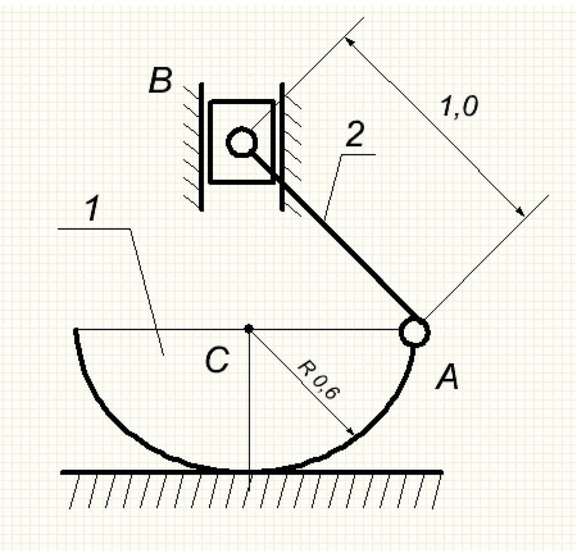
Определить: ω_1, ω_2, V_B.



Задание 3.3

Дано: $V_C = 4$ м/с. Полудиск 1 катится без скольжения.

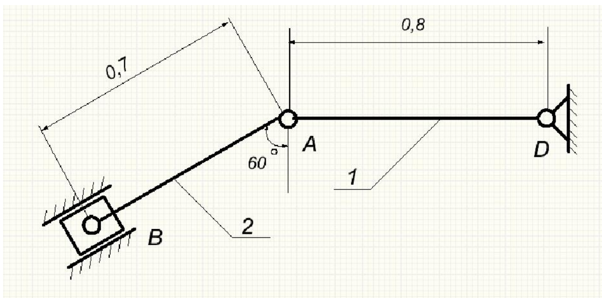
Определить: ω_1, ω_2, V_A, V_B.



Задание 3.4

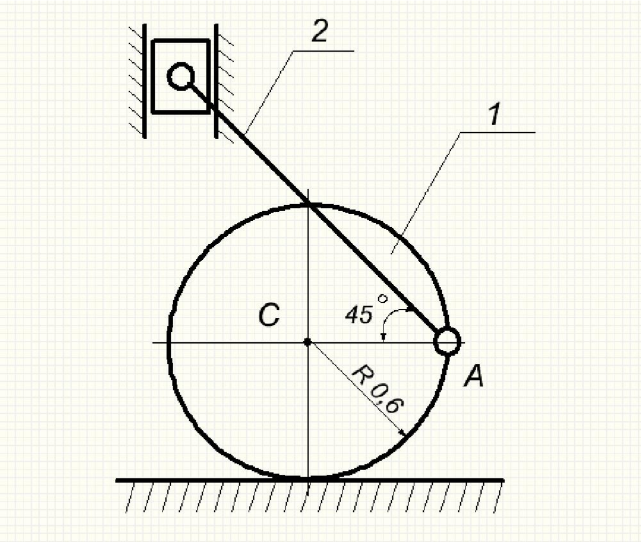
Дано: $\omega_1 = 8$ рад/с.

Определить: ω_2, V_A, V_B.



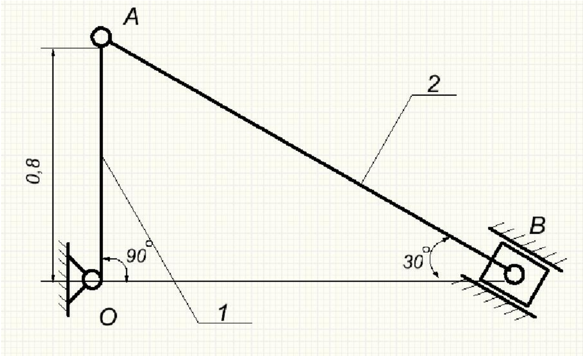
Задание 3.5

Дано: $V_C = 12\,\text{м/с}$. Диск 1 катится без скольжения.
Определить: ω_1, ω_2, V_A, V_B.



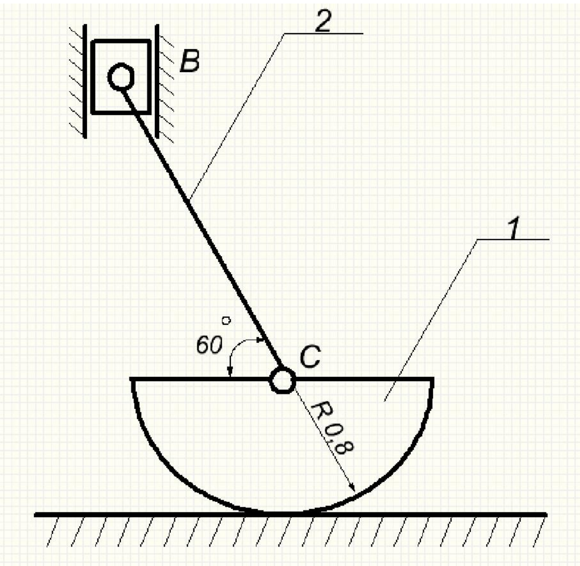
Задание 3.6

Дано: $\omega_1 = 6\,\text{рад/с}$.
Определить: ω_2, V_A, V_B.



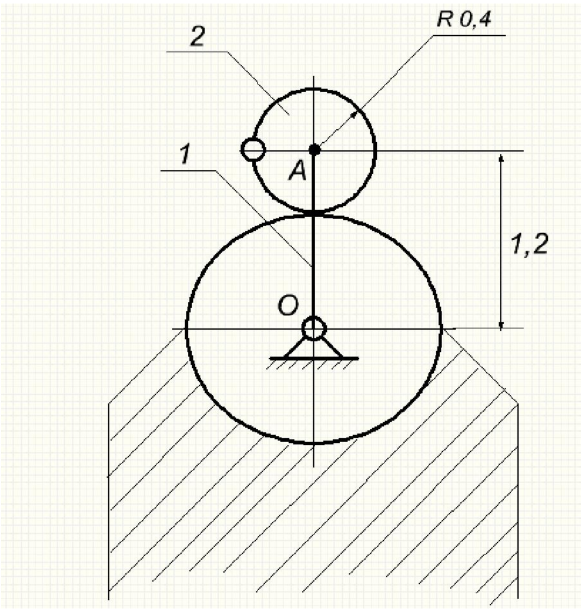
Задание 3.7

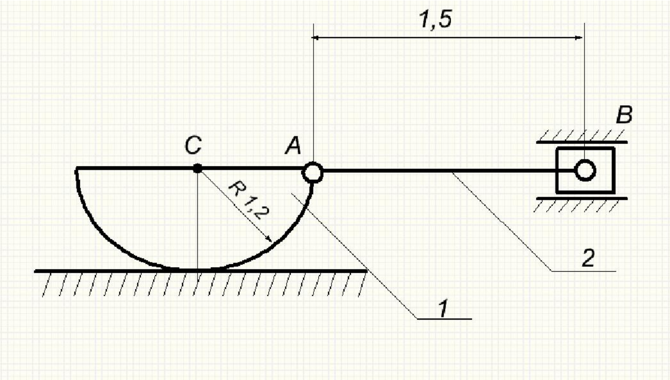
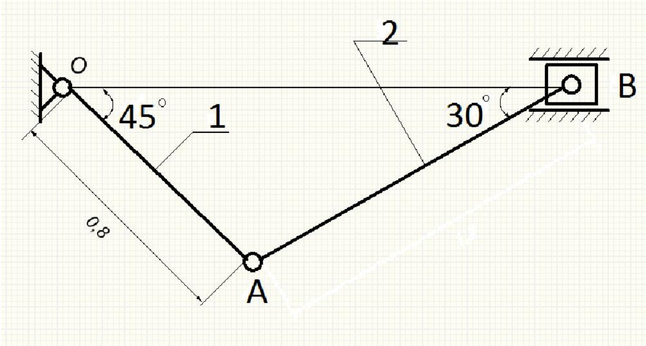
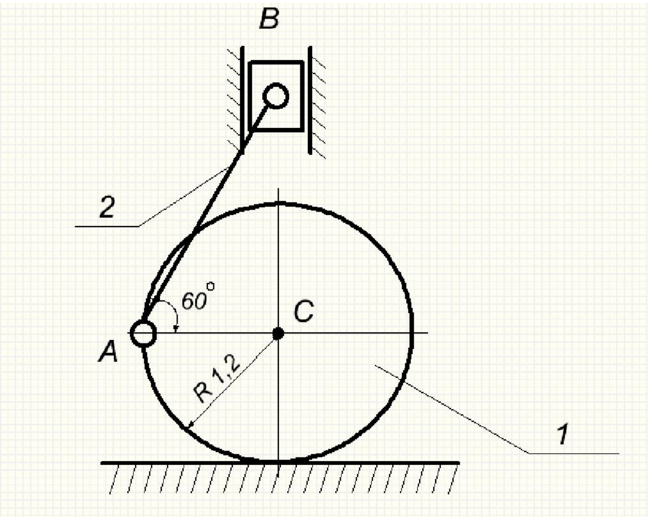
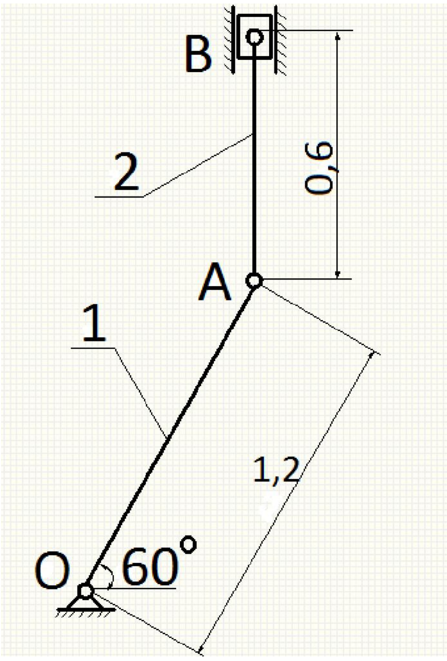
Дано: $V_C = 8\,\text{м/с}$. Полудиск 1 катится без скольжения.
Определить: ω_1, ω_2, V_A, V_B.



Задание 3.8

Дано: $\omega_1 = 4\,\text{рад/с}$. Диск 2 катится без скольжения.
Определить: ω_2, V_A, V_B.

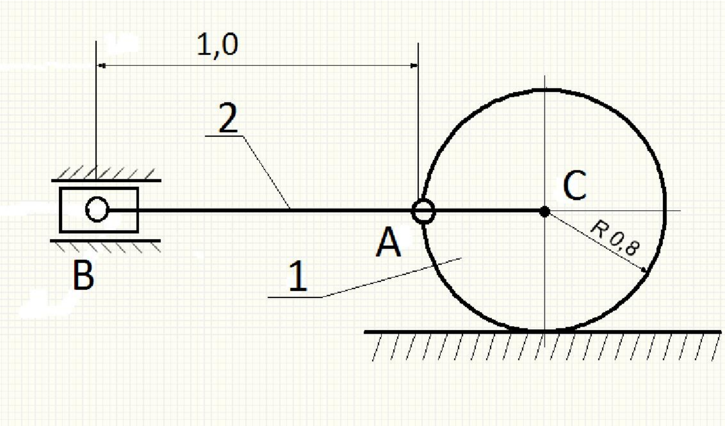


Задание 3.9 Дано: $\omega_1 = 12$ рад/с. Полудиск 1 катится без скольжения. Определить: ω_2, V_A, V_B, V_C.  	**Задание 3.10** Дано: $V_A = 6$ м/с. Определить: ω_1, ω_2, V_B. 
Задание 3.11 Дано: $V_C = 12$ м/с. Диск 1 катится без скольжения. Определить: ω_1, ω_2, V_A, V_B.  	**Задание 3.12** Дано: $\omega_1 = 8$ рад/с. Определить: ω_2, V_A, V_B. 

Задание 3.13

Дано: $V_C = 10$ м/с. Диск 1 катится без скольжения.

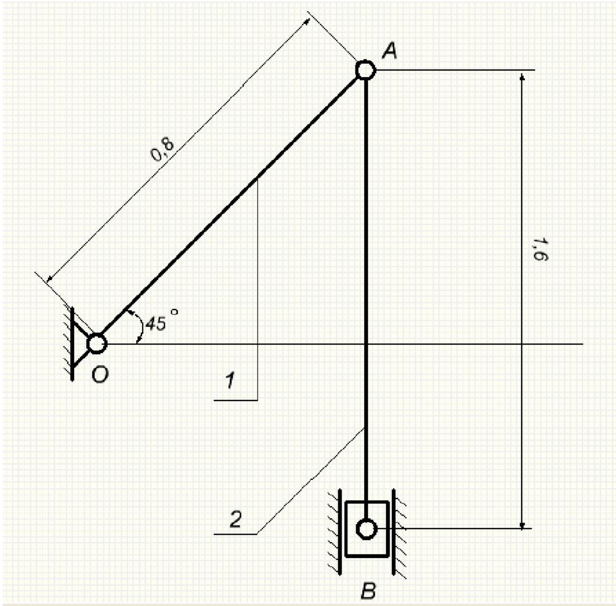
Определить: ω_1, ω_2, V_A, V_B.



Задание 3.14

Дано: $V_A = 10$ м/с.

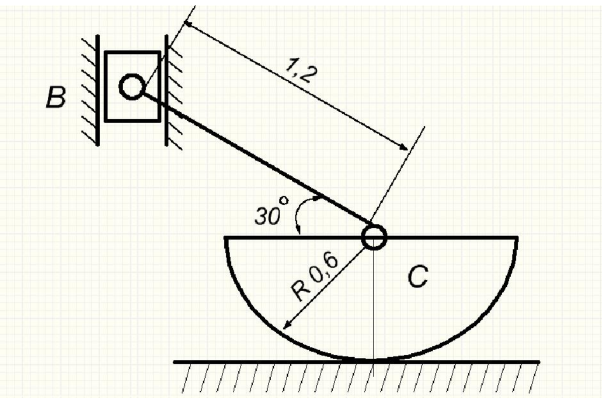
Определить: ω_1, ω_2, V_B.



Задание 3.15

Дано: $\omega_1 = 4$ рад/с. Полудиск 1 катится без скольжения.

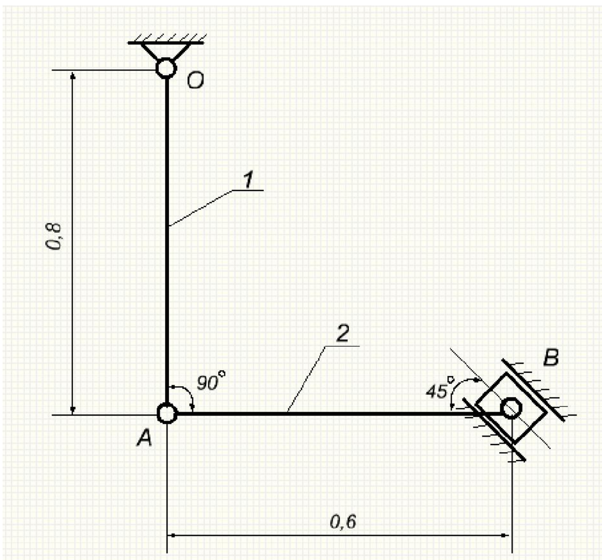
Определить: ω_2, V_B, V_C.



Задание 3.16

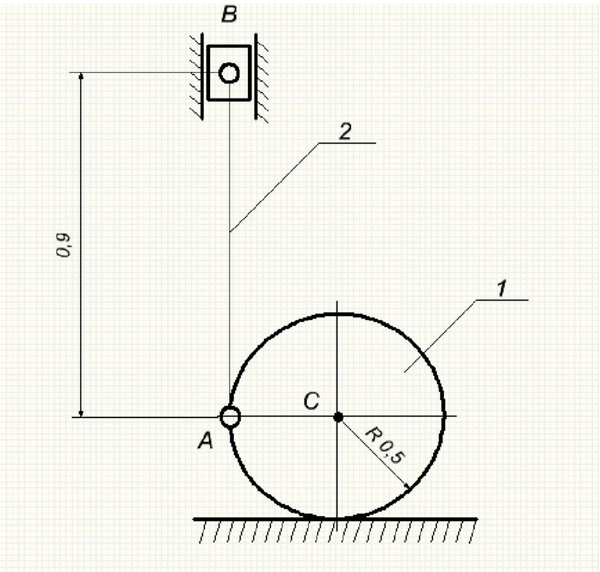
Дано: $V_A = 8$ м/с.

Определить: ω_1, ω_2, V_B.



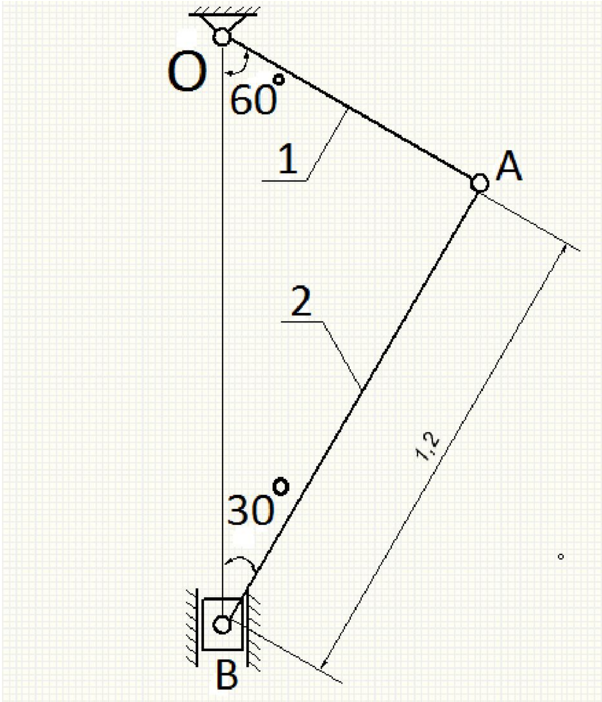
Задание 3.17

Дано: $V_C = 4$ м/с. Диск 1 катится без скольжения.
Определить: ω_1, ω_2, V_A, V_B.



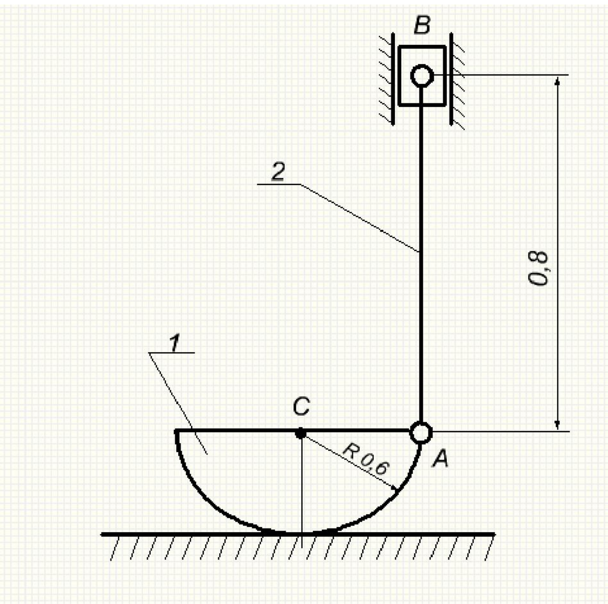
Задание 3.18

Дано: $\omega_1 = 6$ рад/с.
Определить: ω_2, V_A, V_B.



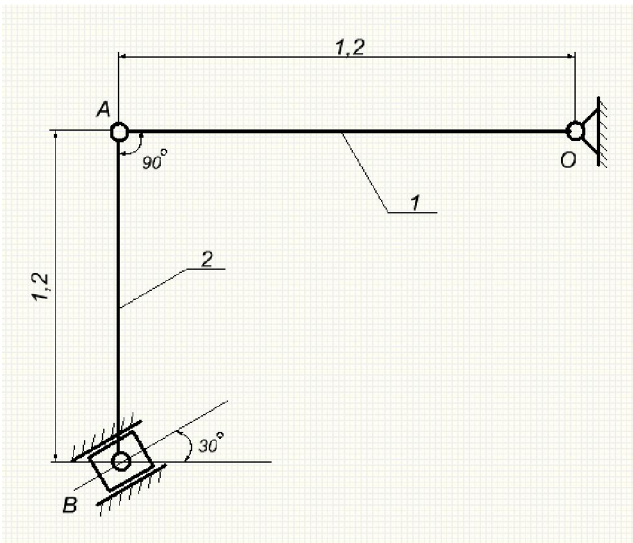
Задание 3.19

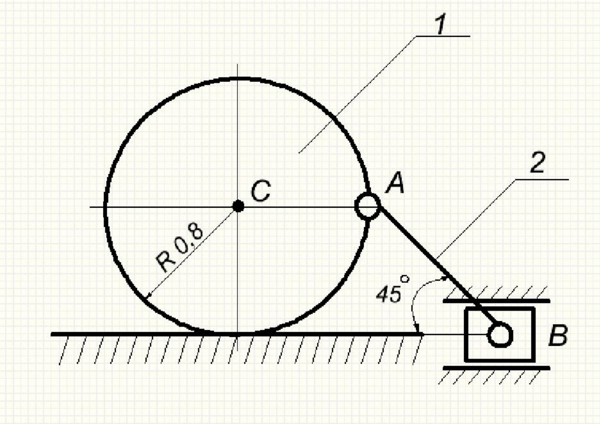
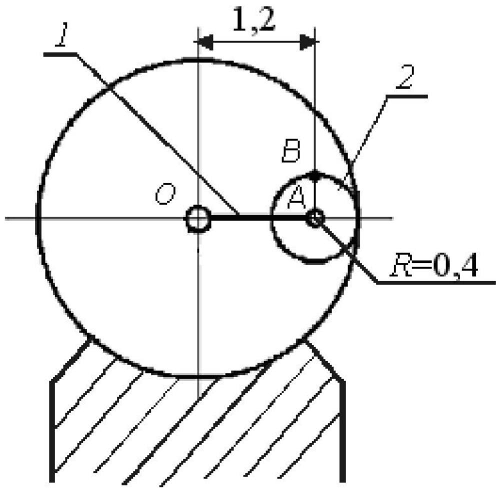
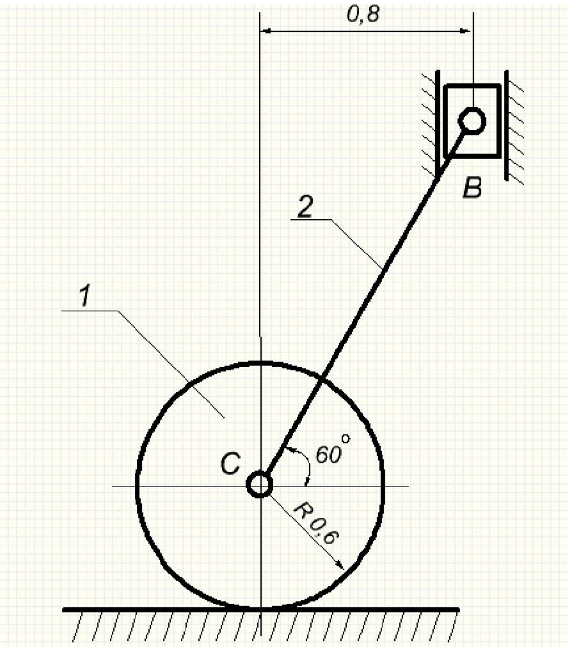
Дано: $V_C = 6$ м/с. Полудиск 1 катится без скольжения.
Определить: ω_1, ω_2, V_A, V_B.



Задание 3.20

Дано: $V_A = 6$ м/с.
Определить: ω_1, ω_2, V_B.



Задание 3.21 Дано: $\omega_1 = 12$ рад/с. Диск 1 катится без скольжения. Определить: ω_2, V_A, V_B, V_C.  	Задание 3.22 Дано: $V_A = 8$ м/с. Диск 2 катится без скольжения. Определить: ω_1, ω_2, V_B. 
Задание 3.23 Дано: $\omega_1 = 8$ рад/с. Диск 1 катится без скольжения. Определить: ω_2, V_B, V_C.  	Задание 3.24 Дано: $V_A = 12$ м/с. Диск 2 катится без скольжения. Определить: ω_1, ω_2, V_B.