Вариант 1

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_{x/2}^{2x} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{x/2}^{2/x} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = 9x$, $x = y$, $x + y = 2$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 5$; $z = x^2 + y^2 + 1$ (внутри параболоида).

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить линейный интеграл $\int\limits_L (x^2 + y^2 - 2Rx)\,dx + R(x+y)\,dy$ вдоль дуги окружности $(x-R)^2 + y^2 = R^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(R;R)$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint x^3\,dy - y^3\,dx$ вдоль окружности $(x-R)^2 + y^2 = R^2$ в положительном направлении. Преобразовать интеграл в двойной и вычислить, убедившись в равенстве двух зеначений.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$, $M_0(0;1;1)$, $M_1(1;1;1)$, $M_2(1;2;3)$, $M_3(2;2;2)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{x^2; x; xz\}$; $M_0(1;1;2)$; V: $z = x^2 + y^2$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$); Σ — часть поверхности $y = 0$, вырезаемая поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 1$, $x = 0$ ($x \geq 0$); L: $z = x^2 + y^2$, $z = 1$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 2

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 - 4y^2$, $z = 0$, $x = 4$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 9$, $z = 0$, $z = 4$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_L yz\,dx + z\sqrt{9-y^2}\,dy + xyz\,dz$ вдоль дуги L винтовой линии $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{2t}{\pi}$ от точки A пересечения кривой с плоскостью xOy до точки B ее пересечения с плоскостью $z = 4$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint x^3\,dy - y^3\,dx$ вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ в положительном направлении. Преобразовать интеграл в двойной и вычислить, убедившись в равенстве двух зеначений.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y) = x^2 - 2y$, $M_0(1;1)$, $M_1(2;3)$, $M_2(-1;2)$, $M_3(4;5)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xy; 1; z\}$; $M_0(0;2;1)$; V: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 0$ $(z \geq 0)$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, вырезаемая поверхностями $z = 0$ ($z > 0$, нормаль внешн.); L: $y^2 + z^2 = 4$, $z = 0$ $(z \geq 0)$, $x = 0$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 3

Задача 1 (*1 балл*). Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)\,dx.$$

Задача 2 (*1 балл*). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = 4x$; $z^2 = 4 - 4x$; $y = 0$; $x + y = 2$.

Задача 3 (*1 балл*). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$; $(x-1)^2 + y^2 = 1$; $z = 0$.

Задача 4 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{(-1;4)}^{(1;1)} \frac{dx + dy}{(x+y-1)^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Применяя формулу Грина, вычислить $\displaystyle\oint_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, где C — контур с положительным направлением обхода, составленный из отрезка прямой от точки $A(3;0)$ до точки $B(1;2)$, параболой $y = 2x^2$ от точки $B(1;2)$ до точки $O(0;0)$ и отрезка оси OX от точки $O(0;0)$ до точки A. Проверить результат с помощью непосредственного вычисления криволинейного интеграла.

Задача 6 (*1 балл*). Дано скалярное поле $U = f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16}$, $M_0(4;3;4)$, $M_1(3;3;0)$, $M_2(1;5;1)$, $M_3(2;6;4)$.

Задача 7 (*1 балл*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xz; yz; z^2\}$; $M_0(5;2;3)$; V: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = 2$ $(z \geq 2)$; Σ — часть поверхности $z = 2$, вырезаемая поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (в направлении уменьшения z); L: $y = z$, $y = 2z$, $z = 1$, $x = 2$.

Задача 8 (*1 балл*). Скалярное поле $U(x,y,z) = x^2 - y^2 - 2az$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 4

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 = 4y$; $y + z = 4$; $y + 2z = 4$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$, $z = 0$; $x + y + z = 4$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(0;0)}^{(0;4)} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$ вдоль параболы $y = \dfrac{1}{2}x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(2;2)$ и далее по прямой от точки A до точки $B(0;4)$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\displaystyle\oint\limits_L x\,dy - y\,dx$ по контуру, образованному осью Ox и первой аркой циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ (направление обхода положительное). Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y) = \dfrac{(x-1)^2}{4} + y^2$, $M_0(2;1)$, $M_1(1;-1)$, $M_2(2;2)$, $M_3(-3;0)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{2x; 2y; xz\}$; $M_0\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; 1\right)$; V: $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = 1$, $z = y$, $z = 0$ $(x \geq 0)$; Σ — часть поверхности $y = x^2$, вырезаемая поверхностями $z = 0$, $y = z$, $y = 1$; L: $x = 0$, $z = 0$, $x^2 + z^2 = 1$, $y = 3$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = (x^2+y^2)z^2 - 2a^2xy$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 5

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_2^4 dy \int\limits_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$; $y = x^2$; $y = 1$; $z = 0$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объемы частей шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$, на которые он делится плоскостью $z = 1$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_L x\,dy - y\,dx$ вдоль первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ от точки $A(2\pi a; 0)$ до точки $O(0; 0)$ и далее вдоль прямой от точки O до точки $B(-\pi a; 2\pi a)$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_C (x + y)\,dx - (x - y)\,dy$ по контуру C, образованному дугой параболы $y = 3(x - 1)^2$ от точки $A(1; 0)$ до точки $B(3; 12)$, отрезком прямой от точки B до точки $O(0; 0)$ и отрезком оси Ox от точки O до точки A. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x, y, z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x, y, z) = x^2 + z^2 - y$, $M_0(1; 0; 1)$, $M_1(2; 1; 1)$, $M_2(3; 2; 2)$, $M_3(4; 3; 1)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{3x^2; -2x^2y; 1 - 2x\}$; $M_0(1; 2; 0)$; V: $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(z \ge 0)$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \ge 0)$, вырезаемая поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (нормаль внешняя); L: $x = y$, $x = -y$, $x = 1$, $z = 0$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x, y, z) = z^2 - xy$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 6

Задача 1 (*1 балл*). Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2}^{3+2x} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - y^2$; $x = 0$; $z = x$.

Задача 3 (*1 балл*). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $(x-1)^2 + y^2 = 1$; $z = 0$; $x + y + z = 4$.

Задача 4 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(-1;-3)}^{(3;1)} \frac{dx - dy}{(x-y-1)^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Вычислить $\displaystyle\oint\limits_L (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$ вдоль окружности $x^2 + (y-R)^2 = R^2$, проходимой в положительном направлении. Преобразовать этот интеграл в двойной, вычислить и убедиться в равенстве двух интегралов.

Задача 6 (*1 балл*). Дано скалярное поле $U = f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$, $M_0(3;1)$, $M_1(1;1)$, $M_2(-1;2)$, $M_3(3;4)$.

Задача 7 (*1 балл*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{x^2; x^2y; (x-2)z)\}$; $M_0\left(\frac{1}{2};0;3\right)$; V: $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$; Σ — часть поверхности $x^2+y^2=1$, вырезаемая поверхностями $z=0$, $z=1$; L: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$, $y=0$ $(y \geq 0)$, $z=-1$.

Задача 8 (*1 балл*). Скалярное поле $U(x,y,z) = (x^2-y^2)z^2 - 2(x^2+y^2)xy$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 7

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{y^2/2} f(x,y)\,dx.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - x^2$; $z = 1 - y^2$; $z = 0$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z = \sqrt{7}$, $z = 2\sqrt{3}$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(1;1)}^{(5;5)} ye^{-x}\,dx + (10 - e^{-x})\,dy$ по формуле Ньютона — Лейбница, отыскав предварительно функцию по её полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint a^2x\,dy - b^2y\,dx$ вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ с положительном направлением обхода. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z) = y + 2x^2 - z^2$, $M_0(-1;0;1)$, $M_1(0;1;0)$, $M_2(1;2;1)$, $M_3(2;1;0)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xz; yz; z^2 - 1\}$; $M_0\left(-1;-1;\dfrac{1}{4}\right)$; V: $x + y + z = 1$, $x - y + z = 1$, $x = 0$, $z = 0$; Σ — часть поверхности $x + y + z = 1$, вырезаемая поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; L: $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = x^4 - y^4 + z^4$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 8

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2/x}^{2x} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4xy$; $z = 0$; $y = 2$; $x + y = 4$, $y > 2$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 8 - y^2$; $z = 2x^2 + y^2$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(-1;-1)}^{(0;1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$ по двум путям: а) прозвольной кривой, оставляющей начало координат слева; б) произвольной кривой, оставляющей начало координат справа.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\displaystyle\oint\limits_{C} e^x xy\,dx - e^y(x+y)\,dy$ вдоль квадрата с вершинами в точках $A(2;2)$, $B(-2;2)$, $C(-2;-2)$, $D(2;-2)$, проходимого в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$, $M_0(-1;1)$, $M_1(2;1)$, $M_2(-1;0)$, $M_3(1;0)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{x^3; y^3; xz\}$; $M_0(1;2;5)$; V: $9 - z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$); Σ — часть поверхности $9 - z = x^2 + y^2$, вырезаемая поверхностями $z = 0$; L: $z = 0$, $z = x$, $z = 2 - x$, $y = 2$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 - z^2(x^2-y^2)$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 9

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^4 dx \int\limits_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = y$, $z^2 = 4 - y$, $x + y = 4$, $x = 0$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ (вне цилиндра).

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(0;1)}^{(4;0)} (y^2+2)\,dx + yx\,dy$ вдоль параболы $y^2 = -\dfrac{1}{2}(x-2)$ от точки $A(0;1)$ до точки $B(2;0)$ и далее по верхней части окружности $(x-3)^2 + y^2 = 1$ до точки $C(4;0)$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_C xy\,dx + (x+y)\,dy$ по контуру, образованному верхней частью астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ и отрезком оси Ox (направление обхода положтельное). Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$, $M_0(1;2;3)$, $M_1(3;2;1)$, $M_2(2;1;3)$, $M_3(1;3;2)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{yx; 2y; -z\}$; $M_0(3;5;-1)$; V: $y^2 = 1 - z$ $y = 0$, $z = 0$ $x = 0$, $x = 1$ $(y \geq 0)$; Σ — часть поверхности $y^2 = 1 - z$, вырезаемая поверхностями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$; L: $x = 0$ $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = (x^2+y^2)(z^2-2xy)$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 10

Задача 1 (*1 балл*). Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1+\sqrt{2x-x^2}}^{1-\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2$; $y = 0$; $z = y$.

Задача 3 (*1 балл*). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 9$.

Задача 4 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(1;3)}^{(5;1)} \frac{dx+dy}{(\frac{x}{2}+y-2)^2}$ вдоль ломаной, отрезки которой параллельны координатным осям.

Задача 5 (*1 балл*). Вычислить $\displaystyle\oint\limits_L (x-y)\,dx + xy\,dy$ вдоль контура, образованного верхней частью астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ и нижней частью окружности $x^2 + y^2 = a^2$ (направление обхода положтельное).

Задача 6 (*1 балл*). Дано скалярное поле $U = f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4y$, $M_0(-1;-1)$, $M_1(1;2)$, $M_2(2;-1)$, $M_3(-1;3)$.

Задача 7 (*1 балл*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \left\{\dfrac{y^2}{2}; 1; \dfrac{zy^2}{2}\right\}$; $M_0(0;1;2)$; V: $y^2 + x^2 = 1 - z$, $z = 0$, $x = y$, $x = -y$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 = 1 - z$, вырезаемая поверхностями $z = 0$ ($z \geq 0$); L: $y = \dfrac{2}{x}$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$.

Задача 8 (*1 балл*). Скалярное поле $U(x,y,z) = x^4 - y^4 + z^2(x^2 + y^2)$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 11

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-8/3}^{0} dy \int\limits_{-2(y+1)}^{\sqrt{4+y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = 4y$; $x = y$; $x + y = 2$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 6$; $z = x^2 + y^2$ (внутри параболоида).

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(2;2)}^{(1;5)} \Big(\dfrac{y^2-1}{y} - \dfrac{y}{x^2}\Big)\,dx + \Big(\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{y^2}\Big)\,dy.$

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_L -x^2y\,dx + xy^2\,dy$, где L — окружность $(x-1)^2+y^2 = 1$, которая обходится против часовой стрелки. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z) = 2y^2 + z^2 - 3x^2$, $M_0(1;2;1)$, $M_1(0;1;0)$, $M_2(1;0;1)$, $M_3(2;1;3)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{y; y^2; zy\}$; $M_0(5;3;1)$; V: $x + \frac{y}{2} + z = 1$, $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$; Σ — часть поверхности $x + \frac{y}{2} + z = 1$, вырезаемая поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; L: $\rho = 2\cos\varphi$, $z = 1$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = 2z^2xy + (x^2+y^2)^2$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 12

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4x-x^2}}^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2$; $z = 1 - y^2$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = 0$; $z = 0$; $x+y+z = 4$; $2x + z = 4$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(0;0)}^{(2;3)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{2 + x^2 + y^2}}$, отыскав функцию $U(x, y)$ по её полному дифференциалу и использовав формулу Ньютона — Лейбница.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\displaystyle\oint\limits_L (x^2+2y)dx - xydy$ вдоль эллипса $\dfrac{(x-a)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, проходимого в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x, y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M_0(3; 2)$, $M_1(-1; 1)$, $M_2(2; -1)$, $M_3(1; 3)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{yx; y^3; z^3\}$; $M_0(7; 1; -1)$; V: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$, $z = 4$; Σ — часть поверхности $z = 4$, вырезаемая поверхностями $x^2 + y^2 = 4$; L: $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$ $y = 0$, $z = 4$ $(x \geq 0$, $y \geq 0)$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = x^2 + y^2 + \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} z^2$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 13

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = y$; $y = x^2$; $z = 2-y$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+(y-2)^2 = 4$; $z = 0$; $z = 6 - x$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(-2;0)}^{(6;4)} (x^2+2y)\,dx - xy\,dy$ вдоль нижней полуокружности $x^2+y^2 = 4$ от точки $A(-2;0)$ до точки $B(2;0)$ и далее по прямой от точки B до точки $C(6;4)$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** С помощью формулы Грина вычислить разность между интегралами

$$\int\limits_{AmB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{AnB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy,$$

где AmB — отрезок прямой между точками $A(0;0)$ и $B(1;1)$, AnB — дуга параболы $y = x^2$, соединяющая те же точки.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z) = y^2 - 2z^2 - x^2$, $M_0(1;1;2)$, $M_1(1;2;1)$, $M_2(2;3;1)$, $M_3(1;3;2)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xz; z; z^2\}$; $M_0\left(0;-1;\frac{1}{3}\right)$; V: $x^2+y^2+z^2 = 4$, $x^2+y^2 = 3z$; Σ — часть поверхности $x^2+y^2+z^2 = 4$, вырезаемая поверхностями $x^2+y^2 = 3z$; L: $y^2+z^2 = 2$, $x = 3$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}z^2 - 2zxy$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 14

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-y^2/2}^{1-y^2} f(x,y)\,dx.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$; $z = 0$; $y = 1$; $y = 2x$; $y = 6 - x$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = x^2 + y^2$; $2z^2 = x^2 + y^2 + 1$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(a;0)}^{(-a;0)} x\,dx + (x+y)\,dy$ вдоль астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ от точки $A(a;0)$ до точки $B(0;a)$ и далее по прямой от точки B до точки $C(-a;0)$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_C \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx + y\big(xy + \ln(x + \sqrt{1+x^2+y^2})\big)\,dy$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$ (направление обхода положительное).

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y) = x^4 - y$, $M_0(-1;-1)$, $M_1(1;2)$, $M_2(2;1)$, $M_3(1;1)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{z; yx^2z; x^2\}$; $M_0\left(3;0;\frac{1}{3}\right)$; V: $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, $z = y^2$; Σ — часть поверхности $y = z$, вырезаемая поверхностями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$; L: $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 3$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = \dfrac{2xyz^2}{x^2+y^2} - (x^2 - y^2)$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 15

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2 - x^2$; $z = x$; $y = x$; $y = 2x$, $(x \geq 0, y \geq 0)$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$; $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(-1;-1)}^{(3;2)} \frac{dx - 2dy}{(x - 2y + 2)^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\displaystyle\oint\limits_C y^2dx - x^2dy$ вдоль контура, образованного прямыми $x + y = -1$, $x = 0$, $y = 0$, который обходится в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z) = x - 3y^2 - 2z^2$, $M_0(1;0;2)$, $M_1(-1;1;2)$, $M_2(2;-1;2)$, $M_3(0;1;4)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{1; y^2; xz\}$; $M_0\left(-1; 1; \frac{1}{4}\right)$; V: $x^2 + y^2 = 2z^2$, $z = 1$, $z = \sqrt{2}$, $x = 0$ $(x \geq 0)$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 = 2z^2$, вырезаемая поверхностями $z = 1$, $z = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$; L: $x^2 + (z-1)^2 = 1$, $x = 0$ $(x \geq 0)$, $y = -1$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = \dfrac{2xyz + (x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что он равен нулю.

Вариант 16

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^4 dx \int\limits_{2-\sqrt{8-(x-2)^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = y^2$; $z = 4$; $y = 3-x$; $x = 0$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (вне цилиндра).

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить инитеграл $\int\limits_L 3x^2y\,dx + y\,dy$ вдоль дуги кривой $y = (1-x)\sqrt{x}$ между точками O и A её пересечения с осью Ox и далее по нижней части окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$ до точки $B(3;0)$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Используя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C (e^x \sin y - y)\,dx + (e^x \cos y - 1)\,dy$ по контуру, состоящему из верхней полуокружности $(x-1)^2 + y^2 = 1$ и отрезков прямых от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;-1)$ и далее до точки $B(2;0)$. Результат проверить, вычисляя интеграл непосредственно.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$, $M_0(2;1)$, $M_1(2;3)$, $M_2(-1;2)$, $M_3(3;2)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{zy; x^2z; yzx^2\}$; $M_0(-1;2;5)$; V: $5 - z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$); Σ — часть поверхности $x + y + z = 1$, вырезаемая поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; L: $5 - z = x^2$, $x = 0$, $y = 10$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $z \geq 0$).

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2az$ преобразовать к сферической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\Delta U = \operatorname{div}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что результат совпадает с результатом вычислений в декартовых координатах.

Вариант 17

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{x} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$; $y = 2 + 2x$; $y = \dfrac{x}{2} - 1$; $x + y = 2$; $z = 1 + y^2$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$; $z = 2x^2 + 2y^2$; $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_L (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$ вдоль четверти эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ от точки $A(a;0)$ до точки $B(0;b)$ и далее вдоль прямой до точки $C(-2a;0)$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_L x^2\,dx + xy\,dy$ вдоль контура, образованного прямыми $x - y = 1$, $2y - x = 1$, $x + y = -1$ и проходимого в положительном направлении. Результат проверить с помощью формулы Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z) = y^2 - x^2 + 3z^2$, $M_0(1;1;1)$, $M_1(2;1;3)$, $M_2(1;2;4)$, $M_3(2;4;1)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xy; y^2; yz^2\}$; $M_0(-1;-2;2)$; V: $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = y$, $z = 0$, $y = 0$; Σ — часть поверхности $z = 2$, вырезаемая поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$ $(y \geq 0)$; L: $y = -1$, $y = 2x - 1$, $y = -2x + 3$, $z = 0$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ преобразовать к сферической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\Delta U = \operatorname{div}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что результат совпадает с результатом вычислений в декартовых координатах.

Вариант 18

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}-2} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$; $z=x^2+2y^2$; $y=x$; $y=2x$; $x=1$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=10-x^2$; $z=0$; $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2=9$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{(2;1)}^{(4;3)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{1}{y^2}-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)dy.$

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\displaystyle\oint_C x\,dx+(x+y)\,dy$ вдоль окружности $x^2+y^2=2x$ (направление обхода положительное). Результат проверить с помощью формулы Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U=f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y)=x^2-y^2$, $M_0(-1;2)$, $M_1(1;3)$, $M_2(2;4)$, $M_3(1;0)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{2z;xyz;xy\}$; $M_0(5;0;3)$; V: $y^2+4z^2=1$, $z=0$, $y=\frac{1}{2}$, $x=1$, $x=2$ ($z\geq 0$, $y\geq\frac{1}{2}$); Σ — часть поверхности $x=2$, вырезаемая поверхностями $y^2+4z^2=1$, $z=0$, $y=\frac{1}{2}$; L: $x^2+z^2=9$, $z=\sqrt{3}x$, $z=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=3$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z)=\dfrac{2xy(z^2-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ преобразовать к сферической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{grad}U$ и убедиться в том, что результат совпадает с результатом вычислений в декартовых координатах.

Вариант 19

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-4}^{-2} dx \int\limits_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-2}^{\sqrt{8}} dx \int\limits_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 + 2y^2 = 8$; $y = x - 2$; $y = -x - 2$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$; $z = 4 - x^2 - y^2$; $z = 2(4 - x^2 - y^2)$; $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$; $y = \sqrt{3x}$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(3;2)}^{(5;4)} \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Используя формулу Грина, вычислить $\displaystyle\oint\limits_L x^2y\,dx + xy^2\,dy$ вдоль контура L: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, проходимого в положительном направлении. Результат проверить путем непосредственного вычисления интеграла.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$, $M_0(2;1;-1)$, $M_1(1;1;2)$, $M_2(2;1;3)$, $M_3(1;3;-1)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \left\{\dfrac{x^2z}{2}; yz; x^2\right\}$; $M_0(-3;3;-1)$; V: $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = x + 1$, $z = 0$; Σ — часть поверхности $x^2 + 2y^2 = 1$, вырезаемая поверхностями $z = 0$, $z = x + 1$, $y = 0$ $(y \geq 0)$; L: $x = 1$, $z = x + 1$, $z = 0$, $y = 0$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = 2z\sqrt{x^2 + y^2}$ преобразовать к сферической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\Delta U = \operatorname{div}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что результат совпадает с результатом вычислений в декартовых координатах.

Вариант 20

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x-1}^{(x+1)/2} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = \dfrac{2}{y}$; $x + y + z = 3$; $z + y - 2x = 3$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + 2y^2$; $z = 8 - x^2$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(-1;-1)}^{(1;1)} \frac{dx - dy}{(x - y - 1)^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\displaystyle\oint (x - y^2)\,dx + 2xy\,dy$ вдоль окружности $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$, проходимой в положительном направлении. Проверить результат с помощью двойного интеграла.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2$, $M_0(3;2)$, $M_1(3;4)$, $M_2(1;3)$, $M_3(2;1)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{x^2y^2z; z; 1\}$; $M_0\left(\frac{1}{2}; 1; 3\right)$; V: $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$, $x + z = 1$, $z - x = 1$; Σ — часть поверхности $x + z = 1$, вырезаемая поверхностями $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 1$; L: $x + z = 1$, $-x + z = 1$, $z = 0$, $y = 0$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z$ преобразовать к сферической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\Delta U = \operatorname{div}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что результат совпадает с результатом вычислений в декартовых координатах.

Вариант 21

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{0} dx \int_{-x-2}^{\sqrt{-x}} f(x,y)\,dy + \int_{0}^{2} dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - y^2$; $z = 0$, $y = 2 - x^2$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2 - y^2$; $z = 4 - 2y$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{(-1;0)}^{(1;2)} \frac{3x^2dx}{\sqrt{y - x^3}} - \frac{dy}{\sqrt{y - x^3}}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Доказать, что интеграл $\displaystyle\int_L (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$ не зависит от пути интегрирования. Найти значение интеграла, интегрируя сначала по ломаной AOB от точки $A\big(-a; \sqrt{2}b\big)$ до точки $B\big(a; \sqrt{2}b\big)$ через начало координат O, а затем по прямой, соединяющей точки A и B.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $M_0(-1;2;1)$, $M_1(0;3;2)$, $M_2(1;1;1)$, $M_3(1;2;2)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{x^2; -y^2; -z^2\}$; $M_0(1;1;1)$; V: $x^2 + y^2 = z$, $z = 1$; Σ — часть поверхности $x + y + z = 1$, вырезаемая поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; L: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $U(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$ преобразовать к сферической системе координат и найти его градиент в этой системе; для контроля вычислить $\Delta U = \operatorname{div}\operatorname{grad} U$ и убедиться в том, что результат совпадает с результатом вычислений в декартовых координатах.

Вариант 22

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-2+\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2$; $y + z = 4$; $z = 0$; $y = 0$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 6$; $z = 10 - x^2 - y^2$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(-1;-1)}^{(1;1)} \dfrac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$ по двум путям: а) произвольной кривой, оставляющей начало координат слева; б) произвольной кривой, оставляющей начало координат справа.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_C 2y\,dx + xy\,dy$ вдоль контура, образованного прямыми $x + y = 3$, $x = 1$, $y = 1$ и проходимого в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x, y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y) = \dfrac{x^3}{y}$, $M_0(2;2)$, $M_1(-1;1)$, $M_2(2;5)$, $M_3(2;8)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xy; y; yz\}$; $M_0(0;1;0)$; V: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 = z$, вырезаемая поверхностями $z = 4$; L: $y = x^2$, $y = 4$, $z = 0$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $\vec{A}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j}$ преобразовать к сферической системе координат и найти $\operatorname{rot}\vec{A}$ и $\operatorname{div}\vec{A}$. Для контроля вычислить $\operatorname{div}\vec{A}$ в декартовой системе координат.

Вариант 23

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{(0)}^{(8/3)} dx \int\limits_{2x-2}^{\sqrt{4+x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 8 - x^2$; $z = 3y$; $z = 8 - y$; $y = 0$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 5 - x^2 - y^2$; $z = 1$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(0;0)}^{(1;\frac{\pi}{2})} y\cos(xy)\,dx + x\cos(xy)\,dy$, отыскав с помощью криволинейного интеграла функцию по её полному дифференциалу.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Используя формулу Грина, вычислить

$$\oint \frac{3x - y^3\sqrt{1+x^2+4y^3}\,dx + (18y^2 + x^3\sqrt{1+x^2+4y^3})\,dy}{3\sqrt{1+x^2+4y^3}}$$

вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$ (направление обхода положительное).

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z) = 4y^2 + 2z^2 - x$, $M_0(0;2;1)$, $M_1(0;1;1)$, $M_2(-2;1;2)$, $M_3(0;1;2)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xyz; xy; xz\}$; $M_0(1;-1;2)$; V: $x + z = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $x = 0$, $z = 0$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, вырезаемая поверхностями $z = 2$; L: $\dfrac{x^2}{4} = z$, $y = 0$, $z = 4$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $\vec{A}(x,y,z) = z\vec{k}$ преобразовать к сферической системе координат и найти $\operatorname{rot}\vec{A}$ и $\operatorname{div}\vec{A}$. Для контроля вычислить $\operatorname{div}\vec{A}$ в декартовой системе координат.

Вариант 24

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_{2y-1}^{(y+1)/2} f(x,y)\,dx.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $4z = x^2$; $y = 0$; $y + z = 4$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$; $z = 1$; $z = 4$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_L (y+x)\,dx + (y-x)\,dy$ вдоль верхней части эллипса $\dfrac{(x-4)^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ от точки $A(6;0)$ до точки $B(2;0)$ и далее по прямой до точки $C(0;2)$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint \dfrac{y}{x}\,dx + x^2\,dy$ вдоль контура, образованного кривой $y = \ln x$, осью Ox и прямой $x = e$ (направление обхода положительное). Проверить результат с помощью двойного интеграла.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$, $M_0(3;2)$, $M_1(1;1)$, $M_2(-1;3)$, $M_3(-2;-1)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xz; yz; z^2\}$; $M_0(3;2;-1)$; V: $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z = 0$ $(z \geq 0)$; Σ — часть поверхности $z + x = 1$, вырезаемая поверхностями $z = 0$, $y = 1$, $z = y$; L: $z + y = 1$, $x = 0$, $z - y = 1$, $z = 0$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $\vec{A}(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ преобразовать к сферической системе координат и найти $\operatorname{rot}\vec{A}$ и $\operatorname{div}\vec{A}$. Для контроля вычислить $\operatorname{div}\vec{A}$ в декартовой системе координат.

Вариант 25

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-4}^{0} dx \int_{-\sqrt{-x}}^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y+z=2$; $z=0$; $4z+2y+x=8$; $2z+x+y=4$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$; $z=2x$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{(1;2)}^{(4;5)} \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\displaystyle\oint_L y^2\,dx + xy\,dy$ вдоль окружности $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, проходимой в положительном направлении.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U=f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z)=3x^2-y^2-z$, $M_0(1;2;2)$, $M_1(2;2;3)$, $M_2(0;1;5)$, $M_3(-1;1;4)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{x;y;-xyz^2\}$; $M_0(1;-1;1)$; V: $x^2+y^2-z^2=0$, $z=1$; Σ — часть поверхности $y+z=1$, вырезаемая поверхностями $x=0$, $z=0$, $y=x$; L: $x^2+z^2=1$, $y=1$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $\vec{A}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}$ преобразовать к сферической системе координат и найти $\operatorname{rot}\vec{A}$ и $\operatorname{div}\vec{A}$. Для контроля вычислить $\operatorname{div}\vec{A}$ в декартовой системе координат.

Вариант 26

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1+\sqrt{1-x^2}}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1+\sqrt{1-x^2}}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{4-x}$; $y^2=4-x$; $z=0$; $x=0$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$; $z=4$; $y=1$ $(y>1)$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить $\int\limits_L xy\,dy+y\,dx$ вдоль параболы $y=x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$ и далее по окружности $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ до точки $B(2;2)$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_L y^2\,dx+x\,dy$ по контуру, образованному кривой $y=\sqrt{x-1}$, прямой $y=2$ и отрезками осей Ox и Oy (направление обхода положительное). Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U=f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y)=5xy$, $M_0(2;2)$, $M_1(3;4)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;1)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{3y^2;-3x^2;-xz\}$; $M_0(2;1;0)$; $V\colon\ x+z=1$, $y=0$, $z=0$, $y=x$; Σ — часть поверхности $x^2+y^2=z$, вырезаемая поверхностями $z=1$; $L\colon\ z=x^2$, $y=1$, $z=4$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $\vec{A}(x,y,z)=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{i}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ преобразовать к сферической системе координат и найти $\operatorname{rot}\vec{A}$ и $\operatorname{div}\vec{A}$. Для контроля вычислить $\operatorname{div}\vec{A}$ в декартовой системе координат.

Вариант 27

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x+z=1$; $x=0$; $y=0$; $x+y=1$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+z^2=5a^2$; $x^2-y^2+{}$ $+\,z^2=4a^2$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(-4;3)}^{(4;0)} (x^3-3y)\,dx+(y^2-3x)\,dy$ по формуле Ньютона — Лейбница, предварительно отыскав функцию $U(x,y)$ с помощью криволинейного интеграла.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_L (x^2+y)\,dx-(y^2+x)\,dy$ вдоль контура, образованного верхней частью окружности $x^2+y^2=1$ и отрезкам прямых, соединяющих концы $A(-1;0)$ и $C(1;0)$ полуокружности с точкой $B(0;-1)$ (направление обхода положительное). Результат проверить по формуле Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U=f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y)=z^2+2x^2-4y^2$, $M_0(1;1;1)$, $M_1(2;1;1)$, $M_2(3;2;2)$, $M_3(0;3;2)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{2x^2y; xy^2; -4xyz\}$; $M_0(-1;-1;2)$; V: $x^2+y^2=-z+5$, $z=0$; Σ — часть поверхности $x+y=1$, вырезаемая поверхностями $z=0$, $y=0$, $z=x$; L: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $\vec{A}(x,y,z)=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ преобразовать к сферической системе координат и найти $\operatorname{rot}\vec{A}$ и $\operatorname{div}\vec{A}$. Для контроля вычислить $\operatorname{div}\vec{A}$ в декартовой системе координат.

Вариант 28

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt{y+1}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = y^2$; $z = y$; $y = x$; $x = 1$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 9 - x^2 - y^2$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$ (вне цилиндра).

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_L (x+y)\,dx + (y-x)\,dy$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 4$ от точки $A(0;2)$ до точки $B(2;0)$ и далее по прямой до точки $C(4;2)$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_C (2x-y)\,dx + (x-1)\,dy$ вдоль контура, образованного прямыми $y = 2x$, $y = \dfrac{2}{x}$, $x = 2$ (направление обхода положительное). Результат проверить по формуле Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y) = 3^{x+2y}$, $M_0(1;-1)$, $M_1(0;1)$, $M_2(1;0)$, $M_3(1;1)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{y^2; x^2; xy^2z\}$; $M_0(-2;1;-1)$; V: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$ $(z > 0)$, $x = 0$, $y = 0$; Σ — часть поверхности $x + z = 1$, вырезаемая поверхностями $y = 1$, $z = 0$, $z = y$; L: $x^2 + y^2 = 1$, $z = x$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $\vec{A}(x,y,z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} - z\sqrt{x^2+y^2} \cdot \vec{k}$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти $\operatorname{rot}\vec{A}$ и $\operatorname{div}\vec{A}$. Для контроля вычислить $\operatorname{div}\vec{A}$ в декартовой системе координат.

Вариант 29

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{-2+\frac{1}{2}(x-2)^2}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = -y^2 + 2$; $z = y$; $y = x$; $x = 0$, $z = 0$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $x^2 + y^2 = a^2$; $x^2 + y^2 = 4a^2$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(1;1)}^{(8;4)} \left(\sqrt{y} - \dfrac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right) dx + \left(\dfrac{x}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dy$ по формуле Ньютона — Лейбница, отыскав предварительно функцию $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_{C} 2x\,dy - (x-y)\,dx$ вдоль контура, образованного кривыми $y = x + 1$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ и проходимого в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y,z)$. Найти: а) поверхности уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 поверхность уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $M_0(1;1;1)$, $M_1(3;2;1)$, $M_2(0;1;0)$, $M_3(-1;2;-2)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xy; -y^2; xz\}$; $M_0(0;1;-1)$; V: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z = 1$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, вырезаемая поверхностями $z = \sqrt{2}$ $(z \geq \sqrt{2})$; L: $x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$, $z = 1$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $\vec{A}(x,y,z) = -zy\vec{i} + xz\vec{j} + z\sqrt{x^2+y^2}\cdot\vec{k}$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти $\operatorname{rot}\vec{A}$ и $\operatorname{div}\vec{A}$. Для контроля вычислить $\operatorname{div}\vec{A}$ в декартовой системе координат.

Вариант 30

Задача 1 (*1 балл*)**.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{(0)}^{(3)} dy \int\limits_{(y-3)}^{(0)} f(x,y)\,dx + \int\limits_{(3)}^{(6)} dy \int\limits_{(0)}^{(y-3)} f(x,y)\,dx.$$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y^2 - x^2 = 1$; $x + z = 3$; $z = 0$; $x = 0$.

Задача 3 (*1 балл*)**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; $z = 0$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(-1;1)}^{(2;-1)} \frac{dx + dy}{(x+y+2)^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$ вдоль периметра квадрата с вершинами $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$, проходимого в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Дано скалярное поле $U = f(x,y)$. Найти: а) линии уровня скалярного поля и изобразить их; б) градиент скалярного поля в точке M_0, построив для точки M_0 линию уровня и градиент; в) производную в точке M_1 по направлению к точке M_2, направление наибольшего изменения скалярного поля и величину наибольшего изменения поля в точке M_1; г) работу градиента скалярного поля от точки M_1 до точки M_3; д) уравнения векторной линии градиента поля, проходящей через точку M_0.

Исходные данные: $f(x,y) = 2(x-1)^2 - 3(y-2)^2$, $M_0(3;3)$, $M_1(2;1)$, $M_2(1;1)$, $M_3(3;4)$.

Задача 7 (*1 балл*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{y; -x; yz\}$; $M_0(-1;3;0)$; V: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ $(y \geq 0)$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, вырезаемая поверхностями $z = 0$, $z = y$; L: $x^2 + y^2 = 1$, $z = y$.

Задача 8 (*1 балл*)**.** Скалярное поле $\vec{A}(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}\cdot(x\vec{j} - y\vec{i})$ преобразовать к цилиндрической системе координат и найти $\operatorname{rot}\vec{A}$ и $\operatorname{div}\vec{A}$. Для контроля вычислить $\operatorname{div}\vec{A}$ в декартовой системе координат.