Лабораторная работа № 2

Исследование обусловленности задачи решения системы линейных уравнений

Цель работы

Исследование устойчивости решения СЛАУ к погрешностям исходных данных, изучение методов оценки числа обусловленности матрицы.

Содержание работы

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b, \tag{1}$$

где A — матрица системы размера $n \times n$, $\det A \neq 0$, b — вектор правой части. Требуется выполнить следующие действия.

1) Написать программу для вычисления числа обусловленности матрицы системы, а также его оценки путем решения системы с возмущенной правой частью.

2) Внести возмущение в систему, изменив произвольно элементы вектора правых частей на $\pm 0{,}01$. Найти решение возмущенной системы и сравнить его с ранее полученным. Сделать вывод об устойчивости решения к погрешностям исходных данных. Расчет провести для обеих систем своего варианта.

3) При помощи полученных решений систем с возмущенной правой частью дать оценку снизу для числа обусловленности матрицы системы.

4) Вычислить число обусловленности матрицы. Предусмотреть возможность использования в расчетах норм векторов и матриц $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$.

5) Провести расчеты с обычной и повышенной точностью для тестовой задачи и двух систем своего варианта. Предусмотреть вывод на экран либо в файл результата умножения матриц $A^{-1}A$.

Методические указания

Общие сведения об обусловленности задачи решения СЛАУ

Будем считать, что система уравнений (1) имеет единственное решение. На практике исходные данные — коэффициенты матрицы A и элементы вектора правой части b — обычно заданы лишь приближенно, их точность ограничена. Это чаще всего связано с невозможностью определения исходных данных со сколь угодно высокой точностью. Другой источник погрешности связан с представлением вещественных чисел в ЭВМ, которое в общем случае не является точным. Эта погрешность обычно на несколько порядков меньше, чем погрешность исходных данных, однако ее наличие может существенно сказаться на получаемом решении системы, поэтому пренебрегать ею нельзя.

Обусловленность вычислительной задачи — это чувствительность ее решения к малым погрешностям входных данных. Задачу называют хорошо обусловленной, если малым погрешностям входных данных отвечают малые погрешности решения, и плохо обусловленной, если возможны сильные изменения решения при малых возмущениях входных данных.

В данной лабораторной работе исследуем обусловленность задачи решения СЛАУ, считая, что ее матрица задана точно, т. е. оценим влияние погрешностей правой части на ее решение.

Число обусловленности

Пусть Δb — погрешность, с которой задана правая часть системы (1). Тогда в результате решения системы

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b \tag{2}$$

решение исходной задачи (1) будет найдено с погрешностью Δx, удовлетворяющей условию

$$A\Delta x = \Delta b, \quad \text{или} \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

Отсюда получается оценка абсолютной погрешности решения

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|.$$

Однако такая оценка может оказаться недостаточно информативной, поскольку на практике важно знать, как связаны относительные погрешности решения и правой части. Учитывая неравенство

$$\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|,$$

получаем

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}. \tag{3}$$

Величину

$$\operatorname{cond} A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \tag{4}$$

называют числом обусловленности матрицы A. Заметим, что числа обусловленности матриц A и A^{-1} совпадают.

Матрица называется плохо обусловленной когда ее число обусловленности велико, и хорошо обусловленной, если ее число обусловленности достаточно мало.

Важно отметить, что умножение матрицы A на произвольную константу $\alpha \neq 0$ не приведет к изменению ее числа обусловленности, т. к. в этом случае обратная матрица окажется умноженной на величину α^{-1}.

Оценка числа обусловленности

Из формулы (4) видно, что величина числа обусловленности матрицы зависит от выбора нормы. Тем не менее, можно показать, что во всех случаях

$$\operatorname{cond} A \geq 1.$$

Если известны собственные значения матрицы A, то для числа обусловленности справедлива оценка

$$\operatorname{cond} A \geq \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|},$$

где $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ — соответственно максимальное и минимальное по модулю собственные значения.

Если матрица $A = A_1 \cdot A_2$, то ее число обусловленности не превышает произведения чисел обусловленности матриц-множителей:

$$\operatorname{cond} A \leq \operatorname{cond} A_1 \cdot \operatorname{cond} A_2.$$

Из соотношения (3) следует неравенство

$$\operatorname{cond} A \geq \frac{\delta x}{\delta b},$$

где

$$\delta x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}, \qquad \delta b = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

— относительные погрешности решения и правой части соответственно.

Для получения нижней оценки числа обусловленности можно несколько раз решить систему (2) с разными Δb и выбрать наибольшую величину отношения относительных погрешностей решения и правой части.

Содержание отчета

1) Номер варианта и исходные данные.

2) Краткое описание используемых алгоритмов.

3) Результаты расчетов (точное значение числа обусловленности, его оценка, номер компоненты вектора правой части, наиболее сильно влияющей на решение).

4) Анализ результатов: оценка влияния числа обусловленности матрицы системы на результаты ее решения численными методами с различной точностью (с использованием результатов выполнения Лабораторной работы № 1), сравнение полученной оценки с точным значением числа обусловленности, оценка числа обусловленности с использованием норам $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$.

Контрольные вопросы

1) Что такое число обусловленности? Что оно характеризует?

2) Как упрощается оценка числа обусловленности, если матрица является:

   а) диагональной;

   б) симметричной;

в) ортогональной;

г) положительно определенной;

д) треугольной?

3) Имеется ли связь между обусловленностью и величиной определителя матрицы?

4) Как влияет выбор нормы матрицы на оценку числа обусловленности?

5*. Применимо ли понятие числа обусловленности к вырожденным матрицам?

6*. Объясните, почему, говоря о векторах, норму $\|\cdot\|_1$ часто называют октаэдрической, норму $\|\cdot\|_2$ — шаровой, а норму $\|\cdot\|_\infty$ — кубической.

Примеры заданий

Системы уравнений для тестирования программы

1) Тестовый пример «Тест 1»:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3 + x_4 = 2, \\ \phantom{x_1 + x_2 + x_3 + {}} x_4 = 1. \end{cases}$$

$\operatorname{cond}_1 A = 8$,

$\operatorname{cond}_\infty A = 8$.

2) Тестовый пример «Тест 2»:

$$\begin{cases} \phantom{x_1 + x_2 + x_3 + {}} x_4 = 1, \\ \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3 + x_4 = 2, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

$\operatorname{cond}_1 A = 8,$

$\operatorname{cond}_\infty A = 8.$

3) Тестовый пример «Тест 3»:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 15, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 22. \end{cases}$$

Матрица системы вырожденная, $\operatorname{cond} A = \infty$.

4) Тестовый пример «Тест 4»:

$$\begin{cases} 10x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 25, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 14, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8. \end{cases}$$

$\operatorname{cond}_1 A \approx 240.55,$

$\operatorname{cond}_\infty A \approx 269.18.$

5) Тестовый пример «Тест 5»:

$$\begin{cases} 28.859\,x_1 - 0.008\,x_2 + 2.406\,x_3 + 19.240\,x_4 = 30.459, \\ 14.436\,x_1 - 0.001\,x_2 + 1.203\,x_3 + 9.624\,x_4 = 18.248, \\ 120.204\,x_1 - 0.032\,x_2 + 10.024\,x_3 + 80.144\,x_4 = 128.156, \\ -57.714\,x_1 + 0.016\,x_2 - 4.812\,x_3 - 38.478\,x_4 = -60.908. \end{cases}$$

Число обусловленности $\operatorname{cond}_1 A \approx 122414849.9,$

$$\operatorname{cond}_\infty A \approx 109686235.3.$$