

51
Б869

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермская государственная сельскохозяйственная академия
имени академика Д.Н. Прянишникова»

М.Г. Бояршинов

**ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
ПО МЕТОДАМ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ**

728707

УДК 004
ББК 32.81
Б-86



Рецензент:

А.А. Роговой, доктор физико-математических наук, профессор, зам. директора Института механики сплошных сред УрО РАН по науке.

Б-86 Бояршинов, М.Г. Лабораторные работы по методам вычислительной математики / М.Г. Бояршинов; ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА. – Пермь: Изд-во ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА, 2013. – 96 с.

Пособие может использоваться студентами и аспирантами, специалистами, занимающимися построением математических моделей процессов и явлений различной природы. На примерах решения конкретных задач рассмотрены способы реализации всех представленных в пособии алгоритмов и методов. Разработаны задания для самостоятельного решения студентами системы линейных алгебраических уравнений, нелинейных уравнений, аппроксимации функций, численного дифференцирования, численного интегрирования, задач Коши и граничных задач.

Содержание лабораторных работ соответствует требованиям к уровню подготовки бакалавров направления «Прикладная информатика». Пособие может быть использовано в качестве учебного и дополнительного материала для студентов при изучении численных методов решения прикладных задач

УДК 004
ББК 32.81

Печатается по решению методической комиссии факультета прикладной информатики Пермской ГСХА (протокол № 4 от 22.01.2013 г.).

Учебное издание

Бояршинов М. Г.

**Лабораторные работы по методам
вычислительной математики**

Подписано в печать 20.02.2013. Формат 60×84¹/₈
Усл. печ. л 12,13. Тираж 80 экз. Заказ № 45

ИПЦ «ТрокростЪ»

Пермской государственной сельскохозяйственной академии
имени академика Д.Н.Прянишникова,
614990, Россия, г. Пермь, ул. Петропавловская, 23
тел. 210-35-34

© ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Численные методы линейной алгебры.....	8
1.1. Системы линейных алгебраических уравнений	8
1.1.1. Метод Гаусса.....	8
1.1.2. Метод квадратного корня.....	17
1.1.3. Метод Якоби	20
1.1.4. Метод Зейделя	22
1.2. Нелинейные уравнения	25
1.2.1. Метод половинного деления (дихотомия).....	25
1.2.2. Метод простых итераций.....	28
1.2.3. Метод Ньютона	30
1.3. Аппроксимация функций.....	34
1.3.1. Интерполяционный многочлен Ньютона	34
1.3.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа.....	40
1.3.3. Метод наименьших квадратов	43
1.3.4. Метод наилучшего приближения	46
2. Численные методы математического анализа	50
2.1. Численное дифференцирование	50
2.1.1. Разностный аналог первой производной	51
2.1.2. Разностный аналог второй производной	54
2.2. Численное интегрирование.....	56
2.2.1. Формула прямоугольников.....	56
2.2.2. Формула трапеций	60
2.2.3. Формула парабол (Симпсона).....	62
3. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	65
3.1. Задачи Коши.....	65
3.1.1. Метод Эйлера.....	65
3.1.2. Метод Рунге – Кутты 2-го порядка.....	69
3.1.3. Метод Рунге – Кутты 3-го порядка.....	72
3.1.4. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка.....	75
3.1.5. Метод Адамса	78
3.2. Граничные задачи (разностный метод).....	82
4. Задания для самостоятельного выполнения	89
4.1. Системы линейных алгебраических уравнений	89
4.2. Нелинейные уравнения	89
4.3. Аппроксимация функции.....	90
4.4. Численное дифференцирование.....	91
4.5. Численное интегрирование.....	91
4.6. Задачи Коши.....	93
4.7. Граничные задачи (разностный метод).....	94
Библиографический список	96

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для студентов, выполняющих вычислительные работы при изучении численных методов, расчетные работы во время практикумов по вычислительной математике, а также самостоятельно проводящих исследования, связанные с вычислительными экспериментами при решении прикладных задач математики, механики, физики, химии, электротехники, геологии и других дисциплин.

Первая глава пособия посвящена методам решения систем линейных алгебраических уравнений прямыми (Гаусса, квадратного корня) и итерационными (Якоби, Зейделя) методами, нелинейных уравнений (методы Ньютона, половинного деления, простых итераций), аппроксимации функций (полиномы Ньютона, Лагранжа, методы наименьших квадратов, наилучшего приближения). Основное внимание при выполнении вычислительных работ в этой части пособия уделяется получению оценок погрешности численных решений, исследованию сходимости (расходимости) последовательностей получаемых решений при выполнении итерационных процедур, оценке эффективности вычислительных алгоритмов и программ.

Во второй главе рассматриваются способы построения разностных аналогов производных первого и второго порядков, а также вычисление приближенных значений определенных интегралов методами прямоугольников, трапеций и парабол. Здесь одним из главных вопросов является теоретическая оценка порядка погрешности аппроксимации выбранной вычислительной схемой исходного дифференциального или интегрального соотношения. Рассматриваются способы оценки погрешности численного результата с использованием последовательности сгущающихся разностных сеток.

В третьей главе пособия численные методы используются для построения решений обыкновенных дифференциальных уравнений в задачах Коши (методы Эйлера, Рунге – Кутты, Адамса) и граничных задачах (методы пристрелки, сеточный, Галеркина, наименьших квадратов). Основная идея решения дифференциальных уравнений численными методами заключается, как правило, в сведении решения исходной дифференциальной задачи к решению систем алгебраических (линейных или нелинейных) уравнений. При этом, естественно, возникает вопрос о решении получаемых систем алгебраических уравнений одним из изученных ранее методов. Как и в предыдущей главе, значительное внимание уделяется оценке погрешности аппроксимации разностной схемой исходного дифференциального уравнения, позволяющей судить о степени адекватности используемой сеточной модели исходной дифференциальной задаче. Погрешность получаемых численных решений дифференциальных уравнений анализируется на последовательностях разностных сеток.

При выполнении вычислительных работ следует обратить особое внимание на оформление результатов вычислений в отчете. Образец титульного листа отчета по выполнению вычислительных работ представлен на рис. В.1.

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «ПГСХА им. академика Д.Н. Прянишникова»
Кафедра информационных технологий и автоматизированного проектирования

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Решение нелинейного уравнения методом Ньютона

Вариант №1

Выполнил:
студент гр. ПИБ-21 П.С. Иванов

Проверил:
профессор каф. ИТАП М.Г. Бояршинов

Пермь 2013

Рис. В.1. Образец титульного листа отчета по лабораторной работе

Отчет должен в обязательном порядке содержать:

1. Постановку задачи.
2. Краткое описание численного метода (при возможности – с графической иллюстрацией) и проверку условий его применимости.
3. Подробное описание алгоритма получения численного решения.
4. Оценку погрешности δ_n получаемого численного решения. Как правило, для этого используется чебышёвская норма отклонения n -го приближения численного решения $y_n(x)$ от точного решения $y(x)$ на отрезке $[a, b]$,

$$\delta_n = \max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_n(x)|.$$

При отсутствии точного решения поставленной задачи погрешность получаемого результата оценивается с использованием чебышёвской нормы отклонения приближенного (численного) решения $y_n(x)$ от приближенного (численного) решения $y_{n+1}(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\delta_n = \max_{x \in [a, b]} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|.$$

Таблица В.1

Последовательность численных решений $y_k(x)$ дифференциальной задачи с различными сеточными шагами

x_i	$y_1(x_i)$	$y_2(x_i)$	$y_3(x_i)$
0,000	1,000	1,000	1,000
0,125			0,875
0,250		0,750	0,76563
0,375			0,66992
0,500	0,500	0,56250	0,58618
0,625			0,51291
0,750		0,42188	0,44879
0,875			0,39269
1,000	0,250	0,31641	0,34361
1,125			0,30066
1,250		0,23731	0,26308
1,375			0,23019
1,500	0,125	0,17798	0,20142
1,625			0,17624
1,750		0,13348	0,15421
1,875			0,13493
2,000	0,0625	0,10011	0,11807

Пусть, например, получена последовательность $y_k(x)$ численных решений дифференциальной задачи с различными сеточными шагами (табл. В.1). Для получения оценки δ_n используются узловые значения двух приближений искомой функции (например, $y_1(x)$ и $y_2(x)$) в общих узлах разностной сетки: 0; 0,5; 1; 1,5; 2.

Разность узловых значений $y_2(x) - y_1(x)$ дает набор соответствующих значений: 0; 0,0625; 0,06641; 0,05298; 0,03761. Это позволяет оценить погрешность δ_1 (в соответствии с принятым выше определением) значением, равным 0,06641.

Затем для вычисления δ_2 выбираются узлы разностной сетки 0; 0,25; 0,5; 0,75; ..., общие для численных решений $y_2(x)$ и $y_3(x)$, и так далее.

5. Графическое представление численного решения, полученное с погрешностью, не превышающей заданное значение, например, $\delta_n \leq 10^{-6}$.

6. Оценку времени, затраченного на получение численного решения, и характеристики ЭВМ, используемой для расчетов (объем оперативной памяти, тип процессора и его тактовую частоту). Поскольку современные компьютеры обладают высоким быстродействием, могут возникнуть проблемы с оценкой времени работы используемого алгоритма. В этом случае приходится, как правило, замерять время, затраченное на многократное исполнение изучаемого алгоритма, повторяемое, например, 1000, 100 000 или большее число раз.

7. Общие выводы по выполненной работе. При этом каждому пункту задания должно соответствовать краткое, но четкое описание полученного результата.

Пристальное внимание следует обратить на оформление результатов вычислительных работ. Массивы чисел, получаемые в результате расчетов, не являются конечным результатом вычислительного эксперимента. Это лишь «сырье» для кропотливой, вдумчивой работы исследователя, основа для размышлений и выводов. Массивы данных должны быть обработаны и представлены в виде, удобном для последующего анализа, то есть в виде таблиц, рисунков, диаграмм, графиков.

Каждый рисунок следует снабжать исчерпывающим комментарием, разъясняющим смысл приведенных данных. Координатные оси должны быть в обязательном порядке подписаны и размечены. Если координатные оси отражают значения размерных величин, в подписи к рисунку следует указать используемую размерность. Иногда целесообразно использовать логарифмические координаты для большей наглядности представления результатов (рис. В.2).

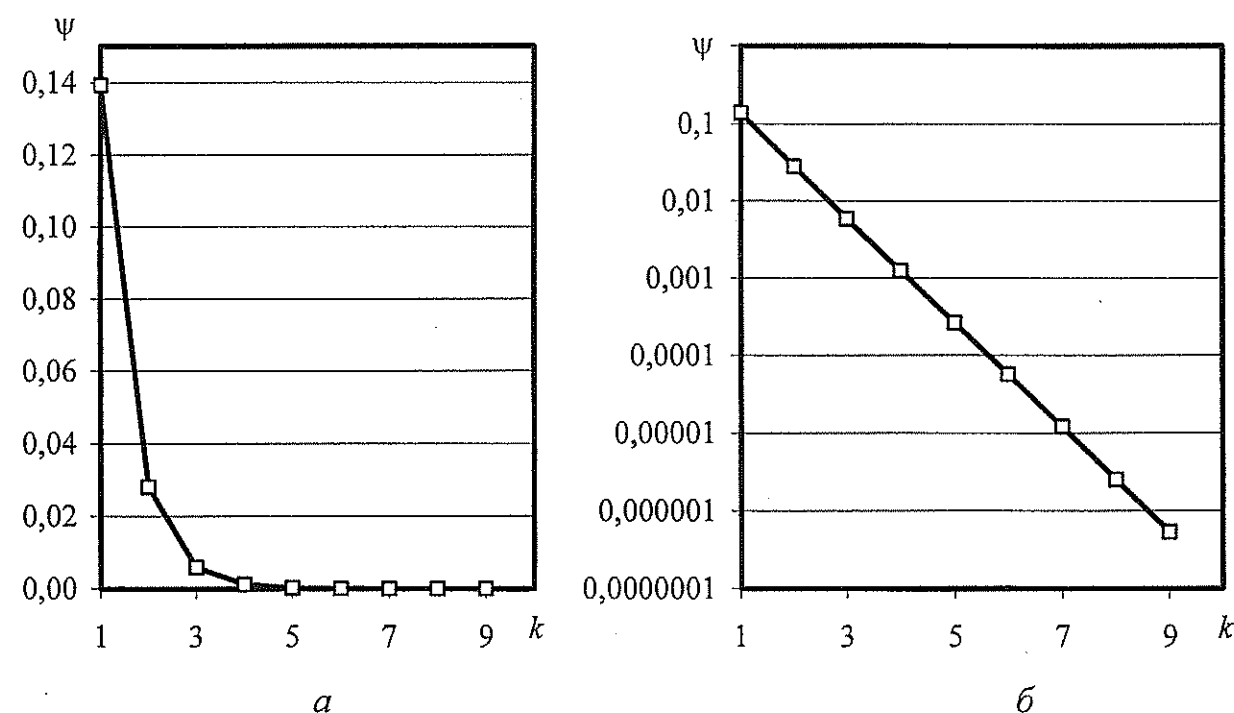


Рис. В.2. Зависимость погрешности ψ решения алгебраического уравнения от номера итерации k в обычных (а) и логарифмических (б) координатах

При использовании ссылок на печатные работы (тезисы докладов, статьи, монографии) следует руководствоваться общепринятой системой оформления списка используемых литературных источников. Список помещается в конце отчета, все цитируемые источники нумеруются и сортируются по алфавиту, либо по порядку цитирования, либо по годам издания (см. библиографический список). В тексте отчета для ссылок на цитируемые литературные источники используются квадратные скобки, в которых номера литературных источников из библиографического списка перечисляются через запятую.

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Системы линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений представляется в виде

$$Ax = f,$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$ – квадратная матрица размером $m \times m$,

$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_m \end{bmatrix}$ – правая часть системы уравнений; $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}$ – искомый вектор.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на прямые и итерационные.

Прямыми называют методы решения систем линейных алгебраических уравнений, для которых результат получается за конечное, заранее известное, число арифметических операций.

Итерационными называются методы, при которых решение системы линейных алгебраических уравнений получается как предел некоторой последовательности.

1.1.1. Метод Гаусса

Задание. Для системы линейных алгебраических уравнений $Ax = f$:

- разработать вычислительную программу, реализующую метод Гаусса;
- найти решение этой системы уравнений;
- построить обратную матрицу A^{-1} ;
- вычислить определители $\det(A)$ и $\det(A^{-1})$;
- оценить погрешность нахождения решения системы уравнений;
- подсчитать значение числа обусловленности M_A матрицы A ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Рассмотрим процедуру решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса в общем случае.

Система уравнений $Ax = f$ в развернутой (компонентной) записи представляется в виде

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1m} \cdot x_m = f_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \dots + a_{2m} \cdot x_m = f_2, \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + \dots + a_{3m} \cdot x_m = f_3, \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \dots + a_{mm} \cdot x_m = f_m. \end{cases} \quad (1.1)$$

Пусть $a_{11} \neq 0$. Тогда первое уравнение системы (1.1) можно поделить на этот коэффициент,

$$1 \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 = \frac{f_1}{a_{11}},$$

где $c_{12} = a_{12}/a_{11}$, $c_{13} = a_{13}/a_{11}$, ..., $c_{1m} = a_{1m}/a_{11}$. С помощью этого уравнения система (1.1) преобразуется к виду

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1, \\ 0 \cdot x_1 + a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{2m}^{(1)} \cdot x_m = f_2^{(1)} = f_2 - a_{21} \cdot y_1, \\ 0 \cdot x_1 + a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + a_{33}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = f_3^{(1)} = f_3 - a_{31} \cdot y_1, \\ \dots \\ 0 \cdot x_1 + a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + a_{m3}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = f_m^{(1)} = f_m - a_{m1} \cdot y_1. \end{cases}$$

Здесь обозначено: $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} \cdot c_{1j}$, $i, j = \overline{2, m}$. В полученной системе можно выделить подсистему $m-1$ линейных уравнений с $m-1$ неизвестными величинами:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{2m}^{(1)} \cdot x_m = f_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + a_{33}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = f_3^{(1)}, \\ \dots \\ a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + a_{m3}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = f_m^{(1)}. \end{cases}$$

Пусть теперь $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Поделим первое уравнение новой системы на этот коэффициент:

$$1 \cdot x_2 + c_{23} \cdot x_3 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 = \frac{f_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{f_2 - a_{21} \cdot y_1}{a_{22}^{(1)}},$$

где $c_{23} = a_{23}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$, $c_{24} = a_{24}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$, ..., $c_{2m} = a_{2m}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$. С помощью этого соотношения уравнения системы (1.1) преобразуются к виду

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + c_{23} \cdot x_3 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{33}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{3m}^{(2)} \cdot x_m = f_3^{(2)} = f_3^{(1)} - a_{32}^{(1)} \cdot y_2, \\ \dots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{m3}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{mm}^{(2)} \cdot x_m = f_m^{(2)} = f_m^{(1)} - a_{m2}^{(1)} \cdot y_2. \end{cases}$$

Здесь обозначено: $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot c_{2j}$, $i, j = \overline{3, m}$.

В результате преобразований получена подсистема $m-2$ уравнений с $m-2$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{3m}^{(2)} \cdot x_m = f_3^{(2)}, \\ \dots \\ a_{m3}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{mm}^{(2)} \cdot x_m = f_m^{(2)}. \end{cases}$$

Предполагая, что в первом уравнении последней системы $a_{33}^{(2)} \neq 0$, делим это уравнение на этот коэффициент:

$$1 \cdot x_3 + \dots + c_{3m} \cdot x_m = y_3 = \frac{f_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}.$$

Снова выполняются операции по понижению порядка системы алгебраических уравнений, и так далее, до тех пор, пока вся система уравнений (1.1) не будет преобразована к виду

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1, \\ \dots \\ 1 \cdot x_2 + c_{23} \cdot x_3 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2, \\ \dots \\ 1 \cdot x_3 + \dots + c_{3m} \cdot x_m = y_3, \\ \dots \\ \dots \\ 1 \cdot x_m = y_m. \end{cases}$$

Процедура получения матрицы такого вида носит название «прямого хода» метода Гаусса. Очевидным условием для успешного выполнения прямого хода является $a_{jj}^{(j-1)} \neq 0$, $j = \overline{1, m}$.

«Обратный ход» метода позволяет определить искомые величины:

$$\begin{cases} x_m = y_m, \\ x_{m-1} = y_{m-1} - c_{m-1m} x_m, \\ x_{m-2} = y_{m-2} - c_{m-2m} x_m - c_{m-2m-1} x_{m-1}, \\ \dots \\ x_1 = y_1 - \sum_{k=2}^m c_{1k} x_k. \end{cases}$$

Вычитание строк в методе Гаусса (образование линейных комбинаций уравнений) не изменяет значения определителя матрицы. В результате выполнения всех преобразований метода Гаусса определитель исходной матрицы может быть вычислен с использованием формулы

$$\det(A) = \prod_{j=1}^m a_{jj}^{(j-1)}.$$

Таким образом, сохраняя значения коэффициентов, расположенных после преобразования уравнений на главной диагонали (до операции деления коэффициентов строки на первый ненулевой элемент), можно вычислить определитель исходной матрицы.

Пусть α_{pq} , $p, q = \overline{1, m}$ — коэффициенты обратной матрицы A^{-1} . Согласно определению, $\sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot \alpha_{kj} = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера. Теперь q -й столбец $\alpha_{p(q)}$ обратной матрицы можно рассматривать как результат решения системы линейных алгебраических уравнений вида

$$A \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_{1(q)} \\ \alpha_{2(q)} \\ \dots \\ \alpha_{p(q)} \\ \dots \\ \alpha_{m(q)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0_{(1)} \\ 0_{(2)} \\ \dots \\ 1_{(q)} \\ \dots \\ 0_{(m)} \end{Bmatrix}.$$

Таким образом, для нахождения обратной матрицы необходимо решить m систем линейных алгебраических уравнений с правыми частями, определенными специальным образом. При этом матрицу коэффициентов следует преобразовать лишь один раз, но одновременно преобразовывать m правых частей всех систем уравнений.

Выполнение расчетов

Пусть система, состоящая из 15 линейных алгебраических уравнений, задана с помощью табл. 1.1. Решение этой системы уравнений с помощью вычислительной программы, реализующей алгоритм метода Гаусса, приведено в табл. 1.2.

Компоненты обратной матрицы A^{-1} приведены в табл. 1.3. Детерминант матрицы A равен $5,71183 \cdot 10^{17}$, детерминант матрицы A^{-1} равен $1,75075 \cdot 10^{-18}$.

Для проверки правильности определения обратной матрицы A^{-1} целесообразно вычислить произведение матриц A и A^{-1} , которое по определению должно давать единичную матрицу:

$$A \cdot A^{-1} = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Результат перемножения матриц A и A^{-1} показан в табл. 1.4. Кроме того,

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) = \det(E) = 1.$$

Перемножение приведенных выше значений определителей матриц A и A^{-1} дает

$$\det(A) \det(A^{-1}) \approx 5,71183 \cdot 10^{17} \cdot 1,75075 \cdot 10^{-18} = 0,999999.$$

Это свидетельствует о хорошей точности проведенных вычислений.

Поскольку точное решение поставленной задачи – вектор x – неизвестно, определить погрешность полученного решения $\delta x = \tilde{x} - x$ невозможно. В предположении, что величины A и f введены в память компьютера без погрешностей, вычислим невязку $\eta = A\tilde{x} - f$, получаемую в результате подстановки в исходную задачу приближенного решения \tilde{x} вместо точного решения x . Вычисленные значения невязки η приведены в табл. 1.2.

Учитывая далее, что

$$\eta = A\tilde{x} - f = A\tilde{x} - Ax = A(\tilde{x} - x) = A\delta x,$$

можно оценить погрешность получаемого решения с помощью выражения

$$\delta x = A^{-1}\eta, \quad \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\eta\|,$$

где в качестве норм вектора и матрицы берутся, например,

$$\|\eta\| = \max_{1 \leq i \leq m} |\eta_i|, \quad \|A\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|. \quad (1.2)$$

Таблица 1.1
Коэффициенты матрицы a_{ij} и правая часть f_i системы линейных алгебраических уравнений $Ax = f$

	$j=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	f_i
$i=1$	16,0	3,5	1,2	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	205,8
2	3,5	16,0	3,5	1,2	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	222,8
3	1,2	3,5	16,0	3,5	1,2	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	153,2
4	0,6	1,2	3,5	16,0	3,5	1,2	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	209,7
5	0,0	0,6	1,2	3,5	16,0	3,5	1,2	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	119,0
6	0,0	0,0	0,6	1,2	3,5	16,0	3,5	1,2	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	126,9
7	0,0	0,0	0,0	0,6	1,2	3,5	16,0	3,5	1,2	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	45,5
8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	1,2	3,5	16,0	3,5	1,2	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	100,4
9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	1,2	3,5	16,0	3,5	1,2	0,6	0,0	0,0	0,0	-56,7
10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	1,2	3,5	16,0	3,5	1,2	0,6	0,0	0,0	-108,9
11	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	1,2	3,5	16,0	3,5	1,2	0,6	0,0	66,2
12	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	1,2	3,5	16,0	3,5	1,2	0,6	61,3
13	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	1,2	3,5	16,0	3,5	1,2	124,5
14	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	1,2	3,5	16,0	3,5	-18,1
15	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	1,2	3,5	16,0	-15,7

1,0	-9,2·10 ⁻⁹	3,0·10 ⁻⁹	1,4·10 ⁻¹⁰	4,2·10 ⁻¹⁰	1,1·10 ⁻¹⁰	-2,2·10 ⁻¹¹	-1,2·10 ⁻¹¹	-2,4·10 ⁻¹²	1,7·10 ⁻¹²	2,7·10 ⁻¹³	3,0·10 ⁻¹³	1,8·10 ⁻¹⁴	8,7·10 ⁻¹⁵	-7,3·10 ⁻¹⁶
-6,4·10 ⁻⁹	1,0	2,0·10 ⁻⁸	1,3·10 ⁻⁹	2,3·10 ⁻⁹	-6,9·10 ⁻¹⁰	-6,8·10 ⁻¹¹	-6,9·10 ⁻¹¹	1,0·10 ⁻¹¹	1,9·10 ⁻¹²	2,3·10 ⁻¹²	-2,2·10 ⁻¹²	1,2·10 ⁻¹³	-8,4·10 ⁻¹⁴	6,2·10 ⁻¹⁵
-5,4·10 ⁻⁹	2,6·10 ⁻⁸	1,0	-1,6·10 ⁻⁸	1,9·10 ⁻⁹	-2,0·10 ⁻⁹	1,1·10 ⁻⁹	-1,0·10 ⁻¹⁰	2,3·10 ⁻¹¹	3,4·10 ⁻¹¹	7,0·10 ⁻¹²	-5,1·10 ⁻¹³	-4,5·10 ⁻¹³	4,8·10 ⁻¹³	3,7·10 ⁻¹⁴
-1,1·10 ⁻⁹	4,5·10 ⁻⁹	6,1·10 ⁻⁹	1,0	7,6·10 ⁻⁹	-2,5·10 ⁻⁹	-2,0·10 ⁻⁹	4,8·10 ⁻¹¹	9,4·10 ⁻¹¹	3,5·10 ⁻¹¹	-7,6·10 ⁻¹³	8,4·10 ⁻¹²	1,5·10 ⁻¹²	1,0·10 ⁻¹²	-9,6·10 ⁻¹³
-4,6·10 ⁻¹⁰	3,7·10 ⁻⁹	3,2·10 ⁻⁹	-2,4·10 ⁻⁸	1,0	-1,5·10 ⁻⁹	-7,7·10 ⁻⁹	-5,9·10 ⁻¹⁰	9,8·10 ⁻¹⁰	3,0·10 ⁻¹⁰	-4,6·10 ⁻¹¹	-5,8·10 ⁻¹¹	1,4·10 ⁻¹¹	1,6·10 ⁻¹²	-4,0·10 ⁻¹⁴
-2,4·10 ⁻¹⁰	3,0·10 ⁻⁹	1,5·10 ⁻⁹	-5,0·10 ⁻⁹	-3,0·10 ⁻⁸	1,0	2,6·10 ⁻⁹	-4,9·10 ⁻⁹	-2,0·10 ⁻⁹	7,9·10 ⁻¹⁰	2,9·10 ⁻¹⁰	2,3·10 ⁻¹¹	-9,3·10 ⁻¹¹	1,2·10 ⁻¹¹	1,5·10 ⁻¹²
3,3·10 ⁻¹¹	2,4·10 ⁻¹⁰	8,3·10 ⁻¹⁰	-6,7·10 ⁻⁹	-4,5·10 ⁻⁹	1,0	7,2·10 ⁻⁹	-4,7·10 ⁻⁹	-1,4·10 ⁻⁹	-2,0·10 ⁻⁹	1,3·10 ⁻⁹	-9,2·10 ⁻¹¹	-1,1·10 ⁻¹¹	-8,2·10 ⁻¹¹	9,1·10 ⁻¹²
1,0·10 ⁻¹²	-3,4·10 ⁻¹²	-8,8·10 ⁻¹¹	-9,3·10 ⁻¹⁰	-1,3·10 ⁻⁹	-1,0·10 ⁻⁹	5,5·10 ⁻⁹	1,0	-1,2·10 ⁻⁸	-4,2·10 ⁻⁹	-2,0·10 ⁻⁹	-5,1·10 ⁻¹⁰	1,2·10 ⁻¹⁰	-4,6·10 ⁻¹¹	3,3·10 ⁻¹¹
2,4·10 ⁻¹¹	-6,5·10 ⁻¹¹	-4,0·10 ⁻¹²	4,6·10 ⁻¹¹	-1,0·10 ⁻⁹	-1,0·10 ⁻⁹	3,2·10 ⁻⁹	1,0·10 ⁻⁸	1,0	1,2·10 ⁻⁸	-1,6·10 ⁻⁸	1,6·10 ⁻⁹	2,3·10 ⁻¹⁰	2,9·10 ⁻¹⁰	-8,8·10 ⁻¹¹
7,0·10 ⁻¹²	1,9·10 ⁻¹¹	-7,2·10 ⁻¹¹	-7,7·10 ⁻¹¹	2,5·10 ⁻¹⁰	2,8·10 ⁻¹⁰	-1,4·10 ⁻⁹	-9,9·10 ⁻⁹	2,5·10 ⁻⁸	1,0	9,9·10 ⁻⁹	-5,3·10 ⁻⁹	-1,3·10 ⁻⁹	2,34·10 ⁻¹⁰	1,2·10 ⁻¹⁰
-1,1·10 ⁻¹³	6,1·10 ⁻¹²	1,0·10 ⁻¹¹	-1,5·10 ⁻¹⁰	5,3·10 ⁻¹²	2,0·10 ⁻¹⁰	1,6·10 ⁻⁹	1,4·10 ⁻¹⁰	-4,9·10 ⁻⁹	3,3·10 ⁻⁸	1,0	2,4·10 ⁻⁸	-1,0·10 ⁻⁸	2,3·10 ⁻⁹	4,1·10 ⁻¹⁰
4,0·10 ⁻¹³	-1,1·10 ⁻¹²	2,7·10 ⁻¹²	-2,0·10 ⁻¹¹	-1,5·10 ⁻¹¹	-1,0·10 ⁻¹⁰	3,0·10 ⁻¹⁰	1,8·10 ⁻¹⁰	-3,2·10 ⁻⁹	-2,8·10 ⁻⁹	6,2·10 ⁻⁹	1,0	6,3·10 ⁻⁹	-1,4·10 ⁻⁸	7,6·10 ⁻¹¹
-1,9·10 ⁻¹³	5,7·10 ⁻¹³	-8,7·10 ⁻¹³	3,1·10 ⁻¹²	8,4·10 ⁻¹²	-1,3·10 ⁻¹¹	4,4·10 ⁻¹²	1,2·10 ⁻¹⁰	8,4·10 ⁻¹⁰	-3,1·10 ⁻⁹	-1,6·10 ⁻⁸	2,8·10 ⁻⁸	1,0	1,3·10 ⁻⁸	-7,2·10 ⁻⁹
-3,5·10 ⁻¹⁴	-3,1·10 ⁻¹⁴	-3,2·10 ⁻¹³	-1,1·10 ⁻¹²	5,5·10 ⁻¹²	-5,9·10 ⁻¹²	-1,3·10 ⁻¹¹	1,8·10 ⁻¹²	3,2·10 ⁻¹⁰	8,5·10 ⁻¹⁰	-4,7·10 ⁻⁹	5,8·10 ⁻¹¹	1,4·10 ⁻⁸	1,0	1,1·10 ⁻⁸
-2,8·10 ⁻¹⁴	2,8·10 ⁻¹⁴	-1,7·10 ⁻¹³	0,0	9,0·10 ⁻¹³	9,09·10 ⁻¹³	0,0	0,0	-7,2·10 ⁻¹²	2,3·10 ⁻¹⁰	1,8·10 ⁻⁹	0,0	-1,1·10 ⁻⁸	1,4·10 ⁻⁸	1,0

1.1.2. Метод квадратного корня

Задание. Для системы линейных алгебраических уравнений $Ax = f$ с симметричной матрицей A :

- разработать вычислительную программу, реализующую метод квадратного корня;
- найти решение этой системы уравнений;
- построить обратную матрицу A^{-1} ;
- вычислить определители $\det(A)$ и $\det(A^{-1})$;
- оценить погрешность нахождения решения системы уравнений;
- подсчитать значение числа обусловленности M_A матрицы A ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Метод квадратного корня предназначен для решения систем линейных алгебраических уравнений вида $Ax = f$ с симметричной матрицей коэффициентов $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, m}$. Метод основан на разложении матрицы коэффициентов A в произведение:

$$A = S^T D S,$$

где S – верхняя треугольная матрица с положительными значениями на главной диагонали; D – диагональная матрица со значениями +1 или -1. Соотношения для вычисления диагональных значений матриц S и D :

$$d_{jj} = \text{sign} \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} s_{kj}^2 d_{kk} \right), \quad a_{jj} = s_{jj}^2 d_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} s_{kj}^2 d_{kk}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$s_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} s_{kj}^2 d_{kk}}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Наддиагональные элементы матрицы S определяются по формуле

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} d_{kk} s_{kj}}{s_{ii} d_{ii}}, \quad i < j = \overline{2, m}.$$

Если ввести обозначения $y = Sx$, $z = Dy$, то решение системы линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня $S^T D S x = f$ можно рассматривать как последовательность трех процессов: 1) решения системы уравнений $S^T z = f$, то есть вычисление решения z системы уравнений с нижней треугольной матрицей S^T ; 2) решения системы уравнений $Dy = z$, то есть вычисления решения y системы уравнений с диагональной матрицей D ; 3) реше-

1.1.3. Метод Якоби

Задание. Для системы линейных алгебраических уравнений $Ax = f$:

- разработать вычислительную программу, реализующую метод Якоби;
- с помощью этой программы с погрешностью не более $\delta = 10^{-6}$ найти решение заданной системы уравнений;
- исследовать сходимость последовательности получаемых решений;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений с отличным от нуля определителем $\det(A)$, которую представим в компонентной форме:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j = f_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Преобразуем эту систему к виду

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j + a_{ii}x_i + \sum_{j=i+1}^m a_{ij}x_j = f_i,$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^m a_{ij}x_j \right), \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.3)$$

Последнее выражение представим в виде итерационной схемы метода Якоби:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(n)} - \sum_{j=i+1}^m a_{ij}x_j^{(n)} \right), \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.4)$$

где n – номер итерации.

Условие сходимости последовательности решений метода Якоби: пусть A – симметричная положительно определенная матрица с диагональным преобладанием, то есть имеет место

$$a_{ii} > \sum_{j, j \neq i}^m |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, m}.$$

Тогда метод Якоби сходится.

Для получения решения используется следующий алгоритм. В качестве нулевого приближения выбираются какие-либо (зачастую произвольные) значения $x_j^{(0)}$, $j = \overline{1, m}$, искомых величин, которые подставляются в правую часть выражения (1.4), что позволяет определить первое приближение решения $x_j^{(1)}$, $j = \overline{1, m}$. Затем полученный результат вновь подставляется в правую часть

выражения (1.4) и вычисляется второе приближение $x_j^{(2)}$, $j = \overline{1, m}$, и так далее. Вычислительный процесс заканчивается, например, когда выполняется условие

$$\delta_k = \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \max_{1 \leq j \leq m} |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| < \delta, \quad (1.5)$$

где $\delta > 0$ – заданная погрешность вычисления результата.

Выполнение расчетов

Пусть система 15 линейных алгебраических уравнений задана, как и ранее, с помощью табл. 1.1.

Решение этой системы уравнений с помощью вычислительной программы, реализующей алгоритм метода Якоби, приведено в табл. 1.7. В качестве начального приближения принято: $x_j^{(0)} = 0$, $j = \overline{1, m}$.

На рис. 1.1 представлены результаты исследования сходимости решения системы линейных алгебраических уравнений методом Якоби в зависимости от номера итерации k . Для оценки погрешности получаемого решения используется выражение (1.5).

Таблица 1.7

Решение системы уравнений методом Якоби

i	Решение x_i	i	Решение x_i
1	10,0	9	-3,9999998
2	10,0	10	-8,0
3	4,0	11	5,0
4	10,0	12	2,0000002
5	2,9999998	13	8,0
6	6,0	14	-3,0
7	0,0000002	15	-0,9999999
8	7,0		

Выводы

1. Разработана программа решения системы линейных алгебраических уравнений методом Якоби.

2. Уменьшение погрешности решения с ростом числа итераций (см. рис. 1.1) свидетельствует о сходимости последовательности решений системы линейных алгебраических уравнений, получаемых с помощью метода Якоби.

3. С помощью разработанной программы найдено решение заданной системы уравнений (см. табл. 1.7) с погрешностью не более $\delta = 10^{-6}$.

4. Для решения заданной системы линейных алгебраических уравнений методом Якоби на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) требуется $2,0 \cdot 10^{-4}$ с.

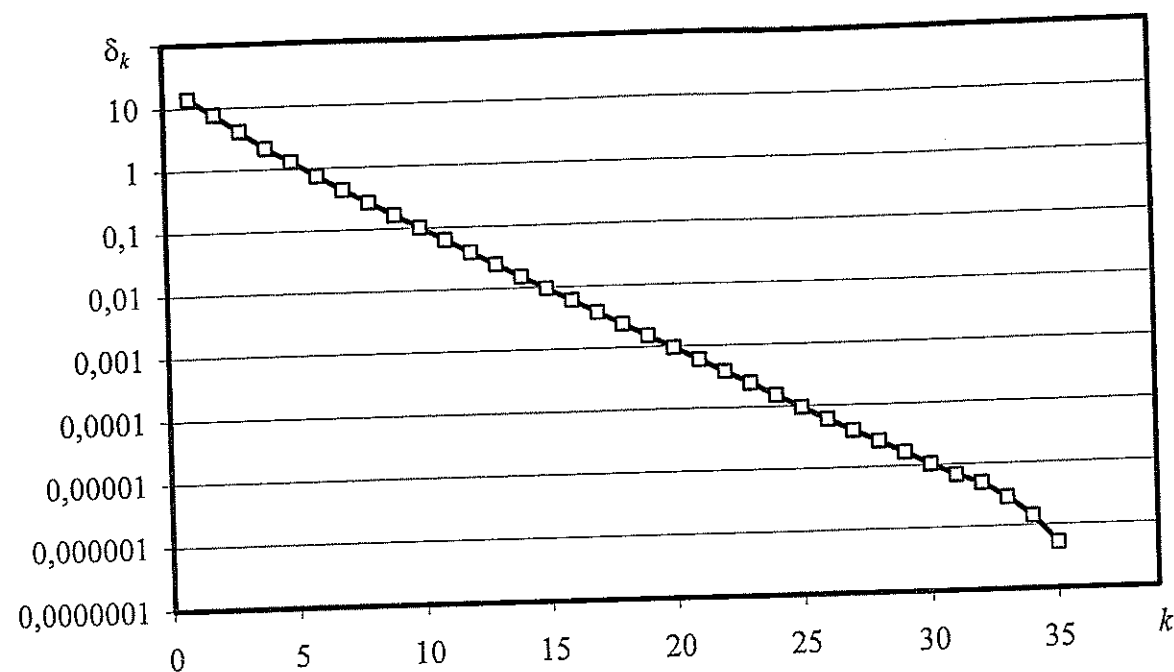


Рис. 1.1. Погрешность решения системы линейных алгебраических уравнений методом Якоби в зависимости от номера итерации k

1.1.4. Метод Зейделя

Задание. Для системы линейных алгебраических уравнений $Ax = f$:

- разработать вычислительную программу, реализующую метод Зейделя;
- с помощью этой программы с погрешностью не более $\delta = 10^{-6}$ найти решение заданной системы уравнений;
- исследовать сходимость последовательности получаемых решений;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений с отличным от нуля определителем $\det(A)$. Преобразуем выражение (1.3) к виду, определяющему алгоритм метода Зейделя,

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^m a_{ij} x_j^{(n)} \right), \quad i = \overline{1, m},$$

где n — номер итерации.

Пусть матрица A представлена в виде суммы $A = A_1 + D + A_2$, причем A_1 — нижняя треугольная матрица с нулями на главной диагонали, D — диагональная матрица, A_2 — верхняя треугольная матрица с нулями на главной диагонали. Тогда условие сходимости метода Зейделя принимает вид: пусть A — симметричная положительно определенная матрица. Тогда метод верхней релаксации

$$(D + \omega A_1) \frac{x^{(n+1)} - x^{(n)}}{\omega} + Ax^{(n)} = f, \quad \omega > 0,$$

сходится при $0 < \omega < 2$. В частности, метод Зейделя ($\omega = 1$) сходится.

Для получения решения используется следующий алгоритм. В качестве нулевого приближения выбираются произвольные значения $x_j^{(0)}$, $j = \overline{1, m}$, искомым величин, которые подставляются в правую часть полученного выражения, что позволяет определить первое приближение решения $x_j^{(1)}$, $j = \overline{1, m}$.

В отличие от метода Якоби, для вычисления очередной неизвестной $x_i^{(n+1)}$ используются найденные на этой же $n + 1$ итерации значения всех предыдущих величин $x_j^{(n+1)}$, $j = \overline{1, i-1}$. Затем полученный результат вновь подставляется в правую часть формулы метода Зейделя и вычисляется второе приближение $x_j^{(2)}$, $j = \overline{1, m}$, и так далее.

Как и в предыдущем случае, вычислительный процесс заканчивается, когда выполняется условие (1.5).

Выполнение расчетов

Пусть система 15 линейных алгебраических уравнений задана, как и ранее, с помощью табл. 1.1. Легко проверить, что условия сходимости последовательности решений, получаемых методом Зейделя, выполняются (табл. 1.1).

Решение этой системы уравнений с помощью вычислительной программы, реализующей алгоритм метода Зейделя, приведено в табл. 1.8. В качестве начального приближения принято $x_j^{(0)} = 0$, $j = \overline{1, m}$.

Таблица 1.8

Решение системы уравнений методом Зейделя

i	Решение x_i	i	Решение x_i
1	10,0	9	-4,0
2	10,0	10	-8,0
3	4,0	11	5,0
4	10,0	12	2,0000002
5	2,9999998	13	8,0
6	6,0	14	-3,0
7	0,0000001	15	-1,0
8	7,0		

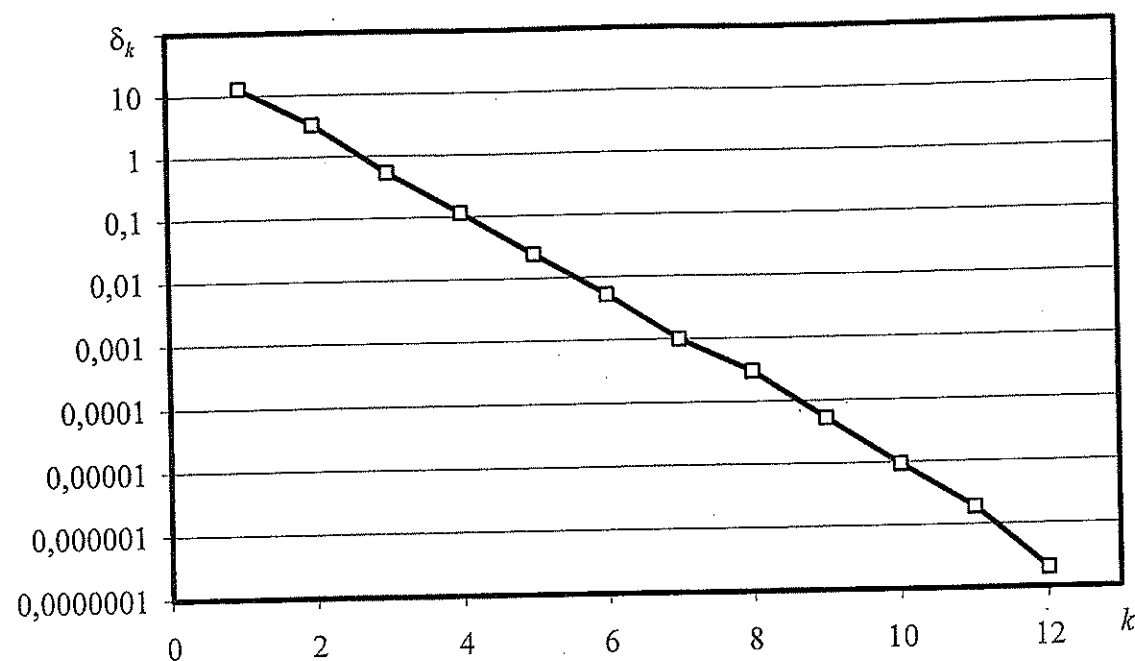


Рис. 1.2. Погрешность решения системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя в зависимости от номера итерации k

На рис. 1.2 представлены результаты исследования сходимости решения системы линейных алгебраических уравнений методом Якоби в зависимости от номера итерации k . Для оценки погрешности получаемого решения используется выражение (1.5).

Выводы

1. Разработана программа решения системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя.
2. Уменьшение погрешности решения с ростом числа итераций (см. рис. 1.2) свидетельствует о сходимости последовательности решений системы линейных алгебраических уравнений, получаемых с помощью метода Зейделя.
3. С помощью разработанной программы найдено решение заданной системы уравнений (см. табл. 1.8) с погрешностью не более 10^{-6} .
4. Для решения заданной системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) требуется $1,2 \cdot 10^{-4}$ с.
5. Проведенное исследование показывает, что для решения заданной системы линейных алгебраических уравнений на указанной вычислительной машине методом Гаусса требуется $1,3 \cdot 10^{-5}$ с, методом квадратного корня – $2,4 \cdot 10^{-5}$ с, методом Якоби – $2,0 \cdot 10^{-4}$ с, методом Зейделя – $1,2 \cdot 10^{-4}$ с. Следовательно, для заданной системы линейных алгебраических уравнений наибольшей производительностью при удовлетворительной точности обладает метод Гаусса.

1.2. Нелинейные уравнения

Пусть известна некоторая нелинейная зависимость вида $y = f(x)$. Требуется определить все те значения аргумента $\tilde{x}_k, k = 1, 2, \dots$, которые обращают функцию в нуль, то есть

$$f(\tilde{x}_k) = 0.$$

Для поиска корней нелинейных уравнений, как правило (за небольшим исключением: квадратные, кубические, некоторые трансцендентные уравнения), используются итерационные методы.

1.2.1. Метод половинного деления (дихотомия)

Задание. Для алгебраического уравнения $(0,75 - x)e^{x/2} = 0,5$:

- выбрать отрезок, на котором имеется хотя бы один корень;
- проверить условия применимости метода половинного деления;
- разработать вычислительную программу, реализующую метод половинного деления;
- вычислить корень уравнения с погрешностью не более 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Метод половинного деления основан на теореме Коши: функция, непрерывная в замкнутом интервале и принимающая на концах этого интервала значения разных знаков, хотя бы один раз обращается в нуль внутри интервала.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Процедура метода заключается в последовательном сокращении длины отрезка для локализации корня уравнения. Первоначально проверяются значения заданной функции $f(x)$ на концах отрезка $x^{(0)} = a, x^{(1)} = b$. В случае, если

$$f(x^{(0)}) \cdot f(x^{(1)}) = 0,$$

один из концов отрезка является искомым корнем уравнения. Пусть на концах отрезка значения функции имеют разные знаки, то есть имеет место соотношение

$$f(x^{(0)}) \cdot f(x^{(1)}) < 0.$$

Вычисляются значение аргумента в середине отрезка, $x^{(2)} = (x^{(0)} + x^{(1)})/2$, и соответствующее ему значение функции $f(x^{(2)})$ в этой точке. Далее сравниваются знаки функции в точке $x^{(2)}$ и, например, в левой точке $x^{(0)}$ отрезка. Если имеет место соотношение $f(x^{(0)}) \cdot f(x^{(2)}) < 0$ (рис. 1.3), то корень следует ис-

каться на отрезке $[x^{(0)}, x^{(2)}]$. В противном случае корень разыскивается на отрезке $[x^{(2)}, x^{(1)}]$. В результате выполненной операции исходный отрезок сократился вдвое.

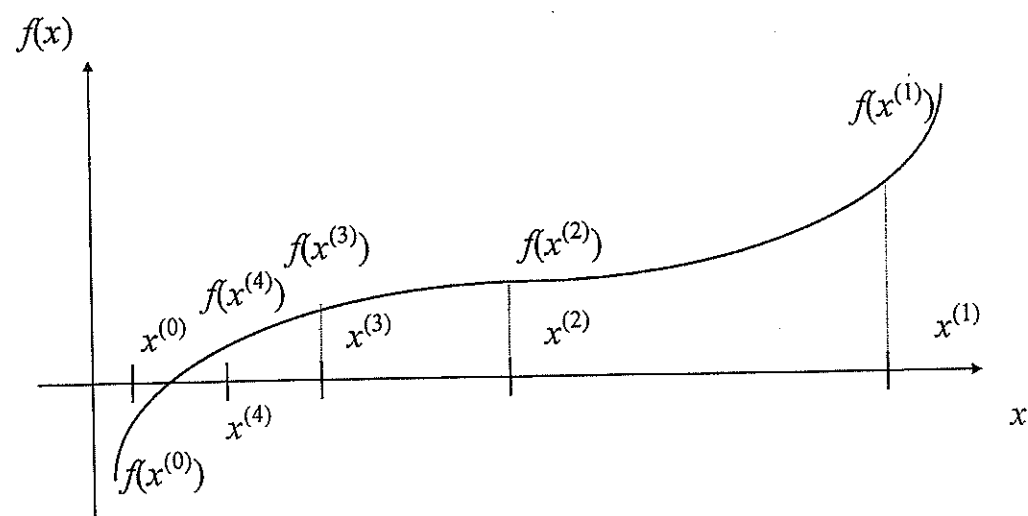


Рис. 1.3. Схема метода половинного деления

Далее, в зависимости от ситуации, отрезок вновь делится пополам:

$$x_3 = \begin{cases} \frac{x^{(2)} + x^{(0)}}{2}, & f(x^{(2)}) \cdot f(x^{(0)}) < 0; \\ \frac{x^{(2)} + x^{(1)}}{2}, & f(x^{(2)}) \cdot f(x^{(0)}) > 0, \end{cases}$$

и так далее. Для прекращения вычислительной процедуры применяются, как правило, критерии

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \delta_x \text{ или } |f[(x^{(k+1)} + x^{(k)})/2]| < \delta_y.$$

Выполнение расчетов

На рис. 1.4 показана непрерывная функция $f(x) = (0,75 - x)e^{x/2} - 0,5$. Из этого рисунка очевидно, что корень уравнения лежит на отрезке $[0, 1]$. На концах этого отрезка функция принимает значения с разными знаками: $f(0) = 0,25$, $f(1) = -0,91218$ соответственно. Следовательно, выполнены условия применимости метода половинного деления.

Заданное уравнение решается с помощью вычислительной программы, реализующей алгоритм метода половинного деления с проверкой обоих условий окончания итерационной процедуры. После выполнения 20 итераций получен отрезок $[0,3249893, 0,3249902]$, длина которого $0,9 \cdot 10^{-6}$ меньше заданной

погрешности $\delta_x = 10^{-6}$. В качестве искомого результата выбирается среднее значение полученного отрезка, $\tilde{x} = 0,32499$. Подстановка \tilde{x} в заданное уравнение позволяет выполнить проверку второго критерия окончания итерационной процедуры: $|f(\tilde{x})| = |f(0,32499)| = 0,20018 \cdot 10^{-6}$, что также меньше заданной погрешности $\delta_y = 10^{-6}$. На рис. 1.5 отражена сходимость последовательности решений заданного уравнения: зависимость погрешности $\delta_x^{(k)} = |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$ решения уравнения от номера k итерации.

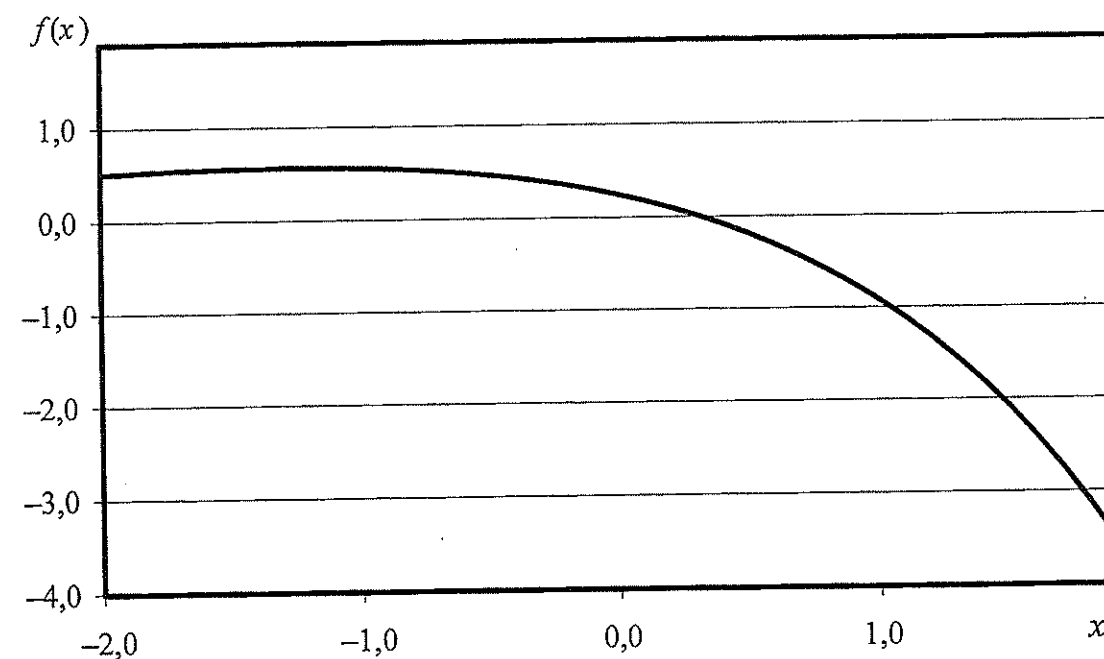


Рис. 1.4. Вид функции $f(x) = (0,75 - x)e^{x/2} - 0,5$

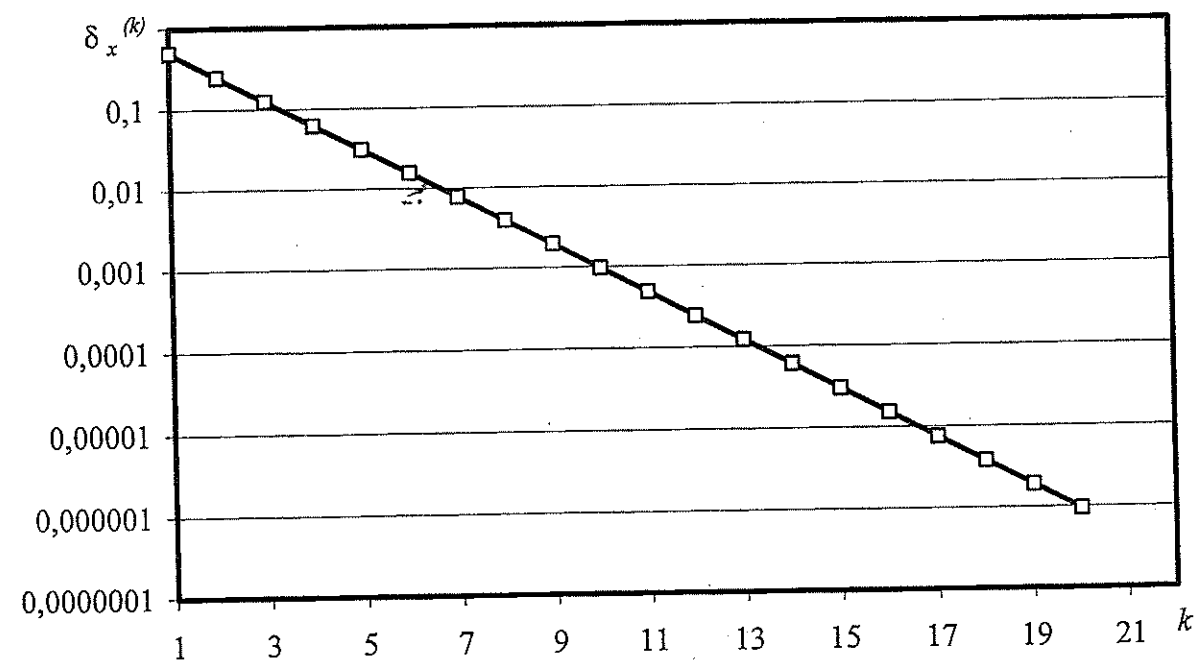


Рис. 1.5. Погрешность решения алгебраического уравнений методом половинного деления в зависимости от номера итерации k

Выводы

1. Разработана программа решения нелинейного алгебраического уравнения методом половинного деления.
2. Уменьшение погрешности решения с ростом числа итераций (см. рис. 1.5) свидетельствует о сходимости последовательности решений заданного нелинейного уравнения, получаемых с помощью метода половинного деления.
3. С помощью разработанной программы найдено решение $\tilde{x} = 0,32499$ заданного нелинейного алгебраического уравнения с погрешностью, не превышающей 10^{-6} .
4. Для решения заданного нелинейного алгебраического уравнения методом половинного деления на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) требуется $1,7 \cdot 10^{-4}$ с.

1.2.2. Метод простых итераций

Задание. Для алгебраического уравнения $(0,75 - x)e^{x/2} = 0,5$:

- выбрать отрезок, на котором имеется хотя бы один корень;
- проверить условия применимости метода простых итераций;
- разработать вычислительную программу, реализующую метод простых итераций;
- вычислить корень уравнения с погрешностью не более 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Для решения нелинейного алгебраического уравнения $f(x) = 0$ методом простых итераций исходное уравнение заменяется эквивалентным ему выражением вида $x = \varphi(x)$.

На основе этого соотношения строится итерационный процесс метода простых итераций

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$$

при некотором заданном начальном значении $x^{(0)}$.

Условия применимости метода простых итераций определены теоремой: если функция $\varphi(x)$ на отрезке $A = \{x \mid |x - a| \leq r\}$ удовлетворяет условию Липшица $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$ с константой $0 < C < 1$, причем $|\varphi(a) - a| \leq (1 - C) \cdot r$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке A единственное решение \tilde{x} , метод простой итерации сходится к \tilde{x} при любом $x^{(0)} \in A$ и имеет место оценка $|x^{(N)} - \tilde{x}| \leq C^k |x^{(0)} - \tilde{x}|$, где k - номер итерации.

Выполнение расчетов

Заданное уравнение $(0,75 - x)e^{x/2} = 0,5$ преобразуется к требуемому виду:

$$x = 0,75 - 0,5e^{-x/2},$$

то есть $\varphi(x) = 0,75 - 0,5e^{-x/2}$. Для проверки условий сходимости последовательности получаемых решений необходимо определить производную этой функции:

$$\varphi'(x) = 0,25e^{-x/2}.$$

Вид этой функции показан на рис. 1.6. В качестве множества A принимается отрезок $[0, 1]$ (см. рис. 1.4). Тогда константу Липшица можно определить в виде $C = \max_{x \in A} |\varphi'(x)|$. В рассматриваемом случае функция на отрезке $[0, 1]$ монотонна (рис. 1.6), поэтому в качестве константы Липшица принимается $C = |\varphi'(0)| = 0,25$. Очевидно, что $C < 1$.

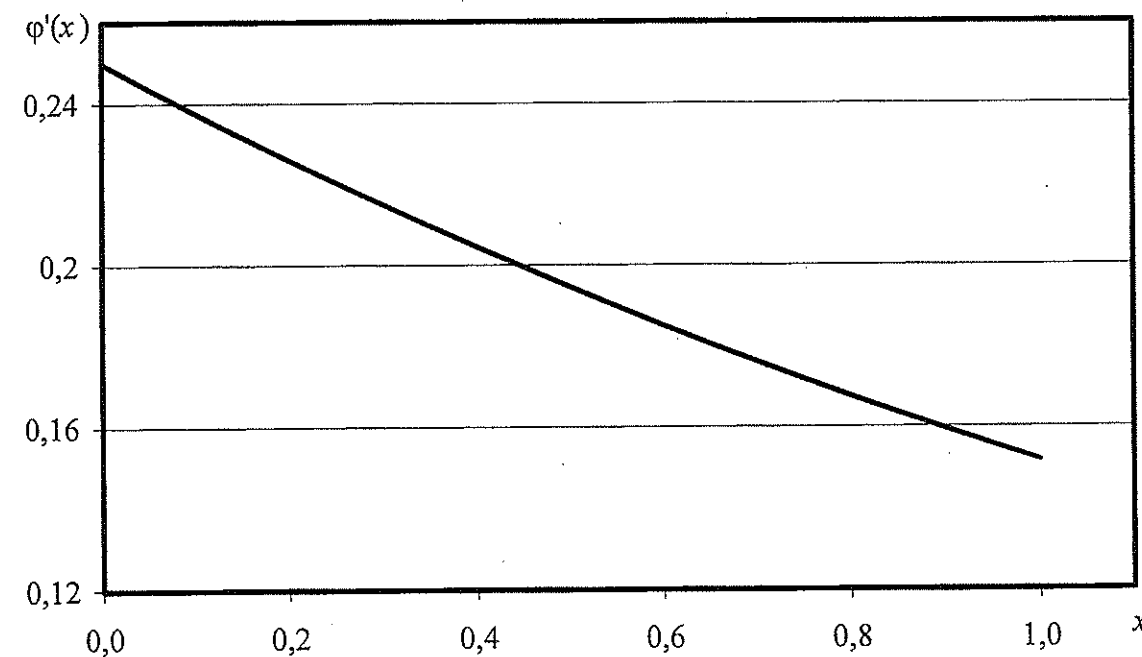


Рис. 1.6. Вид функции $\varphi'(x) = 0,25e^{-x/2}$

Кроме того, $|\varphi(a) - a| = |\varphi(0,5) - 0,5| = 0,13940$, $(1 - C)r = 0,375$, откуда следует, что $|\varphi(a) - a| \leq (1 - C)r$. Таким образом, условия теоремы выполнены, то есть последовательность $x^{(k)}$ метода простых итераций должна сходиться к точному решению заданного уравнения.

С помощью вычислительной программы, реализующей алгоритм метода простых итераций, при начальном приближении $x^{(0)} = 0,5$ получено решение заданного уравнения $\tilde{x} = 0,32499$ с погрешностью не выше $\delta_x = 10^{-6}$. Подстановка этой величины в заданное уравнение дает значение модуля функции $|f(0,32499)| = 0,2 \cdot 10^{-6}$, не превышающее заданную погрешность $\delta_y = 10^{-6}$.

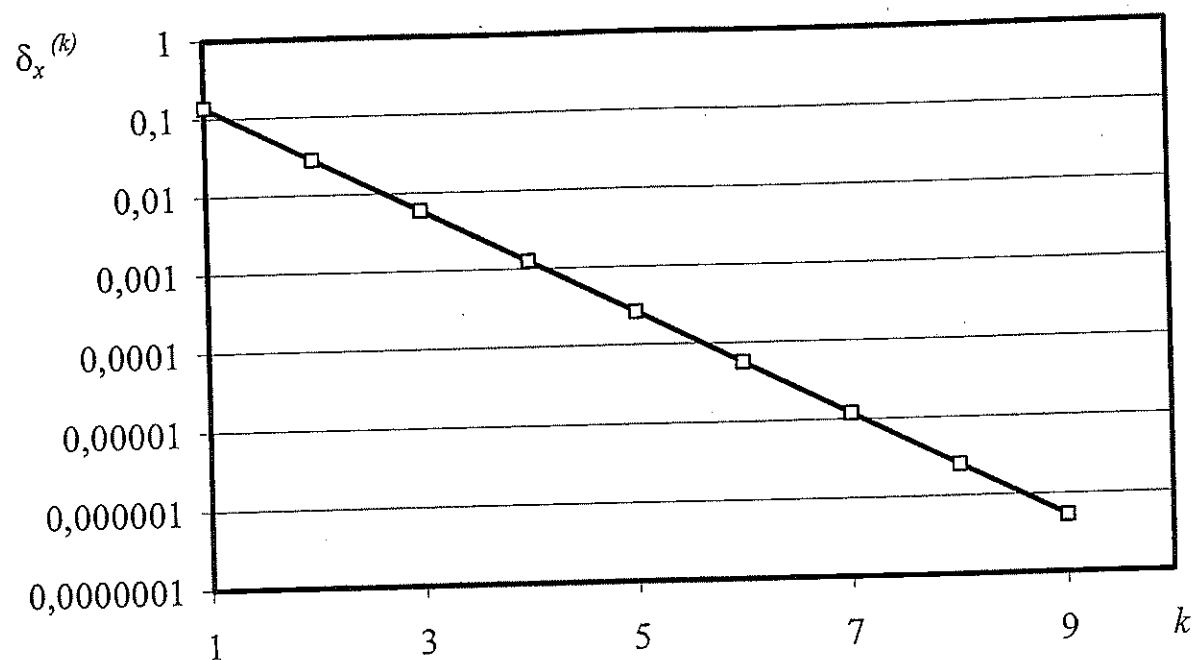


Рис. 1.7. Погрешность решения алгебраических уравнений методом простых итераций в зависимости от номера итерации k

На рис. 1.7 отражена сходимость последовательности решений заданного уравнения: зависимость погрешности $\delta_x^{(k)} = |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$ решения от номера итерации.

Выводы

1. Разработана программа решения нелинейного алгебраического уравнения методом простых итераций.
2. Уменьшение погрешности решения с ростом числа итераций (см. рис. 1.7) свидетельствует о сходимости последовательности решений заданного нелинейного уравнения, получаемых с помощью метода простых итераций.
3. С помощью разработанной программы найдено решение $\tilde{x} = 0,32499$ заданного нелинейного алгебраического уравнения с погрешностью, не превышающей 10^{-6} .
4. Для решения заданного нелинейного алгебраического уравнения методом простых итераций на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) требуется $1,6 \cdot 10^{-4}$ с.

1.2.3. Метод Ньютона

Задание. Для алгебраического уравнения $(0,75 - x)e^{x/2} = 0,5$:

- выбрать отрезок, на котором имеется хотя бы один корень;
- проверить условия применимости метода Ньютона;

- разработать вычислительную программу, реализующую метод Ньютона;
- вычислить корень уравнения с погрешностью не более 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Для поиска корня уравнения $f(x) = 0$ в окрестности решения \tilde{x} выбирается точка x , возле которой функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора:

$$f(\tilde{x}) = f(x) + f'(x)(\tilde{x} - x) + \dots$$

Отсюда следует приближенное равенство

$$f(\tilde{x}) \approx f(x) + f'(x)(\tilde{x} - x),$$

которое с учетом

$$f(\tilde{x}) = 0$$

позволяет получить выражение

$$\tilde{x} \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

приводящее к итерационной формуле метода Ньютона:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Условия применимости метода Ньютона (условия сходимости последовательности решений $x^{(k)}$) определяются теоремой: пусть выполнены следующие предположения:

- 1) \tilde{x} – корень уравнения, то есть $f(\tilde{x}) = 0$;
- 2) первая производная $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in A = \{x \mid |x - \tilde{x}| < r\}$;
- 3) вторая производная $f''(x)$ непрерывна в A ;
- 4) константа $C = \frac{M_2}{2M_1} |x^{(0)} - \tilde{x}| < 1$, где $M_1 = \min_{x \in A} |f'(x)| > 0$, $M_2 = \max_{x \in A} |f''(x)|$.

Тогда, если $x^{(0)} \in A$, то метод Ньютона сходится, причем $|x^{(k)} - \tilde{x}| \leq C^{2^k - 1} |x^{(0)} - \tilde{x}|$, где k – номер итерации.

Выполнение расчетов

Пусть отрезок $A = [0, 1]$ (см. рис. 1.4). Для проверки условий сходимости последовательности решений, получаемых методом Ньютона, определяются первая и вторая производные функции $f(x)$:

$$f'(x) = -(1,25 + x)e^{x/2}/2, \quad f''(x) = -(3,25 + x)e^{x/2}/4.$$

Вид этих функций представлен на рис. 1.8.

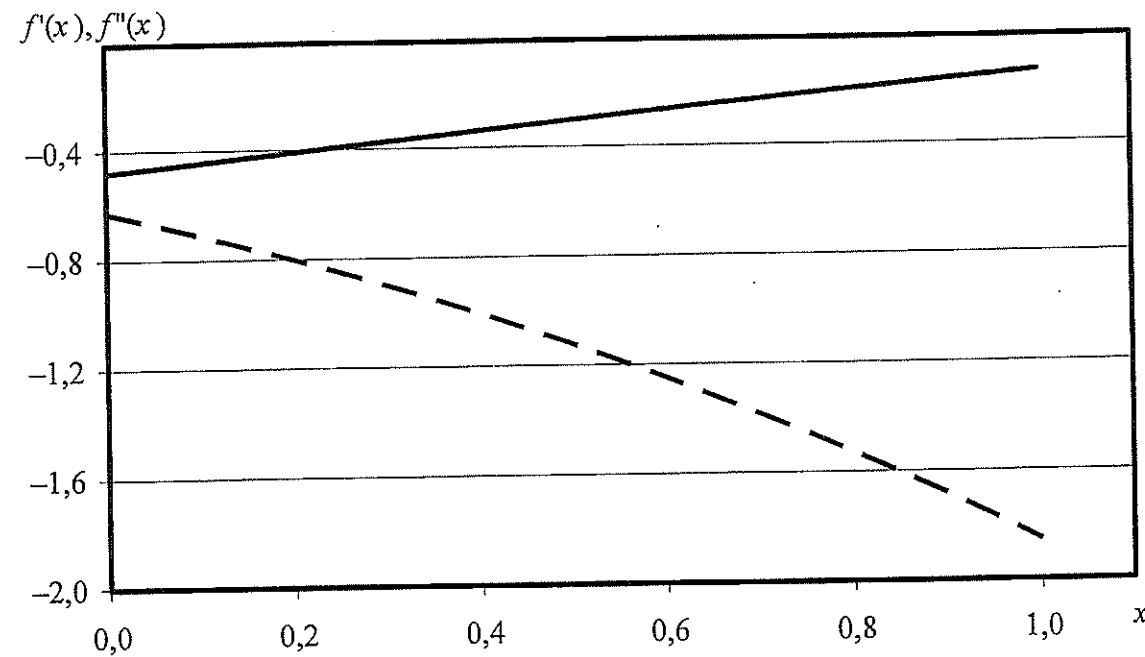


Рис. 1.8. Вид функций $f'(x)$ (---) и $f''(x)$ (—)

Поскольку обе функции непрерывны и монотонны на отрезке $[0, 1]$, то

$$M_1 = \min_{x \in A} |f'(x)| = |f'(0)| = 0,625,$$

$$M_2 = \max_{x \in A} |f''(x)| = |f''(1)| = 0,4801,$$

и, кроме того, $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$. Поскольку разность $|x^{(0)} - \tilde{x}| \leq 0,5$ при $x^{(0)} = 0,5$ и $\tilde{x} \in [0, 1]$, то $C = \frac{M_2}{2M_1} |x^{(0)} - \tilde{x}| \leq 0,192 < 1$. Таким образом, условия

теоремы выполнены, и последовательность $x^{(k)}$ метода Ньютона должна сходиться к точному решению заданного уравнения.

Решение заданного уравнения с помощью вычислительной программы, реализующей алгоритм метода Ньютона, при начальном приближении $x^{(0)} = 0,5$ дает результат $\tilde{x} = 0,32499$. Подстановка этой величины в исходное уравнение дает значение модуля функции $|f(0,32499)| = 0,2 \cdot 10^{-6}$, то есть не превышает заданное значение погрешности $\delta_y = 10^{-6}$.

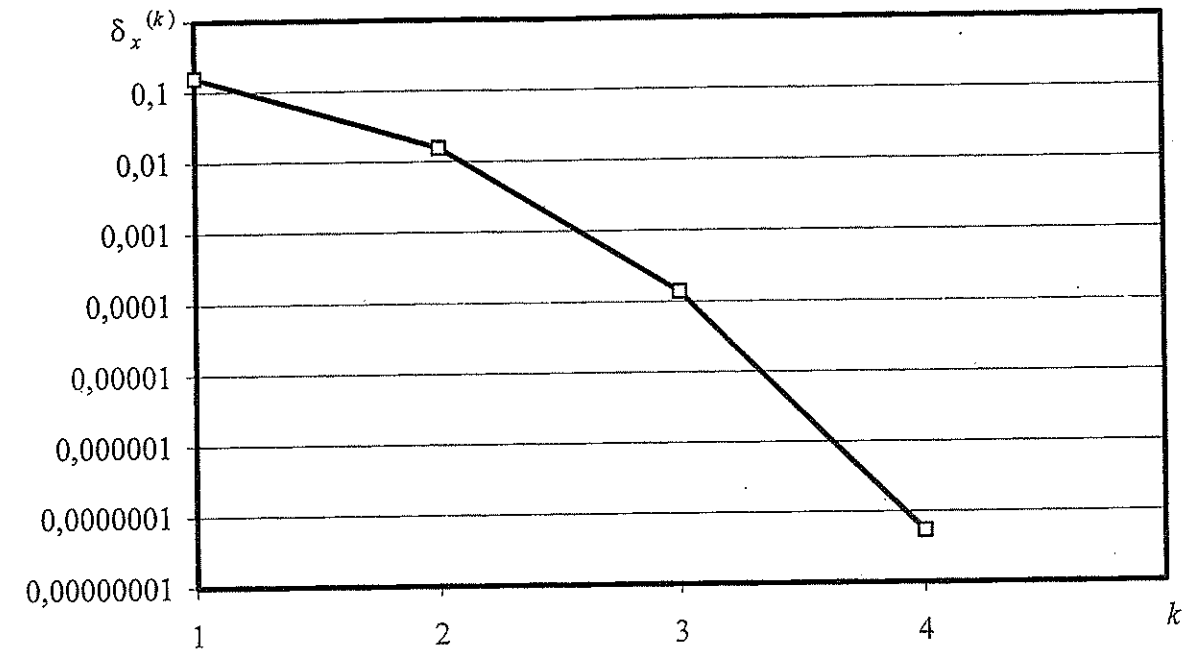


Рис. 1.9. Погрешность решения алгебраического уравнения методом Ньютона в зависимости от номера итерации k

На рис. 1.9 показана сходимость решения заданного уравнения: зависимость $\delta_x^{(k)} = |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$ от номера итерации.

Выводы

1. Разработана программа решения нелинейного алгебраического уравнения методом Ньютона.
2. Уменьшение погрешности решения с ростом числа итераций (см. рис. 1.9) свидетельствует о сходимости последовательности решений заданного нелинейного уравнения, получаемых методом Ньютона.
3. С помощью разработанной программы найдено решение $\tilde{x} = 0,32499$ заданного нелинейного алгебраического уравнения с погрешностью, не превышающей 10^{-6} .
4. Для решения заданного нелинейного алгебраического уравнения методом Ньютона на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) требуется $1,5 \cdot 10^{-4}$ с.
5. Для получения решения заданного нелинейного алгебраического уравнения на вычислительной машине с указанными характеристиками методом половинного деления требуется $1,7 \cdot 10^{-4}$ с, методом простых итераций – $1,6 \cdot 10^{-4}$ с, методом Ньютона – $1,5 \cdot 10^{-4}$ с. Следовательно, наибольшей производительностью при заданной точности обладает метод Ньютона.

1.3. Аппроксимация функций

Под аппроксимацией заданной функции $f(x)$ понимается нахождение функции $\varphi(x)$ из некоторого определенного класса (например, среди алгебраических многочленов заданной степени), в том или ином смысле близкой к $f(x)$ и дающей ее приближенное представление.

Для решения ряда прикладных задач возникает необходимость приближенной замены функции $f(x)$ некоторым набором известных функций, вычисление которых проще организовать. В частности, может рассматриваться задача о наилучшем приближении в нормированном пространстве H , когда заданную функцию $f \in H$ требуется заменить линейной комбинацией известных элементов $\varphi_k \in H, k = \overline{0, n}$, так, чтобы отклонение $\left\| f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\|$ было минимальным.

Частный случай аппроксимации функции – задача интерполирования – состоит в том, чтобы функцию $f(x)$, известную лишь в узлах некоторой сетки заданного отрезка, то есть определенную в виде таблицы, $f(x_i) = f_i, i = \overline{0, n}$, приблизить непрерывной на этом отрезке функцией $\varphi(x)$, которая в точках x_i совпадает с заданными табличными значениями,

$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

Функция $\varphi(x)$ может определяться, например, следующим образом:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x),$$

где $\varphi_k(x)$ – набор линейно независимых функций. Очевидно, что в приведенных примерах задач о наилучшем приближении и интерполировании функция $\varphi(x)$ определяется набором параметров $a_k, k = \overline{0, n}$, от которых зависит линейно. В противном случае говорят о нелинейной аппроксимации.

1.3.1. Интерполяционный многочлен Ньютона

Задание. Аппроксимировать функцию $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ с использованием полинома Ньютона. Исследовать сходимость последовательности полиномов на равномерной и чебышёвской сетках.

Алгоритм решения

Для произвольной функции $f(x)$ определим разделенные разности:

– первая разделенная разность

$$f(x_i, x_j) = [f(x_i) - f(x_j)] / (x_i - x_j),$$

– вторая разделенная разность

$$f(x_i, x_j, x_k) = [f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)] / (x_i - x_k),$$

– третья разделенная разность

$$f(x_i, x_j, x_k, x_l) = [f(x_i, x_j, x_k) - f(x_j, x_k, x_l)] / (x_i - x_l)$$

и так далее. Пусть $P_n(x)$ – искомый интерполяционный многочлен степени n . Запишем для него разделенные разности:

$$P_n(x, x_0) = [P_n(x) - P_n(x_0)] / (x - x_0),$$

$$P_n(x, x_0, x_1) = [P_n(x, x_0) - P_n(x_0, x_1)] / (x - x_1),$$

$$P_n(x, x_0, x_1, x_2) = [P_n(x, x_0, x_1) - P_n(x_0, x_1, x_2)] / (x - x_2), \dots$$

Отсюда получаем выражение для полинома в виде

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0) + P_n(x, x_0)(x - x_0) = \\ &= P_n(x_0) + (x - x_0)[P_n(x_0, x_1) + (x - x_1)P_n(x, x_0, x_1)] = \\ &= P_n(x_0) + (x - x_0)[P_n(x_0, x_1) + (x - x_1)\{P_n(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2)P_n(x, x_0, x_1, x_2)\}] = \dots \end{aligned}$$

Иначе это выражение можно записать в такой форме:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0) + (x - x_0)P_n(x_0, x_1) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)P_n(x_0, x_1, x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)P_n(x, x_0, x_1, x_2) + \dots \end{aligned}$$

Поскольку в точках $x_i, i = \overline{0, n}$ значения полинома $P_n(x_i)$ должны совпадать со значениями заданной функции $f(x_i)$, то должны совпадать и соответствующие разделенные разности: $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n(x_0, x_1) = f(x_0, x_1)$ и так далее. Поэтому искомый полином записывается в форме

$$P_n = f(x_0) + (x - x_0)[f(x_0, x_1) + (x - x_1)\{f(x_0, x_1, x_2) + \dots\}]$$

или

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots$$

Погрешность аппроксимации функции $f(x)$ полиномом $P_n(x)$ на отрезке $[a, b]$ определяется выражением

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|,$$

где $M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$, $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Погрешность аппроксимации можно уменьшить, если использовать в качестве узловых точек корни полинома Чебышёва степени n ,

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i+1}{2(n+1)} \pi, \quad i = \overline{0, n}.$$

В этом случае оценка погрешности полинома Ньютона имеет вид

$$\|f - P_n\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Выполнение расчетов

Пусть на отрезке $[-1, 1]$ построена равномерная сетка, содержащая 5 узлов. Воспользуемся аналитической зависимостью $f(x) = |x|$ для табличного задания функции. Узловые координаты x_i и соответствующие им значения функции $f(x_i)$ приведены в табл. 1.9. Здесь же представлены значения разделенных разностей, определенные с использованием приведенных выше соотношений.

Таблица 1.9

Табличное задание функции $f(x) = |x|$ и значения соответствующих разделенных разностей для равномерной сетки на отрезке $[-1, 1]$

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4})$
-1,0	1,0				
		-1,0			
-0,5	0,5		0,0		
		-1,0		1,3333	
0,0	0,0		2,0		-1,3333
		1,0		-1,3333	
0,5	0,5		0,0		
		1,0			
1,0	1,0				

Использование полученных разделенных разностей позволяет построить на отрезке $[-1, 1]$ полином Ньютона, соответствующий функции $f(x) = |x|$, заданной таблично с помощью равномерной сетки, содержащей 5 узлов:

$$P_4(x) = 1 + (x+1) \left\{ -1 + (x+0,5) \left\{ 0 + (x-0) [1,3333 + (x-0,5) (-1,3333)] \right\} \right\}.$$

Аналогичным образом строятся аппроксимации на сетках, содержащих 3, 9, 17, 33 и 65 узлов¹. Вид соответствующих функций приведен на рис. 1.10.

На рис. 1.11 показана зависимость погрешности аппроксимации полиномами $P_n(x)$ заданной функции $f(x) = |x|$ на равномерных сетках:

$$\delta_n = \|P_n(x) - f(x)\| = \max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x) - f(x)|.$$

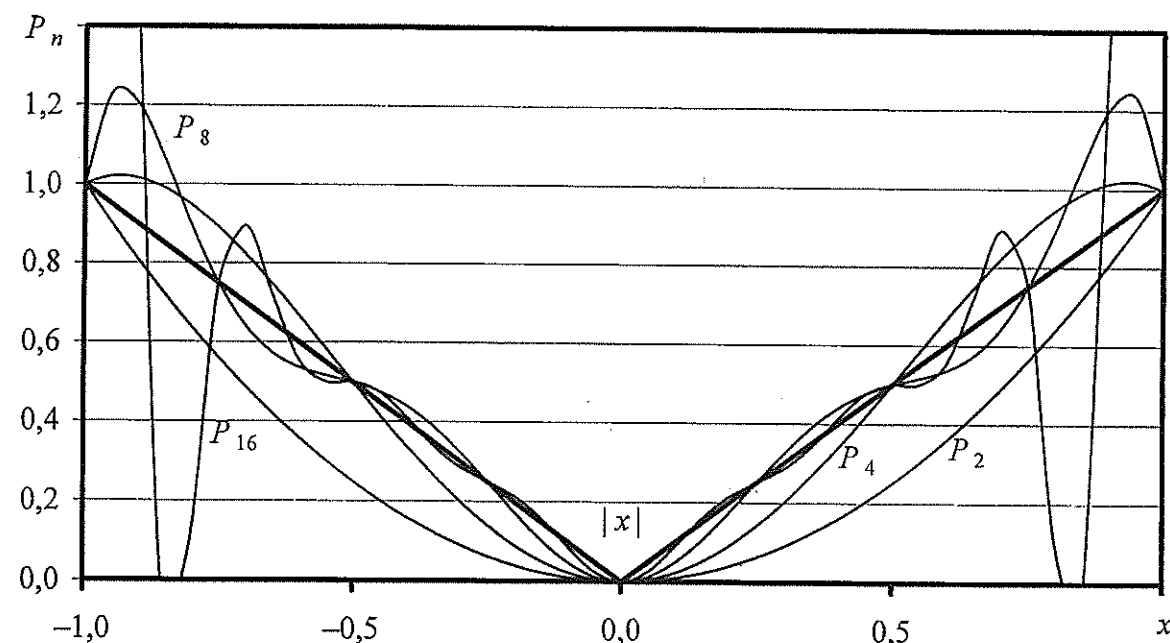
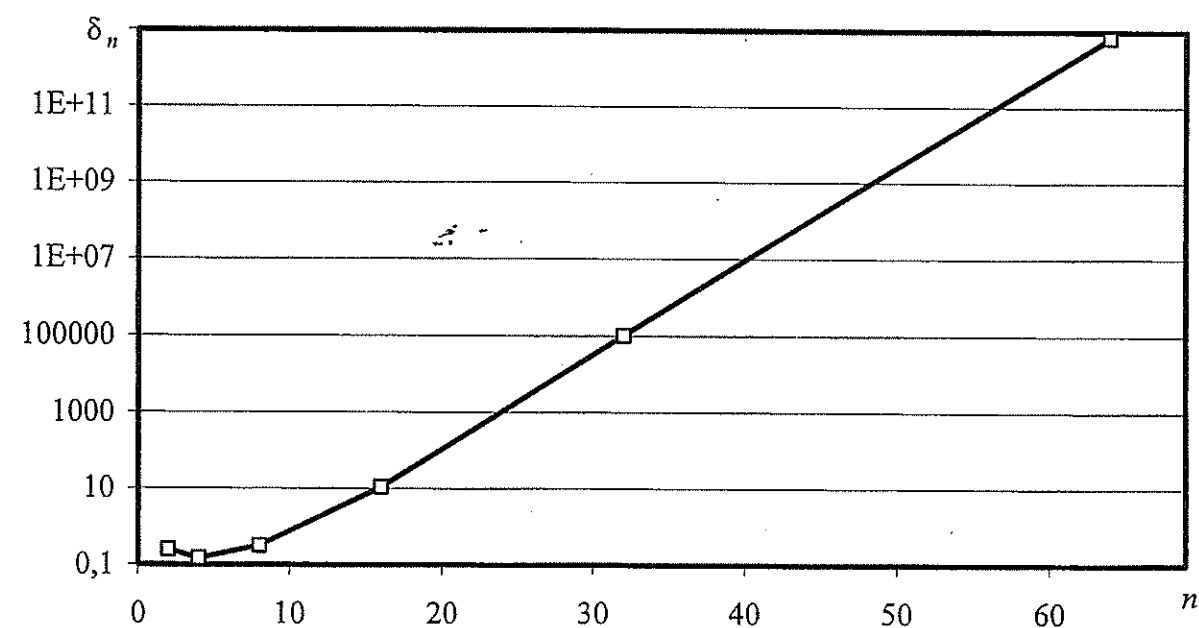


Рис. 1.10. Аппроксимация на отрезке $[-1, 1]$ функции $f(x) = |x|$ полиномами Ньютона $P_n(x)$, построенными с использованием равномерных сеток



¹ Рекомендуется выполнять вычисления с использованием переменных вещественного типа «двойной точности».

Рис. 1.11. Погрешность аппроксимации ψ функции $f(x) = |x|$ полиномами Ньютона $P_n(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ в зависимости от номера n на равномерных сетках

Для повышения точности аппроксимации функции полиномом Ньютона воспользуемся чебышевской сеткой на отрезке $[-1, 1]$:

$$x_i = \cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right], \quad i = \overline{0, n}.$$

В табл. 1.10 представлены значения разделенных разностей, определенные с использованием чебышевской сетки.

Полученные разделенные разности позволяют построить на отрезке $[-1, 1]$ полином Ньютона, соответствующий функции $f(x) = |x|$, заданной таблично с помощью чебышевской сетки, содержащей 5 узлов:

$$P_4(x) = 0,9511 + (x + 0,9511)\{-1 + (x + 0,5878)\{0 + (x - 0)[1,1056 + (x - 0,5878)(-1,1625)]\}}.$$

Таблица 1.10

Табличное задание функции $f(x) = |x|$ и значения соответствующих разделенных разностей для чебышевской сетки на отрезке $[-1, 1]$

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4})$
-0,9511	0,9511				
		-1,0			
-0,5878	0,5878		0,0		
		-1,0		1,1056	
0,0	0,0		1,7013		-1,1625
		1,0		-1,1056	
0,5878	0,5878		0,0		
		1,0			
0,9511	0,9511				

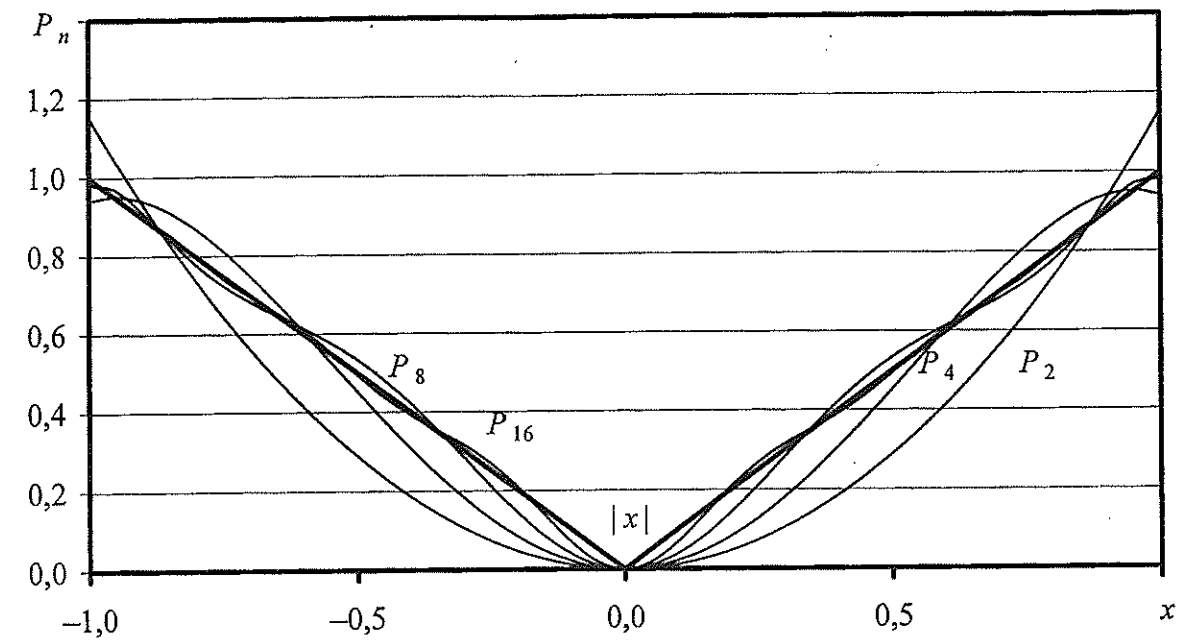


Рис. 1.12. Аппроксимация на отрезке $[-1, 1]$ функции $f(x) = |x|$ полиномами Ньютона (Лагранжа) $P_n(x)$, построенными с использованием чебышевских сеток

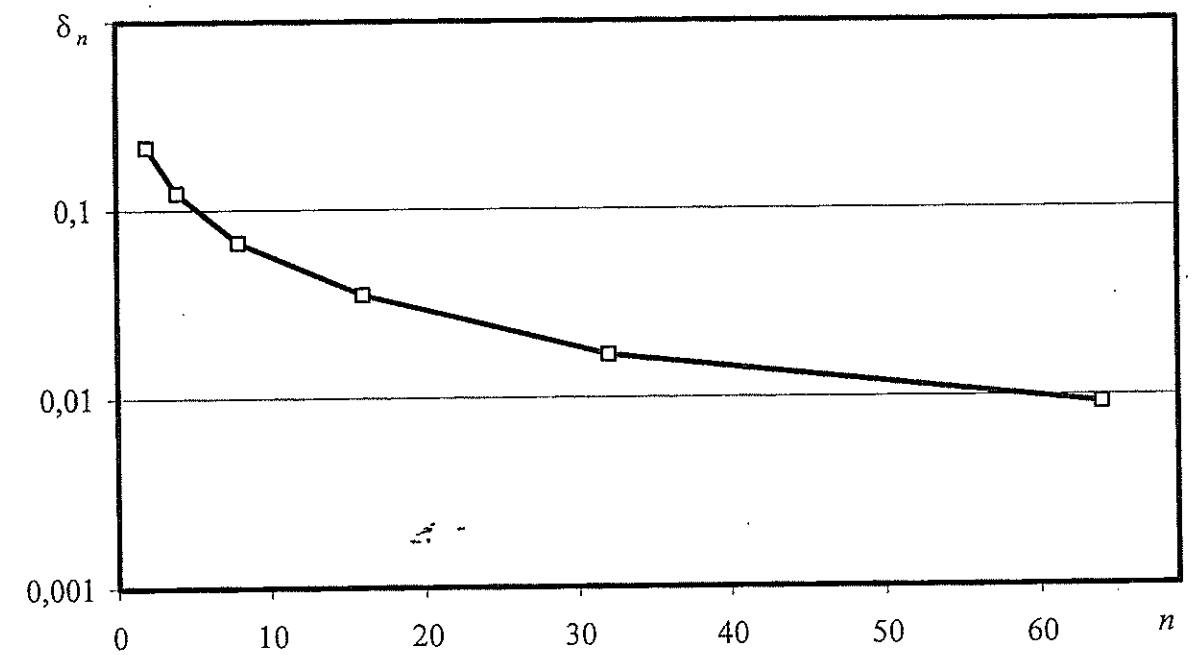


Рис. 1.13. Погрешность аппроксимации δ_n функции $f(x) = |x|$ полиномами Ньютона (Лагранжа) $P_n(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ в зависимости от номера n при использовании чебышевских сеток

Аналогично строятся аппроксимации на сетках, содержащих 3, 9, 17, 33 и 65 узлов¹. Вид соответствующих функций приведен на рис. 1.12.

¹ Рекомендуется выполнять вычисления с использованием «двойной точности».

На рис. 1.13 показана зависимость погрешности аппроксимации полиномами $P_n(x)$ заданной функции $f(x)=|x|$ на последовательности чебышёвских сеток.

Выводы

1. Разработана вычислительная программа для аппроксимации заданной функции полиномом Ньютона на указанном отрезке с использованием равномерных сеток.

2. С помощью этой программы исследована сходимость последовательности полиномов Ньютона, аппроксимирующих заданную функцию на сетках с 3, 5, 9, 17, 33 и 65 узлами. Показано, что для заданной функции последовательность полиномов Ньютона на равномерных сетках расходится.

3. Разработана вычислительная программа для аппроксимации заданной функции полиномом Ньютона на указанном отрезке с использованием чебышёвских сеток.

4. С помощью этой программы исследована сходимость последовательности полиномов Ньютона, аппроксимирующих заданную функцию на сетках с 3, 5, 9, 17, 33 и 65 узлами. Показано, что для данной функции последовательность полиномов Ньютона на чебышёвских сетках сходится.

1.3.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Задание. Аппроксимировать функцию $f(x)=|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ с использованием полинома Лагранжа. Исследовать сходимость последовательности полиномов на равномерной и чебышёвской сетках.

Алгоритм решения

Интерполяционный полином Лагранжа строится в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_k(x) f_k,$$

то есть в каждой точке x значение полинома $P_n(x)$ определяется как линейная комбинация табличных значений. Воспользуемся условием

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^n C_k(x_i) f_k = f_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

Очевидно, что должно выполняться условие

$$C_k(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}, \quad i, k = \overline{0, n},$$

то есть на отрезке интерполяции $[a, b]$ каждая из функций $C_k(x)$ должна иметь n корней. Вполне естественно представить $C_k(x)$ в виде полиномов:

$$C_k(x) = \lambda_k (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n),$$

где λ_k – нормировочный коэффициент, определяемый из условия $C_k(x_k) = 1$, то есть

$$\lambda_k = \frac{1}{(x_k - x_0) \cdot (x_k - x_1) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_k - x_n)}.$$

Теперь можно представить полином Лагранжа в общем виде:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_k - x_n)} \cdot f_k.$$

Как и для полинома Ньютона, погрешность аппроксимации функции $f(x)$ полиномом $P_n(x)$ на отрезке $[a, b]$ определяется выражением

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|,$$

где $M_{n+1} = \max_{x \in (a, b)} |f^{(n+1)}(x)|$, $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$.

Погрешность аппроксимации можно уменьшить, если использовать в качестве узловых точек корни полинома Чебышёва степени n :

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i+1}{2(n+1)} \pi, \quad i = \overline{0, n}.$$

Выполнение расчетов

Пусть на отрезке $[-1, 1]$ построена равномерная сетка, содержащая 5 узлов. Воспользуемся аналитической зависимостью $f(x)=|x|$ для табличного задания значений функции. Узловые координаты и соответствующие им значения приведены в табл. 1.9. Полином Лагранжа, аппроксимирующий функцию $f(x)=|x|$, заданную таблично на отрезке $[-1, 1]$ с помощью равномерной сетки, содержащей 5 узлов, имеет вид

$$P_4(x) = \frac{x(x+0,5)(x-0,5)(x-1)}{1,5} - \frac{x(x+1)(x-0,5)(x-1)}{0,75} - \frac{x(x+1)(x+0,5)(x-1)}{0,75} + \frac{x(x+1)(x+0,5)(x-0,5)}{1,5}$$

Аналогичным образом строятся аппроксимации на сетках, содержащих 3, 9, 17, 33 и 65 узлов. Вид соответствующих функций приведен на рис. 1.10. На рис. 1.11 показана зависимость погрешности аппроксимации полиномами $P_n(x)$ заданной функции $f(x) = |x|$ на равномерных сетках,

$$\delta_n = \|P_n(x) - f(x)\| = \max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x) - f(x)|.$$

Для повышения точности аппроксимации функции полиномом Ньютона воспользуемся чебышёвской сеткой на отрезке $[-1, 1]$:

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Полином Лагранжа, аппроксимирующий таблично заданную функцию на том же отрезке с помощью чебышёвской сетки, содержащей 5 узлов, имеет вид

$$P_4(x) = \frac{x(x+0,5878)(x-0,5878)(x-0,9511)}{1,0635} - \frac{x(x+0,9511)(x-0,5878)(x-0,9511)}{0,6573} - \frac{x(x+0,9511)(x+0,5878)(x-0,9511)}{0,6573} + \frac{x(x+0,9511)(x+0,5878)(x-0,5878)}{1,0635}.$$

Аналогично строятся полиномы Лагранжа на чебышёвских сетках, содержащих 3, 9, 17, 33 и 65 узлов. Вид соответствующих полиномов приведен на рис. 1.12. На рис. 1.13 показана зависимость погрешности аппроксимации $\delta_n = \|P_n(x) - f(x)\| = \max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x) - f(x)|$ полиномами $P_n(x)$ заданной функции $f(x) = |x|$ на последовательности чебышёвских сеток.

Выводы

1. Разработана программа для аппроксимации заданной функции полиномом Лагранжа на указанном отрезке с использованием равномерных сеток.
2. С помощью разработанной программы исследована последовательность полиномов Лагранжа, аппроксимирующая заданную функцию на сетках с 3, 5, 9, 17, 33 и 65 узлами. Показано, что для заданной функции последовательность полиномов Лагранжа на равномерных сетках расходится.
3. Разработана программа для аппроксимации заданной функции полиномом Лагранжа на указанном отрезке с использованием чебышёвских сеток.
4. С помощью этой программы исследована последовательность полиномов Лагранжа, аппроксимирующая заданную функцию на сетках с 3, 5, 9, 17, 33 и 65 узлами. Показано, что для заданной функции последовательность полиномов Лагранжа на чебышёвских сетках сходится.

1.3.3. Метод наименьших квадратов

Задание. Аппроксимировать функцию $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ методом наименьших квадратов с использованием полиномов. Исследовать сходимость последовательности полиномов.

Алгоритм решения

В методе наименьших квадратов близость аппроксимирующего многочлена $P_m(x) = \sum_{p=0}^m a_p x^p$ к функции $f(x)$ оценивается в среднем на отрезке, на котором строится приближение.

Пусть известен набор значений функции $f_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$ ($n > m$), для ряда значений ее аргумента. В линейном пространстве R^{n+1} скалярное произведение и норма определяются следующим образом:

$$(u, v) = \sum_{k=0}^n u_k v_k, \quad u, v \in R^{n+1},$$

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k^2}.$$

Пусть отыскиваемое приближение $P_m(x)$ зависит от известного числа $m+1$ параметров a_0, a_1, \dots, a_m . Отклонение функции $f(x)$ от ее приближения $P_m(x)$ определяется соотношением

$$\|f - P_m\|^2 = \|f\|^2 - 2(f, P_m) + \|P_m\|^2 = \sum_{k=0}^n f_k^2 - 2 \sum_{k=0}^n f_k P_m(x_k) + \sum_{k=0}^n P_m^2(x_k).$$

Для определения наименьшего отклонения $\|f - P_m\|$ используются необходимые условия минимума функции нескольких переменных:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a_0} \|f - P_m\|^2 = -2 \sum_{k=0}^n f_k \frac{\partial P_m(x_k)}{\partial a_0} + 2 \sum_{k=0}^n P_m(x_k) \frac{\partial P_m(x_k)}{\partial a_0} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \|f - P_m\|^2 = -2 \sum_{k=0}^n f_k \frac{\partial P_m(x_k)}{\partial a_1} + 2 \sum_{k=0}^n P_m(x_k) \frac{\partial P_m(x_k)}{\partial a_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial a_m} \|f - P_m\|^2 = -2 \sum_{k=0}^n f_k \frac{\partial P_m(x_k)}{\partial a_m} + 2 \sum_{k=0}^n P_m(x_k) \frac{\partial P_m(x_k)}{\partial a_m} = 0. \end{cases}$$

С учетом того, что $P_m(x) = \sum_{p=0}^m a_p x^p$, условие минимальности $\|f - P_m\|$ записывается в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_p , $p = \overline{0, m}$:

писывается в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_p , $p = \overline{0, m}$:

$$\begin{cases} a_0 \sum_{k=0}^n 1 + a_1 \sum_{k=0}^n x_k + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^2 + \dots + a_m \sum_{k=0}^n x_k^m = \sum_{k=0}^n f_k, \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^2 + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^3 + \dots + a_m \sum_{k=0}^n x_k^{m+1} = \sum_{k=0}^n f_k x_k, \\ \dots \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k^m + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^{m+1} + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^{m+2} + \dots + a_m \sum_{k=0}^n x_k^{2m} = \sum_{k=0}^n f_k x_k^m. \end{cases}$$

Выполнение расчетов

Вспользуемся аналитической зависимостью $f(x) = |x|$ для табличного задания функции, например, в 101 узле равномерной сетки на отрезке $[-1, 1]$.

Таблица 1.11

Коэффициенты матрицы b_{ij} и правая часть f_i системы линейных алгебраических уравнений метода наименьших квадратов ($m = 4$)

	$j = 1$	2	3	4	5	f_i
$i = 1$	101,0	0,0	34,34	0,0	21,01333	51,0
2	0,0	34,34	0,0	21,01333	0,0	0,0
3	34,34	0,0	21,01333	0,0	15,30571	26,01
4	0,0	21,01333	0,0	15,30571	0,0	0,0
5	21,01333	0,0	15,30571	0,0	12,13777	17,68333

Рассмотрим построение полинома $P_4(x)$, то есть $m = 4$. В табл. 1.11 приведена матрица коэффициентов и правая часть системы уравнений метода наименьших квадратов.

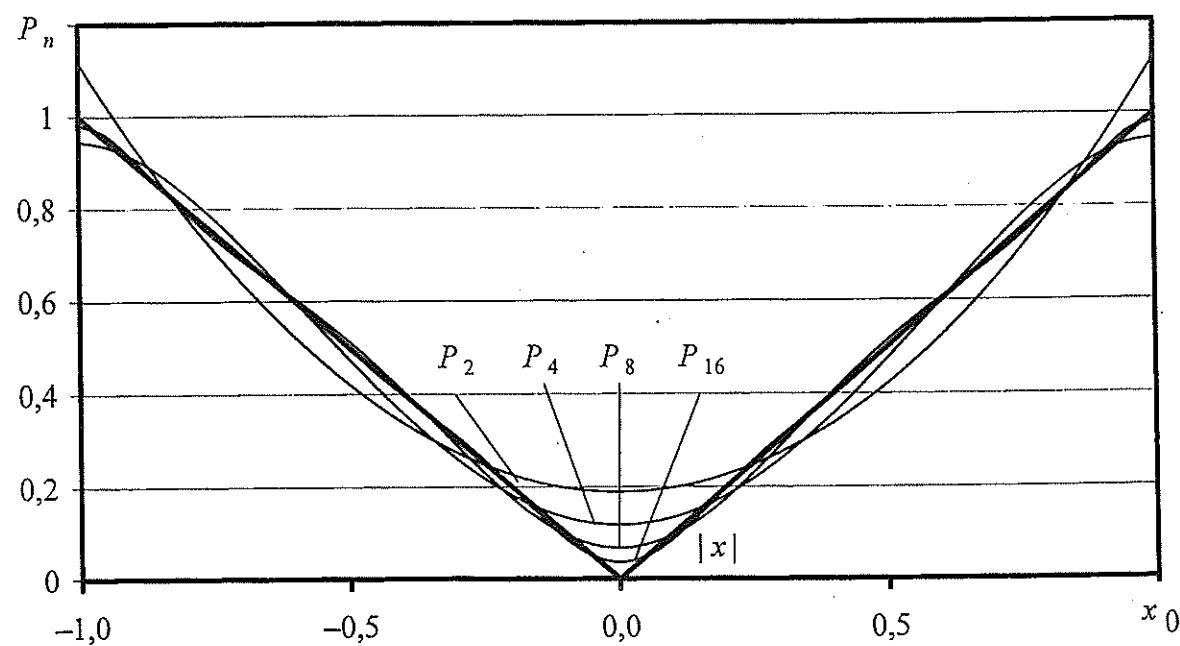


Рис. 1.14. Аппроксимация на отрезке $[-1, 1]$ функции $f(x) = |x|$

полиномами $P_n(x)$, построенными с использованием метода наименьших квадратов

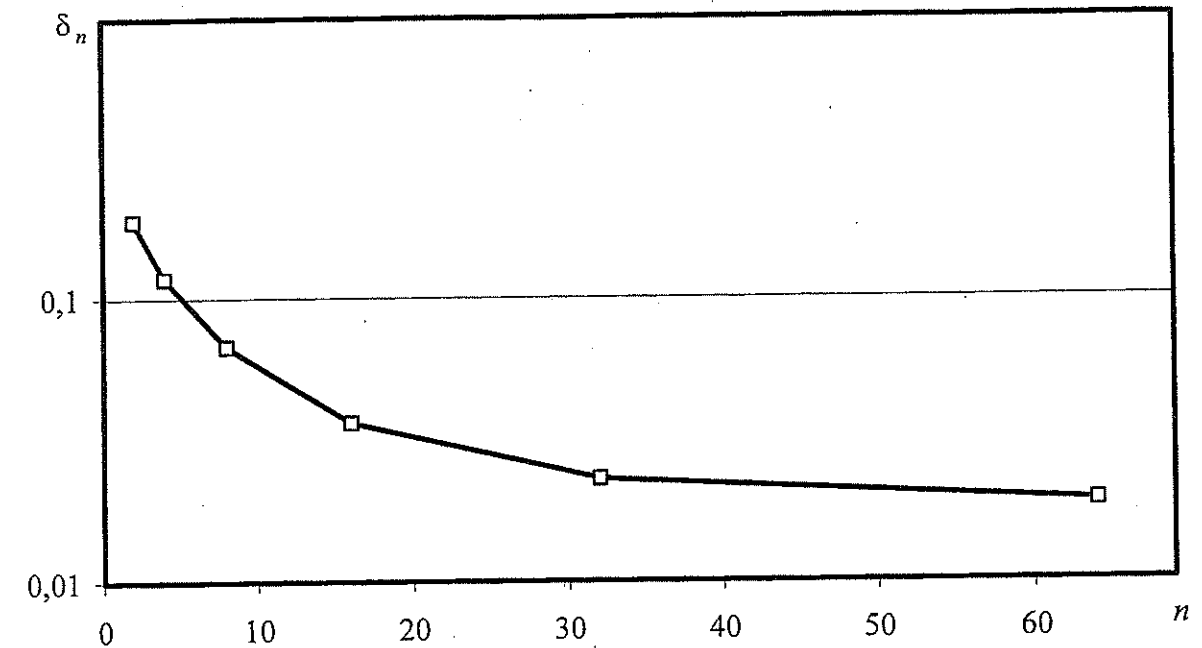


Рис. 1.15. Погрешность аппроксимации δ_n функции $f(x) = |x|$ полиномами $P_n(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ при использовании метода наименьших квадратов

Решение этой системы уравнений методом Гаусса позволило построить полином, аппроксимирующий на отрезке $[-1, 1]$ функцию $f(x) = |x|$, заданную таблично с помощью равномерной сетки, содержащей 101 узел:

$$P_4(x) = 0,1182 + 1,6257x^2 - 0,7977x^4.$$

Аналогичным образом строятся полиномы $P_2(x)$, $P_8(x)$, $P_{16}(x)$, $P_{32}(x)$ и $P_{64}(x)$. Вид этих функций приведен на рис. 1.14. На рис. 1.15 показана зависимость погрешности аппроксимации полиномами $P_n(x)$ функции $f(x) = |x|$:

$$\delta_n = \|P_n(x) - f(x)\| = \max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x) - f(x)|.$$

Выводы

1. Разработана программа для аппроксимации заданной функции полиномами на указанном отрезке с использованием метода наименьших квадратов.
2. С помощью этой программы исследована последовательность полиномов $P_2(x)$, $P_4(x)$, $P_8(x)$, $P_{16}(x)$, $P_{32}(x)$ и $P_{64}(x)$, аппроксимирующих заданную функцию. Для заданной функции последовательность полиномов сходится.

1.3.4. Метод наилучшего приближения

Задание. Для функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ построить наилучшее приближение в гильбертовом пространстве с использованием полиномов. Исследовать сходимость последовательности полиномов.

Алгоритм решения

Рассмотрим линейное нормированное пространство H , в котором задана конечная система линейно-независимых элементов $\varphi_k \in H$, $k = \overline{0, n}$. Требуется заменить элемент $f \in H$ линейной комбинацией

$$\varphi = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n = \sum_{k=0}^n a_k\varphi_k.$$

Пусть в H норма порождена скалярным произведением

$$(f, g)_H = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad \|f\|_H = (f, f)_H^{1/2} = \left[\int_a^b f^2(x)dx \right]^{1/2}.$$

Рассмотрим отклонение приближения φ от элемента f ,

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_H^2 &= \left(f - \sum_{k=0}^n a_k\varphi_k, f - \sum_{p=0}^n a_p\varphi_p \right)_H = \\ &= (f, f)_H - \left(f, \sum_{p=0}^n a_p\varphi_p \right)_H - \left(\sum_{k=0}^n a_k\varphi_k, f \right)_H + \left(\sum_{k=0}^n a_k\varphi_k, \sum_{p=0}^n a_p\varphi_p \right)_H = \\ &= \|f\|_H^2 - 2 \sum_{k=0}^n a_k (f, \varphi_k)_H + \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^n a_k a_p (\varphi_k, \varphi_p)_H. \end{aligned}$$

Пусть B – матрица с компонентами $b_{kp} = (\varphi_k, \varphi_p)_H$, $k, p = \overline{0, n}$; $a \in R^{n+1}$ – вектор коэффициентов $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}^T$; $\hat{f} \in R^{n+1}$ – вектор $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}^T$; $f_k = (f, \varphi_k)_H$, $k = \overline{0, n}$. Скалярное произведение векторов u и v в R^{n+1} определяется обычным образом:

$$(u, v) = \sum_{k=0}^n u_k v_k, \quad u, v \in R^{n+1}.$$

Теперь отклонение приближения φ от элемента f можно представить следующим образом:

$$\|f - \varphi\|_H^2 = (Ba, a) - 2(\hat{f}, a) + \|f\|_H^2.$$

Поиск элемента $\tilde{\varphi} \in H$ наилучшего приближения сводится к поиску минимума функционала

$$F(a) = (Ba, a) - 2(\hat{f}, a),$$

поскольку слагаемое $\|f\|_H^2$ от параметров a_k , $k = \overline{0, n}$ не зависит.

Если B – симметричная положительно определенная матрица, \hat{f} – заданный вектор, то функционал $F(a)$ имеет единственную точку минимума \tilde{a} тогда и только тогда, когда вектор \tilde{a} удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений

$$B\tilde{a} = \hat{f}.$$

В компонентной записи система линейных алгебраических уравнений выглядит следующим образом:

$$\sum_{k=0}^n \tilde{a}_k (\varphi_k, \varphi_p)_H = (f, \varphi_p)_H, \quad p = \overline{0, n}.$$

Алгоритм определения элемента наилучшего приближения:

- вычисление коэффициентов $b_{kp} = (\varphi_k, \varphi_p)_H = \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_p(x)dx$, $k, p = \overline{0, n}$;
- вычисление правых частей $f_p = (f, \varphi_p)_H = \int_a^b f(x)\varphi_p(x)dx$, $p = \overline{0, n}$;
- решение системы уравнений $B\tilde{a} = \hat{f}$;
- построение $\tilde{\varphi} = \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \varphi_k$.

Выполнение расчетов

Выполнение расчетов рассматривается на примере построения полинома $P_4(x)$. В качестве системы линейно-независимых функций выбираются полиномы $\varphi_k(x) = x^k$, $k = \overline{0, n}$. В соответствии с приведенными соотношениями вычисляются коэффициенты b_{ij} и f_i системы линейных алгебраических уравнений:

$$b_{kp} = (\varphi_k, \varphi_p)_H = \int_{-1}^1 x^k x^p dx = \frac{x^{k+p+1}}{k+p+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{k+p+1} [1 - (-1)^{k+p+1}],$$

$$f_k = (f, \varphi_k)_H = \int_{-1}^1 |x| x^k dx = - \int_{-1}^0 x^{k+1} dx + \int_0^1 x^{k+1} dx = - \frac{x^{k+2}}{k+2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^{k+2}}{k+2} \Big|_0^1 = \frac{1}{k+2} [1 + (-1)^{k+2}].$$

Значения подсчитанных коэффициентов приведены в табл. 1.12.

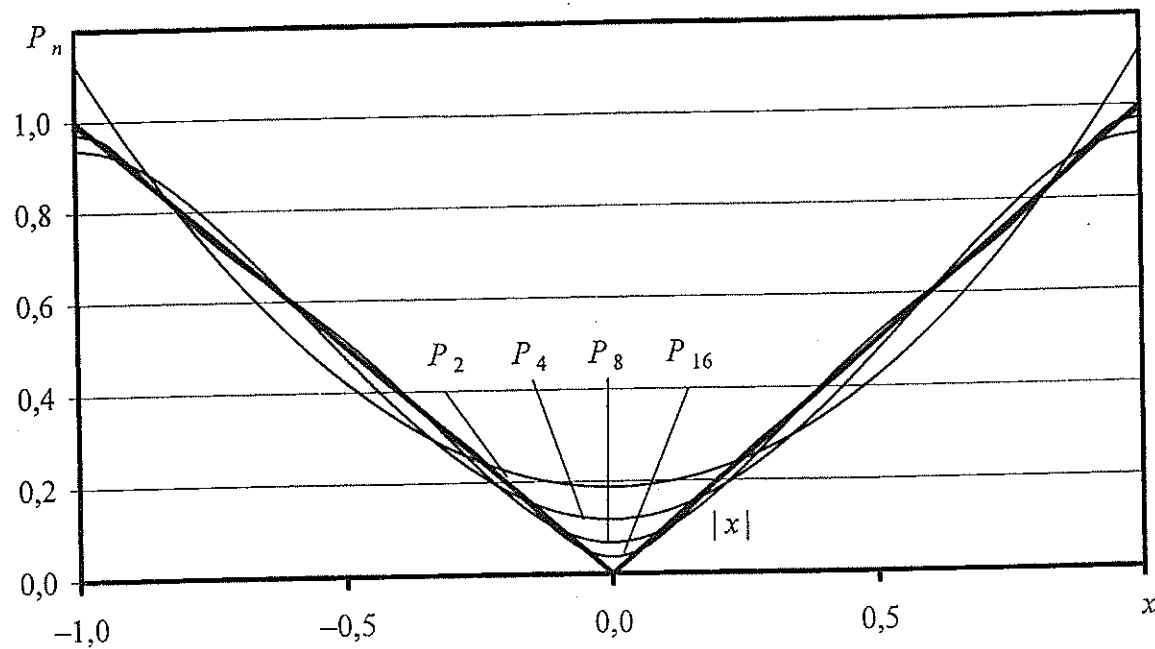


Рис. 1.16. Полиномы наилучшего приближения функции $f(x)=|x|$ полиномами $P_n(x)$ на отрезке $[-1, 1]$

Решение этой системы уравнений методом Гаусса позволило построить полином $P_4(x)$ (рис. 1.16), аппроксимирующий на отрезке $[-1, 1]$ функцию $f(x)=|x|$:

$$P_4(x) = 0,1172 + 1,6406x^2 - 0,8203x^4.$$

Таблица 1.12

Коэффициенты матрицы b_{ij} и правая часть f_i системы линейных алгебраических уравнений $Ba = f$ при построении наилучшего приближения

	$j=1$	2	3	4	5	f_i
$i=1$	2,0	0,0	0,6667	0,0	0,4	1,0
2	0,0	0,6667	0,0	0,4	0,0	0,0
3	0,6667	0,0	0,4	0,0	0,2857	0,5
4	0,0	0,4	0,0	0,2857	0,0	0,0
5	0,4	0,0	0,2857	0,0	0,2222	0,3333

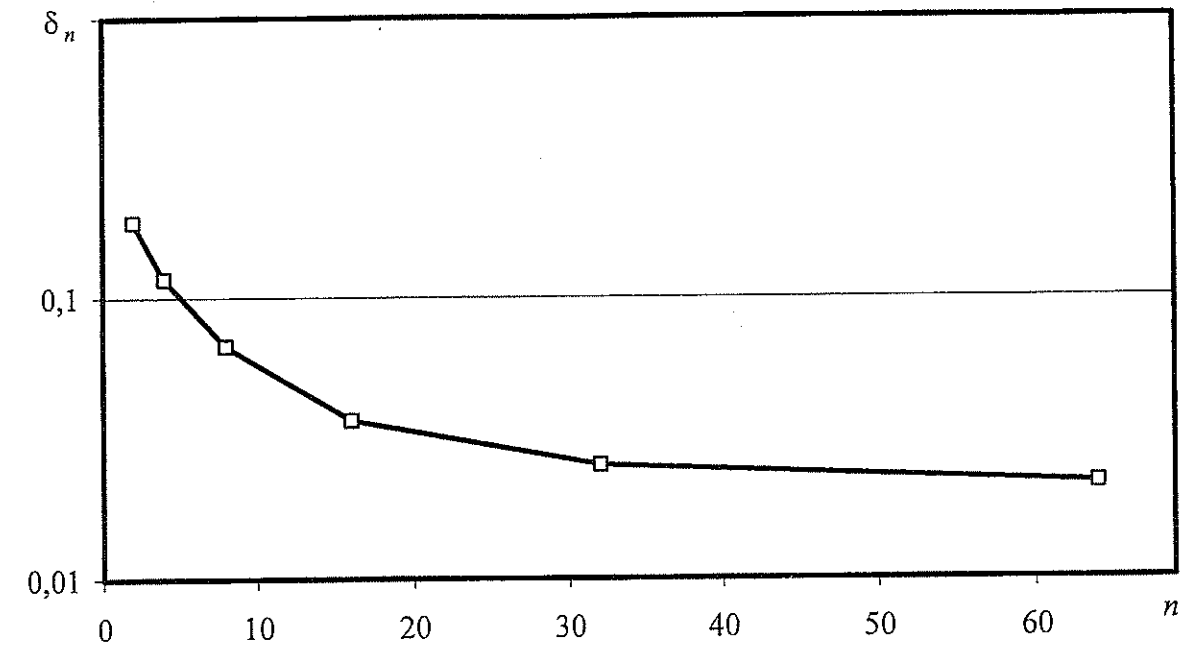


Рис. 1.17. Погрешность δ_n аппроксимации функции $f(x)=|x|$ полиномами $P_n(x)$ наилучшего приближения на отрезке $[-1, 1]$

Аналогичным образом строятся полиномы $P_2(x)$, $P_8(x)$, $P_{16}(x)$ и так далее. Вид этих функций приведен на рис. 1.16. На рис. 1.17 показана зависимость погрешности аппроксимации функции $f(x)=|x|$ полиномами $P_n(x)$,

$$\delta_n = \|P_n(x) - f(x)\| = \max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x) - f(x)|.$$

Выводы

1. Разработана программа для наилучшего приближения в гильбертовом пространстве заданной функции $f(x)=|x|$ полиномами $P_n(x)$ на отрезке $[-1, 1]$.
2. С помощью этой программы исследована последовательность полиномов $P_2(x)$, $P_4(x)$, $P_8(x)$, $P_{16}(x)$, $P_{32}(x)$ и $P_{64}(x)$ наилучшего приближения заданной функции. Показано, что для заданной функции последовательность построенных полиномов сходится.

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2.1. Численное дифференцирование

Пусть на отрезке $[a, b]$ введена разностная сетка

$$\Omega_n = \{x_0 = a; x_i = a + i \cdot h; i = \overline{0, n}; h = (b - a)/n\}.$$

В произвольной точке x_i этой сетки приближенное значение первой производной функции $f(x)$ можно представить в виде

$$f'(x_i) \approx f'_i = \alpha f(x_{i-1}) + \beta f(x_i) + \gamma f(x_{i+1}),$$

где α, β, γ – произвольные постоянные величины. Погрешность такого представления производной оценивается разностью

$$\delta = f'(x_i) - f'_i = f'(x_i) - [\alpha f(x_{i-1}) + \beta f(x_i) + \gamma f(x_{i+1})].$$

Вспользуемся разложениями функции $f(x)$ в ряды Тейлора вблизи x_i ,

$$f(x_{i\pm 1}) = f(x_i) \pm f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} \pm \frac{f'''(x_i)h^3}{6} + O(h^4).$$

После подстановки рядов Тейлора погрешность оценивается выражением

$$\delta = f'(x_i) - f'_i = f'(x_i) - \alpha \left[f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} + \frac{f'''(x_i)h^3}{6} + O(h^4) \right] - \beta [f(x_i)] - \gamma \left[f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} - \frac{f'''(x_i)h^3}{6} + O(h^4) \right],$$

и после приведения подобных слагаемых погрешность

$$\delta = -f(x_i)(\alpha + \beta + \gamma) + f'(x_i)(1 - \alpha h + \gamma h) - f''(x_i) \frac{h^2}{2}(\alpha + \gamma) + f'''(x_i) \frac{h^3}{6}(-\alpha + \gamma) - O(h^4)(\alpha + \gamma).$$

Для получения наименьшей погрешности (наивысшего порядка относительно шага h), очевидно, требуется выполнение соотношений

$$\alpha + \beta + \gamma = 0; \quad 1 - \alpha h + \gamma h = 0; \quad \alpha + \gamma = 0.$$

Отсюда следует, что $\alpha = 1/2h, \beta = 0, \gamma = -1/2h$, то есть

$$f'(x_i) \approx f'_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}. \quad (2.1)$$

После подстановки найденных значений α, β и γ погрешность

$$\delta = f'''(x_i) \frac{h^3}{6}(-\alpha + \gamma) - O(h^4)(\alpha + \gamma) = -f'''(x_i) \frac{h^2}{6} = O(h^2),$$

то есть погрешность аппроксимации производной разностным аналогом (2.1) не превышает $O(h^2)$.

2.1.1. Разностный аналог первой производной

Задание. Вычислить приближенно значение первой производной функции $f(x) = x/\sin x$ в точке $x = \pi/2$ с помощью разностных аналогов:

а) $[f(x_{i+1}) - f(x_i)]/h;$

б) $[f(x_i) - f(x_{i-1})]/h;$

в) $[f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})]/2h.$

Исследовать сходимость численно определяемых значений к точному значению и определить зависимость погрешности численного дифференцирования от шага h .

Алгоритм решения

Пусть на отрезке $[a, b]$ используется разностная сетка Ω_n с шагом $h = (b - a)/n$. В произвольной точке этой сетки приближенное значение первой производной функции $f(x)$ можно представить различными способами:

$$\check{f}'_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}, \quad \hat{f}'_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}, \quad \bar{f}'_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}.$$

Эти формулы с различной точностью аппроксимируют значение производной в рассматриваемой точке. Первое и второе соотношения имеют погрешность первого порядка, последнее – погрешность второго порядка. Это означает, что погрешности аппроксимации первой производной указанными выражениями пропорциональны шагу h и квадрату шага h^2 сетки (при условии ограниченности соответствующих производных и малости самого шага h) соответственно.

В каждом из рассмотренных случаев приближение производной ее разностным аналогом тем точнее, чем меньше шаг h сетки. Вместе с тем следует иметь в виду, что чрезмерное уменьшение шага h может привести к возрастанию погрешности вычисления разностного аналога производной.

При условии, что погрешность округления $\delta_{\text{окр}}$ результата вычисления функции в ЭВМ не превышает погрешности аппроксимации при записи разностных аналогов, можно получить ограничение на шаг сетки при численном оп-

ределении первых производных \check{f}'_i и \hat{f}'_i :

$$h \geq 2 \sqrt{\frac{\delta_{\text{окр}}}{M_2}}$$

и производной \bar{f}'_i :

$$h \geq 3 \sqrt{\frac{6\delta_{\text{окр}}}{M_3}},$$

где $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$, $M_3 = \max_{x \in [a, b]} |f'''(x)|$.

Выполнение расчетов

На рис. 2.1 показан вид заданной функции вблизи точки, где требуется отыскать приближенное значение первой производной.

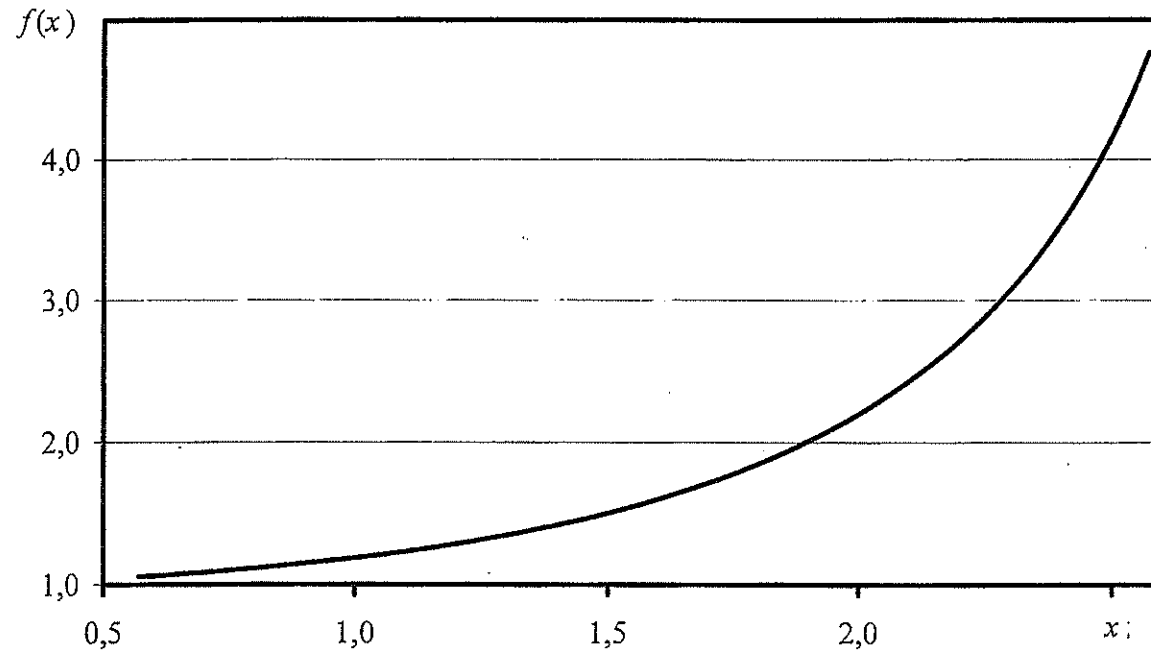


Рис. 2.1. Функция $f(x) = x/\sin x$ на отрезке $[\pi/2 - 1, \pi/2 + 1]$ вблизи заданной точки $x = \pi/2$

Таблица 2.1

Зависимость погрешности численного определения значения первой производной f' от сеточного шага h

h	$\check{\delta}$	$\bar{\delta}$	$\hat{\delta}$
10^{-2}	$0,7385 \cdot 10^{-1}$	$0,5021 \cdot 10^{-2}$	$0,8389 \cdot 10^{-1}$
10^{-3}	$0,7804 \cdot 10^{-2}$	$0,4996 \cdot 10^{-4}$	$0,7904 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	$0,7849 \cdot 10^{-3}$	$0,4579 \cdot 10^{-6}$	$0,7859 \cdot 10^{-3}$
10^{-5}	$0,7858 \cdot 10^{-4}$	$0,3709 \cdot 10^{-7}$	$0,7850 \cdot 10^{-4}$
10^{-6}	$0,3931 \cdot 10^{-4}$	$0,4084 \cdot 10^{-7}$	$0,3923 \cdot 10^{-4}$
10^{-7}	$0,7896 \cdot 10^{-5}$	$0,4204 \cdot 10^{-7}$	$0,7811 \cdot 10^{-5}$
10^{-8}	$0,8276 \cdot 10^{-6}$	$0,4216 \cdot 10^{-7}$	$0,7433 \cdot 10^{-6}$
10^{-9}	$0,1215 \cdot 10^{-6}$	$0,4160 \cdot 10^{-7}$	$0,3833 \cdot 10^{-8}$
10^{-10}	$0,7269 \cdot 10^{-7}$	$0,5049 \cdot 10^{-7}$	$0,2828 \cdot 10^{-7}$
10^{-11}	$0,8274 \cdot 10^{-7}$	$0,8274 \cdot 10^{-7}$	$0,8274 \cdot 10^{-7}$
10^{-12}	$0,8274 \cdot 10^{-7}$	$0,8274 \cdot 10^{-7}$	$0,8274 \cdot 10^{-7}$
10^{-13}	$0,8274 \cdot 10^{-7}$	$0,8274 \cdot 10^{-7}$	$0,8274 \cdot 10^{-7}$
10^{-14}	$0,8890 \cdot 10^{-4}$	$0,8890 \cdot 10^{-4}$	$0,8890 \cdot 10^{-4}$
10^{-15}	$0,7993 \cdot 10^{-3}$	$0,7993 \cdot 10^{-3}$	$0,7993 \cdot 10^{-3}$
10^{-16}	$0,7993 \cdot 10^{-3}$	$0,7993 \cdot 10^{-3}$	$0,7993 \cdot 10^{-3}$

Для оценки точности разностных формул определяется первая производная заданной функции:

$$f'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}, \quad f'(\pi/2) = 1.$$

Для выполнения расчетов принято:

$$x_i = \frac{\pi}{2}, \quad x_{i+1} = \frac{\pi}{2} + h, \quad x_{i-1} = \frac{\pi}{2} - h.$$

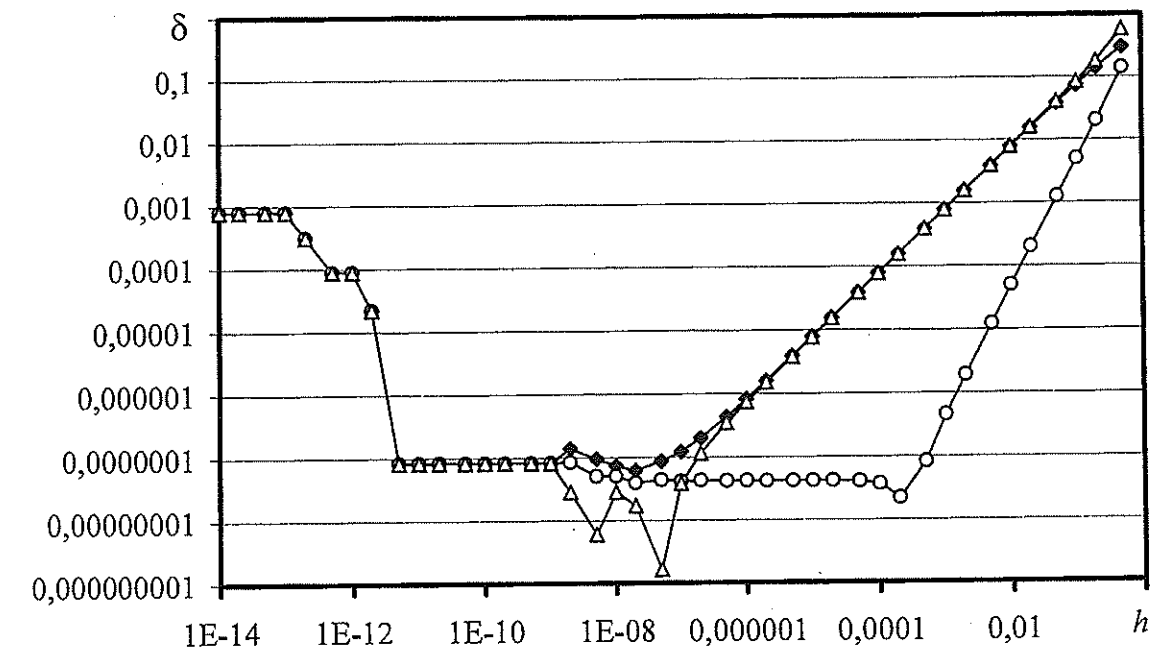


Рис. 2.2. Погрешности аппроксимации $\check{\delta}$ (\blacklozenge), $\bar{\delta}$ (\circ) и $\hat{\delta}$ (\blacktriangle) первой производной функции $f(x) = x/\sin x$ разностными аналогами вблизи точки $x = \pi/2$

Далее, для различных значений шага h определяются приближенные значения производных в соответствии с приведенными формулами. Отклонения получаемых значений от точного значения производной, оцениваемые выражениями

$$\check{\delta} = \left| \check{f}'_i - f'(x_i) \right|, \quad \bar{\delta} = \left| \bar{f}'_i - f'(x_i) \right|, \quad \hat{\delta} = \left| \hat{f}'_i - f'(x_i) \right|,$$

приведены в табл. 2.1. На рис. 2.2 представлены те же данные в графическом виде.

Выводы

1. Определены приближенные значения первой производной заданной функции в указанной точке для различных шагов дифференцирования с использованием трех разностных формул.

2. С уменьшением шага разностной сетки погрешность определения численного значения первой производной уменьшается.

3. При очень малых сеточных шагах, $h < 2 \cdot 10^{-11}$, погрешность определения значения первой производной возрастает, что связано с влиянием ошибок округления результатов расчетов в ЭВМ.

2.1.2. Разностный аналог второй производной

Задание. Вычислить приближенно значение второй производной функции $f(x) = x/\sin x$ в точке $x = \pi/2$ с помощью разностного аналога

$$\frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2}$$

Исследовать сходимость численно определяемых значений к точному значению и определить зависимость погрешности численного дифференцирования от шага h .

Алгоритм решения

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка Ω_n с шагом $h = (b-a)/n$. В произвольной точке этой сетки приближенное значение второй производной функции $f(x)$ представляется с помощью выражения

$$f_i'' = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2}$$

Эта формула аппроксимирует значение второй производной в рассматриваемой точке с погрешностью второго порядка.

При условии, что погрешность округления $\delta_{\text{окр}}$ результата вычисления функции в ЭВМ не превышает погрешности аппроксимации при записи разностных аналогов, можно получить ограничение на шаг сетки при численном определении второй производной f_i'' ,

$$h \geq 4 \sqrt{\frac{48\delta_{\text{окр}}}{M_4}},$$

где $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$.

Выполнение расчетов

Для оценки точности разностных формул определяется вторая производная заданной функции:

$$f''(x) = \frac{x \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 2x \cos^2 x}{\sin^3 x}, \quad f''(\pi/2) = \pi/2.$$

Для выполнения расчетов принято:

$$x_i = \frac{\pi}{2}, \quad x_{i+1} = \frac{\pi}{2} + h, \quad x_{i-1} = \frac{\pi}{2} - h.$$

Таблица 2.2

Погрешность вычисления значения производной f'' от сеточного шага h

h	δ	h	δ
10^{-2}	$0,6572 \cdot 10^{-2}$	10^{-7}	$0,2746 \cdot 10^{-7}$
10^{-3}	$0,6539 \cdot 10^{-6}$	10^{-8}	$0,1693 \cdot 10^{-3}$
10^{-4}	$0,6009 \cdot 10^{-8}$	10^{-9}	$0,2792 \cdot 10^{-1}$
10^{-5}	$0,2917 \cdot 10^{-9}$	10^{-10}	$0,2870 \cdot 10^1$
10^{-6}	$0,8186 \cdot 10^{-9}$		

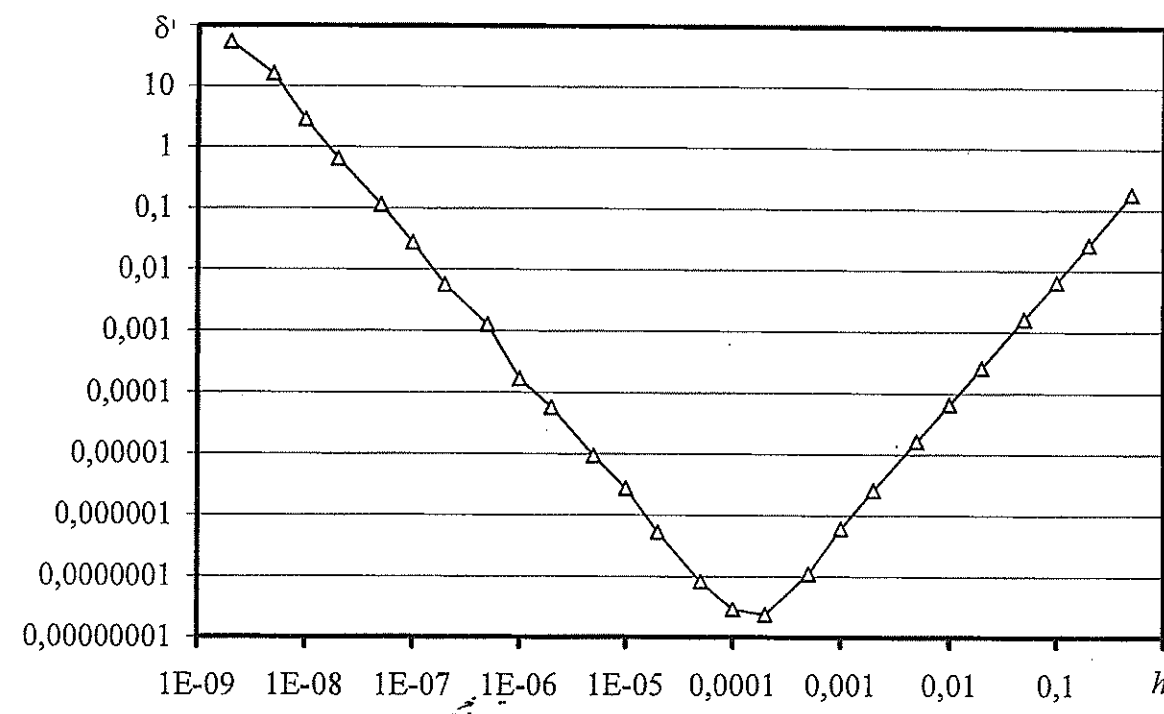


Рис. 2.3. Погрешность δ аппроксимации второй производной функции $f(x) = x/\sin x$ вблизи точки $x = \pi/2$

Для различных значений шага h определяются, в соответствии с приведенными формулами, приближенные значения производных. В табл. 2.2 приведены отклонения получаемых значений от точного значения производной:

$$\delta = |f_i'' - f''(x_i)|.$$

На рис. 2.3 представлены те же данные в виде зависимости погрешности δ от шага h .

Выводы

1. Определены приближенные значения второй производной заданной функции в указанной точке с использованием разностного соотношения.
2. С уменьшением шага разностной сетки погрешность определения приближенного значения производной уменьшается.
3. При малых сеточных шагах, $h < 10^{-4}$, погрешность определения значения второй производной возрастает, что связано с влиянием ошибок округления результатов расчетов в ЭВМ.

2.2. Численное интегрирование

Требуется вычислить значение определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Пусть подынтегральная функция на отрезке $[a, b]$ представлена разложением $f(x) \approx \sum_{j=0}^m f_j \varphi_j(x)$, где $f_j = f(x_j)$ — известные значения функции в заданных точках x_j ; $\varphi_j(x)$ — линейно-независимые функции. Подстановка разложения под знак интеграла приводит к выражению

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=0}^m f_j \int_a^b \varphi_j(x) dx = \sum_{j=0}^m C_j f_j,$$

$$C_j = \int_a^b \varphi_j(x) dx, \quad j = \overline{0, m} \text{ — весовые коэффициенты.}$$

Пусть $\Omega_n = \{x_0 = a; x_i = a + i \cdot h; i = \overline{0, n}; h = (b - a)/n\}$ — разностная сетка с постоянным шагом h на заданном отрезке $[a, b]$. Аддитивность операции интегрирования позволяет представить искомый интеграл в виде

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

На каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ проще и удобнее вычислять и оценивать *квадратурные формулы*.

2.2.1. Формула прямоугольников

Задание. Для определенного интеграла $\int_0^{10} e^{-x} dx$:

- разработать вычислительную программу, реализующую метод прямоугольников;
- найти значение заданного интеграла;

- исследовать сходимость численно определяемых значений при уменьшении шагов интегрирования;
- определить зависимость погрешности численного интегрирования от шага интегрирования;
- установить, при каком шаге интегрирования погрешность вычисления интеграла не превышает 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Пусть в разложении $f(x) \approx \sum_{j=0}^m f_j \varphi_j(x)$ удерживается лишь одно слагаемое, содержащее функцию $\varphi_0 = 1$.

В этом случае весовой коэффициент $C_0^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_0 dx = h$, и на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ интеграл заменяется выражением

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx f(x_{k-1/2})h.$$

Погрешность вычисления интеграла на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ оценивается выражением

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - f(x_{k-1/2})h \right| \leq M_{2,k} \frac{h^3}{24} = O(h^3),$$

где $M_{2,k} = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f''(x)|$. Для всего отрезка интегрирования $[a, b]$ погрешность интегрирования оценивается величиной

$$|\delta| \leq M_2 \frac{h^2}{24} (b - a),$$

где $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$. Иными словами, для всего отрезка $[a, b]$ погрешность формулы прямоугольников с *центральной* точкой имеет *второй* порядок. Для часто применяемых на практике формул интегрирования вида $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx f(x_{k-1})h$ и $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx f(x_{k+1})h$ с *левой* и *правой* точками погрешности интегрирования на том же отрезке оцениваются выражениями

$$|\delta_n| \leq \frac{M_1 h}{2} (b - a), \quad |\delta_n| \leq \frac{M_1 h}{2} (b - a),$$

где $M_1 = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, то есть являются погрешностями *первого* порядка.

Выполнение расчетов

Для различных значений шага h определяются в соответствии с приведенными формулами приближенные значения заданного интеграла. В табл. 2.3 приведены отклонения $\delta = |I - I_h|$ получаемых численных значений I_h интеграла (δ_l – по формуле с *левой* точкой, δ – по формуле с *центральной* точкой, δ_p – по формуле с *правой* точкой) от точного значения

$$I = \int_0^{10} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{10} = 0,9999546.$$

Таблица 2.3

Зависимость погрешности значения интеграла от величины сеточного шага h

h	δ_l	δ	δ_p
$1,00000 \cdot 10^0$	$5,81950 \cdot 10^{-1}$	$4,04808 \cdot 10^{-2}$	$4,18004 \cdot 10^{-1}$
$5,00000 \cdot 10^{-1}$	$2,70735 \cdot 10^{-1}$	$1,03407 \cdot 10^{-2}$	$2,29243 \cdot 10^{-1}$
$2,50000 \cdot 10^{-1}$	$1,30197 \cdot 10^{-1}$	$2,59931 \cdot 10^{-3}$	$1,19792 \cdot 10^{-1}$
$1,25000 \cdot 10^{-1}$	$6,37988 \cdot 10^{-2}$	$6,50715 \cdot 10^{-4}$	$6,11955 \cdot 10^{-2}$
$6,25000 \cdot 10^{-2}$	$3,15741 \cdot 10^{-2}$	$1,62734 \cdot 10^{-4}$	$3,09231 \cdot 10^{-2}$
$3,12500 \cdot 10^{-2}$	$1,57057 \cdot 10^{-2}$	$4,06870 \cdot 10^{-5}$	$1,55429 \cdot 10^{-2}$
$1,56250 \cdot 10^{-2}$	$7,83249 \cdot 10^{-3}$	$1,01719 \cdot 10^{-5}$	$7,79180 \cdot 10^{-3}$
$7,81250 \cdot 10^{-3}$	$3,91116 \cdot 10^{-3}$	$2,54294 \cdot 10^{-6}$	$3,90099 \cdot 10^{-3}$
$3,90625 \cdot 10^{-3}$	$1,95431 \cdot 10^{-3}$	$6,35683 \cdot 10^{-7}$	$1,95176 \cdot 10^{-3}$
$1,95312 \cdot 10^{-3}$	$9,76836 \cdot 10^{-4}$	$1,58868 \cdot 10^{-7}$	$9,76200 \cdot 10^{-4}$
$9,76562 \cdot 10^{-4}$	$4,88339 \cdot 10^{-4}$	$3,96644 \cdot 10^{-8}$	$4,88180 \cdot 10^{-4}$
$4,88281 \cdot 10^{-4}$	$2,44149 \cdot 10^{-4}$	$9,86343 \cdot 10^{-9}$	$2,44110 \cdot 10^{-4}$
$2,44141 \cdot 10^{-4}$	$1,22070 \cdot 10^{-4}$	$2,41319 \cdot 10^{-9}$	$1,22060 \cdot 10^{-4}$
$1,22070 \cdot 10^{-4}$	$6,10337 \cdot 10^{-5}$	$5,50628 \cdot 10^{-10}$	$6,10311 \cdot 10^{-5}$
$6,10352 \cdot 10^{-5}$	$3,05166 \cdot 10^{-5}$	$8,49809 \cdot 10^{-11}$	$3,05158 \cdot 10^{-5}$
$3,05176 \cdot 10^{-5}$	$1,52582 \cdot 10^{-5}$	$3,14184 \cdot 10^{-11}$	$1,52579 \cdot 10^{-5}$
$1,52588 \cdot 10^{-5}$	$7,62914 \cdot 10^{-6}$	$6,05299 \cdot 10^{-11}$	$7,62896 \cdot 10^{-6}$
$7,62939 \cdot 10^{-6}$	$3,81460 \cdot 10^{-6}$	$6,78400 \cdot 10^{-11}$	$3,81445 \cdot 10^{-6}$
$3,81470 \cdot 10^{-6}$	$1,90733 \cdot 10^{-6}$	$6,96333 \cdot 10^{-11}$	$1,90719 \cdot 10^{-6}$
$1,90735 \cdot 10^{-6}$	$9,53702 \cdot 10^{-7}$	$6,99570 \cdot 10^{-11}$	$9,53560 \cdot 10^{-7}$
$9,53674 \cdot 10^{-7}$	$4,76886 \cdot 10^{-7}$	$7,02777 \cdot 10^{-11}$	$4,76745 \cdot 10^{-7}$
$4,76837 \cdot 10^{-7}$	$2,38478 \cdot 10^{-7}$	$7,01291 \cdot 10^{-11}$	$2,38338 \cdot 10^{-7}$
$2,38419 \cdot 10^{-7}$	$1,19274 \cdot 10^{-7}$	$7,00865 \cdot 10^{-11}$	$1,19134 \cdot 10^{-7}$
$1,19209 \cdot 10^{-7}$	$5,96723 \cdot 10^{-8}$	$7,01758 \cdot 10^{-11}$	$5,95316 \cdot 10^{-8}$

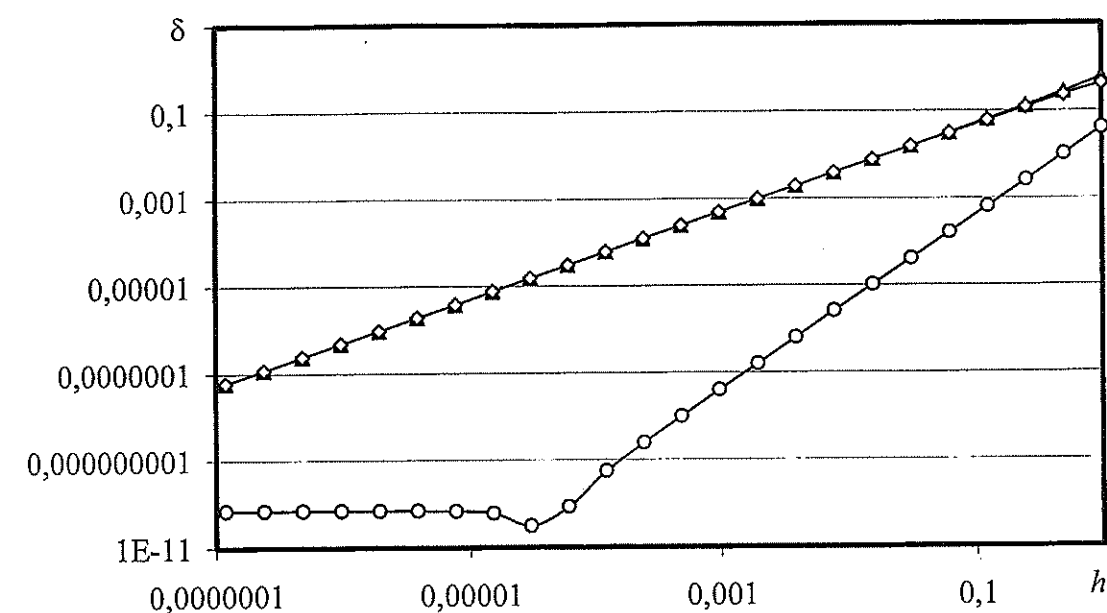


Рис. 2.4. Сходимость на последовательности сеток Ω_n значений интеграла $\int_0^{10} e^{-x} dx$, вычисленных по формулам метода прямоугольников с *центральной* (—○—), *левой* (—△—) и *правой* (—◇—) точками

На рис. 2.4 приведены кривые, отражающие сходимость процесса приближенного вычисления определенного интеграла $\int_0^{10} e^{-x} dx$ с помощью формул метода прямоугольников с *левой*, *центральной* и *правой* точками.

Выводы

1. Найдены приближенные значения определенного интеграла от заданной функции на указанном отрезке с использованием формулы прямоугольников.
2. С уменьшением шага разностной сетки погрешность вычисления приближенного значения определенного интеграла уменьшается.
3. Погрешность вычисления интеграла не превышает 10^{-6} (согласно табл. 2.3), если шаг интегрирования равен $3,9 \cdot 10^{-3}$ для метода прямоугольников с *центральной* точкой и $1,9 \cdot 10^{-6}$ для метода прямоугольников с *левой* и *правой* точками. Это свидетельствует о более высокой эффективности метода прямоугольников с *центральной* точкой.
4. Для вычисления значения определенного интеграла по формуле прямоугольников с *центральной* точкой на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) требуется $0,8 \cdot 10^{-3}$ с.

2.2.2. Формула трапеций

Задание. Для определенного интеграла $\int_0^{10} e^{-x} dx$:

- разработать вычислительную программу, реализующую метод трапеций;
- найти значение заданного интеграла;
- исследовать сходимость численно определяемых значений при уменьшении шагов интегрирования;
- определить зависимость погрешности численного интегрирования от шага интегрирования;
- установить, при каком шаге интегрирования погрешность вычисления интеграла не превышает 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ заменяется линейным приближением $f(x) \approx [(x_k - x)f(x_{k-1}) + (x - x_{k-1})f(x_k)]/h$. Это означает, что для разложения $f(x)$ используются две функции: $\varphi_0(x) = (x_k - x)/h$ и $\varphi_1(x) = (x - x_{k-1})/h$. В этом случае весовые коэффициенты принимают следующие значения:

$$C_0^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_0(x) dx = \frac{h}{2}, \quad C_1^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_1(x) dx = \frac{h}{2}.$$

Отсюда вытекает формула трапеций:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx f(x_{k-1}) \frac{h}{2} + f(x_k) \frac{h}{2} = [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \frac{h}{2}.$$

Погрешность вычисления интеграла на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ оценивается величиной

$$\frac{M_{2,k} h^3}{12} = O(h^3).$$

Для всего отрезка интегрирования $[a, b]$ погрешность интегрирования оценивается выражением

$$|\delta| \leq M_2 h^2 (b - a) / 12.$$

В этих выражениях, как и ранее,

$$M_{2,k} = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f''(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Иными словами, для всего отрезка $[a, b]$ погрешность формулы трапеций имеет второй порядок.

Выполнение расчетов

Для различных значений шага h определяются, в соответствии с приведенным выражением, приближенные значения заданного интеграла. В табл. 2.4 приведены отклонения $\delta = |I - I_h|$ получаемых численных значений I_h интеграла от точного значения

$$I = \int_0^{10} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{10} = 0,9999546.$$

Таблица 2.4

Зависимость погрешности значения интеграла от сеточного шага h

h	δ	h	δ
$1,00000 \cdot 10^0$	$8,19730 \cdot 10^{-2}$	$2,44141 \cdot 10^{-4}$	$5,03706 \cdot 10^{-9}$
$5,00000 \cdot 10^{-1}$	$2,07461 \cdot 10^{-2}$	$1,22070 \cdot 10^{-4}$	$1,31194 \cdot 10^{-9}$
$2,50000 \cdot 10^{-1}$	$5,20268 \cdot 10^{-2}$	$6,10352 \cdot 10^{-5}$	$3,80655 \cdot 10^{-10}$
$1,25000 \cdot 10^{-1}$	$1,30169 \cdot 10^{-3}$	$3,05176 \cdot 10^{-5}$	$1,47851 \cdot 10^{-10}$
$6,25000 \cdot 10^{-2}$	$3,25485 \cdot 10^{-4}$	$1,52588 \cdot 10^{-5}$	$8,96312 \cdot 10^{-11}$
$3,12500 \cdot 10^{-2}$	$8,13753 \cdot 10^{-5}$	$7,62939 \cdot 10^{-6}$	$7,51160 \cdot 10^{-11}$
$1,56250 \cdot 10^{-2}$	$2,03441 \cdot 10^{-5}$	$3,81470 \cdot 10^{-6}$	$7,14470 \cdot 10^{-11}$
$7,81250 \cdot 10^{-3}$	$5,08610 \cdot 10^{-6}$	$1,90735 \cdot 10^{-6}$	$7,04060 \cdot 10^{-11}$
$3,90625 \cdot 10^{-3}$	$1,27158 \cdot 10^{-6}$	$9,53674 \cdot 10^{-7}$	$7,03962 \cdot 10^{-11}$
$1,95312 \cdot 10^{-3}$	$3,17947 \cdot 10^{-7}$	$4,76837 \cdot 10^{-7}$	$7,01598 \cdot 10^{-11}$
$9,76562 \cdot 10^{-4}$	$7,95395 \cdot 10^{-8}$	$2,38419 \cdot 10^{-7}$	$7,00952 \cdot 10^{-11}$
$4,88281 \cdot 10^{-4}$	$1,99376 \cdot 10^{-8}$		

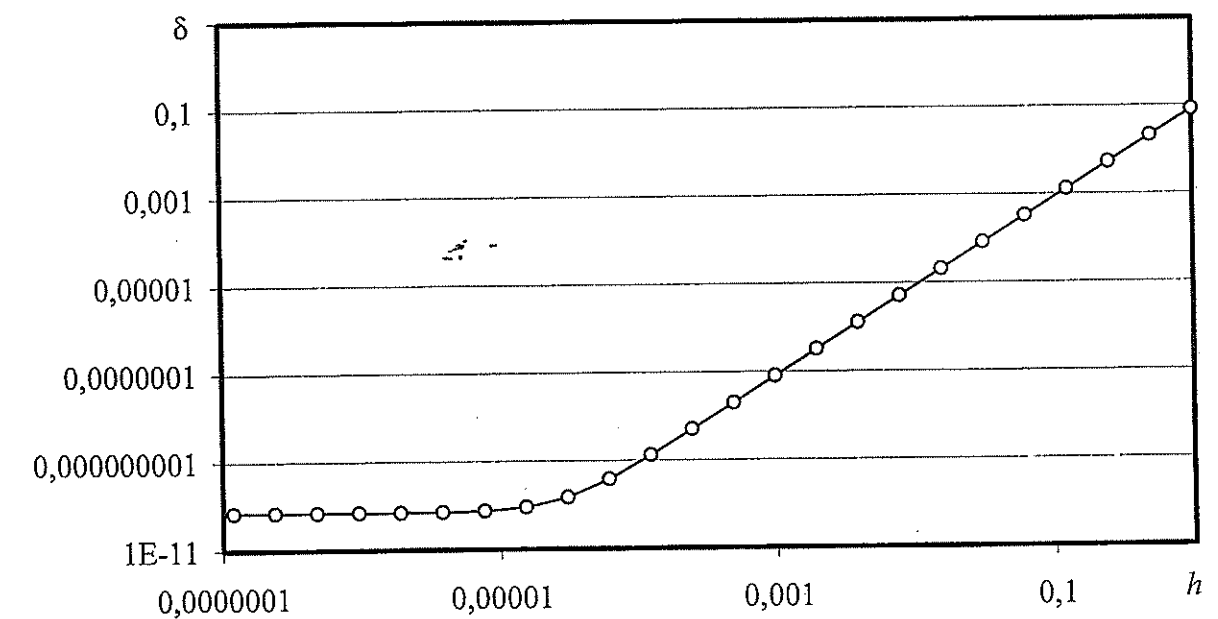


Рис. 2.5. Сходимость на последовательности сеток Ω_n значений интеграла $\int_0^{10} e^{-x} dx$, вычисленных по формуле трапеций

На рис. 2.5 приведена зависимость погрешности приближенного вычисления определенного интеграла $\int_0^{10} e^{-x} dx$ с помощью формулы трапеций.

Выводы

1. Найдено приближенное значение определенного интеграла от заданной функции на указанном отрезке с использованием формулы трапеций.
2. С уменьшением шага разностной сетки погрешность определения приближенного значения интеграла уменьшается.
3. Погрешность вычисления интеграла по формуле трапеций не превышает 10^{-6} (согласно табл. 2.4), если шаг интегрирования равен $1,95 \cdot 10^{-3}$.
4. Для вычисления значения определенного интеграла по формуле трапеций на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) требуется $3,1 \cdot 10^{-3}$ с.

2.2.3. Формула парабол (Симпсона)

Задание. Для определенного интеграла $\int_0^{10} e^{-x} dx$:

- разработать вычислительную программу, реализующую метод парабол;
- найти значение заданного интеграла;
- исследовать сходимость численно определяемых значений при уменьшении шагов интегрирования;
- определить зависимость погрешности численного интегрирования от шага интегрирования;
- установить, при каком шаге интегрирования погрешность вычисления интеграла не превышает 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Пусть на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ функция $f(x)$ заменяется полиномом Лагранжа 2-й степени:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_{k-1/2})(x-x_k)}{(x_{k-1}-x_{k-1/2})(x_{k-1}-x_k)} f(x_{k-1}) + \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k-1/2}-x_{k-1})(x_{k-1/2}-x_k)} f(x_{k-1/2}) + \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k-1/2})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k-1/2})} f(x_k) =$$

$$= \frac{2}{h^2} [(x-x_{k-1/2})(x-x_k)f(x_{k-1}) - 2(x-x_{k-1})(x-x_k)f(x_{k-1/2}) + (x-x_{k-1})(x-x_{k-1/2})f(x_k)].$$

Здесь $x_{k-1/2} = (x_k + x_{k-1})/2$ - центральная точка отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. Для разложения $f(x)$ используются три функции: $\varphi_0(x) = 2(x-x_{k-1/2})(x-x_k)/h^2$, $\varphi_1(x) = -4(x-x_{k-1})(x-x_k)/h^2$, $\varphi_2(x) = 2(x-x_{k-1})(x-x_{k-1/2})/h^2$.

Весовые коэффициенты принимают значения:

$$C_0^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_0(x) dx = \frac{h}{6}, \quad C_1^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_1(x) dx = \frac{2h}{3}, \quad C_2^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_2(x) dx = \frac{h}{6}.$$

Отсюда вытекает формула парабол (Симпсона)

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx [f(x_{k-1}) + 4f(x_{k-1/2}) + f(x_k)] \frac{h}{6}.$$

Погрешность вычисления интеграла на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ оценивается величиной $\frac{M_{4,k} h^5}{2880} = O(h^5)$. Для всего отрезка интегрирования $[a, b]$ погрешность

интегрирования оценивается выражением $|\delta| \leq \frac{M_4 h^4 (b-a)}{2880}$. В этих выражениях

$M_{4,k} = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f^{iv}(x)|$, $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{iv}(x)|$. Иными словами, для всего отрезка $[a, b]$ погрешность формулы парабол имеет четвертый порядок.

Выполнение расчетов

Для различных значений шага h определяются, в соответствии с приведенным выражением, приближенные значения заданного интеграла. В табл. 2.5 приведены отклонения $\delta = |I - I_h|$ получаемых численных значений I_h интеграла от точного значения

$$I = \int_0^{10} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{10} = 0,9999546.$$

Таблица 2.5

Зависимость погрешности значения интеграла от сеточного шага h

h	δ	h	δ
$1,00000 \cdot 10^0$	$3,37137 \cdot 10^{-4}$	$1,56250 \cdot 10^{-2}$	$9,09318 \cdot 10^{-11}$
$5,00000 \cdot 10^{-1}$	$2,15401 \cdot 10^{-5}$	$7,81250 \cdot 10^{-3}$	$7,15300 \cdot 10^{-11}$
$2,50000 \cdot 10^{-1}$	$1,35383 \cdot 10^{-6}$	$3,90625 \cdot 10^{-3}$	$7,03170 \cdot 10^{-11}$
$1,25000 \cdot 10^{-1}$	$8,47980 \cdot 10^{-8}$	$1,95312 \cdot 10^{-3}$	$7,02421 \cdot 10^{-11}$
$6,25000 \cdot 10^{-2}$	$5,36757 \cdot 10^{-9}$	$9,76562 \cdot 10^{-4}$	$7,02360 \cdot 10^{-11}$
$3,12500 \cdot 10^{-2}$	$4,01351 \cdot 10^{-10}$		

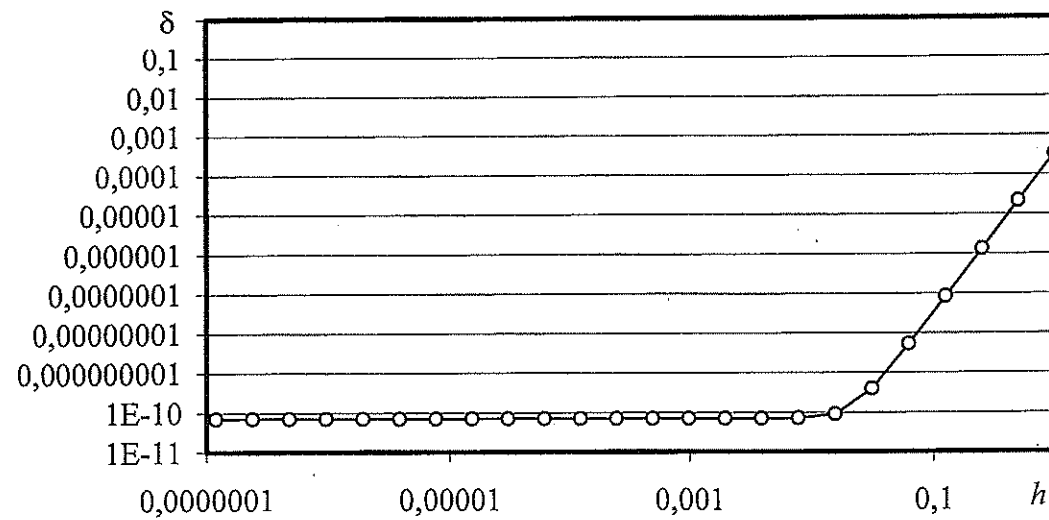


Рис. 2.6. Сходимость на последовательности сеток Ω_n значений интеграла

$$\int_0^{10} e^{-x} dx, \text{ вычисленных по формуле парабол (Симпсона)}$$

На рис. 2.6 приведена зависимость погрешности численного определения интеграла $\int_0^{10} e^{-x} dx$ с помощью формулы парабол (Симпсона).

Выводы

1. Найдены приближенные значения определенного интеграла от заданной функции на указанном отрезке с использованием формулы парабол (Симпсона).
2. С уменьшением шага разностной сетки погрешность определения приближенного значения интеграла уменьшается.
3. Погрешность вычисления интеграла по формуле трапеций не превышает 10^{-6} (согласно табл. 2.4), если шаг интегрирования равен $1,25 \cdot 10^{-1}$.
4. Для вычисления определенного интеграла на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) при заданной точности 10^{-6} по формуле прямоугольников (с центральной точкой) с шагом $3,9 \cdot 10^{-3}$ требуется $0,8 \cdot 10^{-3}$ с; по формуле трапеций с шагом $1,95 \cdot 10^{-3} - 3,1 \cdot 10^{-3}$ с; по формуле парабол (Симпсона) с шагом $1,25 \cdot 10^{-1} - 0,7 \cdot 10^{-4}$ с. Очевидно, что затраты ресурсов вычислительной техники (при одинаковой точности) для вычисления определенного интеграла будут наименьшими при использовании формулы парабол (Симпсона).
5. При вычислении определенного интеграла снижение погрешности при уменьшении шага интегрирования наблюдается лишь до некоторого значения h^* : для формулы прямоугольников с центральной точкой это значение равно $h^* = 1,5 \cdot 10^{-5}$; для формулы трапеций $h^* = 3,8 \cdot 10^{-6}$; для формулы парабол $h^* = 7,8 \cdot 10^{-3}$. Дальнейшее уменьшение шага интегрирования не приводит к повышению точности вычисляемого значения определенного интеграла.

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решением, интегралом или интегральной кривой обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)), \text{ или } y'(x) = f(x, y(x)),$$

называется дифференцируемая функция $y(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, то есть такая, что $y'(x) \equiv f(x, y(x))$ на некотором участке изменения аргумента x .

3.1. Задачи Коши

Задача Коши предполагает, что для одного из значений аргумента (например, x_0), принимаемого за начальное, известно значение функции y_0 , то есть задано $y(x_0) = y_0$.

Условия существования и единственности решения задачи Коши устанавливает теорема Пеано: пусть функция $f(x, y(x))$ непрерывна в открытой области D . Тогда через каждую точку (u, v) этой области проходит хотя бы одна интегральная кривая. Каждая интегральная кривая может быть продолжена в обе стороны вплоть до границы любой замкнутой области G , целиком содержащейся в D и содержащей точку (u, v) внутри себя.

Кроме того, если функция $f(x, y(x))$ имеет в области D непрерывные частные производные первого порядка или удовлетворяет условию Липшица,

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K|y_2 - y_1|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in G, \quad K = \text{const} > 0,$$

то задача Коши имеет единственное решение.

3.1.1. Метод Эйлера

Задание. Для задачи Коши $\frac{dy}{dx} = -y, \quad y|_{x=0} = 1$, на интервале $[0, 2]$:

- разработать вычислительную программу, реализующую метод Эйлера;
- найти численное решение дифференциального уравнения;
- исследовать сходимость последовательности численных решений при уменьшающихся шагах интегрирования;
- определить шаг интегрирования, обеспечивающий погрешность численного решения не более 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Пусть для отрезка $[a, b]$, на котором ищется решение дифференциального уравнения, построена $\Omega_n = \left\{ x_0 = a; x_i = a + i \cdot h; i = \overline{0, n}; h = (b - a)/n \right\}$ – сеточная

область с постоянным шагом h . Для решения задачи Коши искомая функция $y(x)$ раскладывается в ряд Тейлора вблизи точки $x_k \in \Omega_n$,

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k) \cdot h + \dots$$

Учитывая, что согласно дифференциальному уравнению $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$, это разложение решения можно записать в виде

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + f(x_k, y(x_k)) \cdot h + \dots$$

С помощью полученного выражения строится вычислительный процесс

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h, \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_0 = y(0).$$

Здесь и далее символами y_k обозначается результат численного решения дифференциального уравнения, а выражение $y(x_k)$ используется для обозначения точного решения исходной задачи.

При условии, что вторая производная искомого решения $y''(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$, погрешность аппроксимации исходного дифференциального уравнения схемой Эйлера оказывается величиной, пропорциональной первому порядку шага интегрирования, то есть $\delta = O(h)$.

Выполнение расчетов

Для получения точного решения задачи воспользуемся методом разделения переменных: $dy/y = -dx$, $\int_{y_0}^{y(t)} dz/z = -\int_0^t dt$, $\ln y(t)/y_0 = -x$. Точным решением поставленной задачи является функция $y(x) = e^{-x}$ (рис. 3.1).

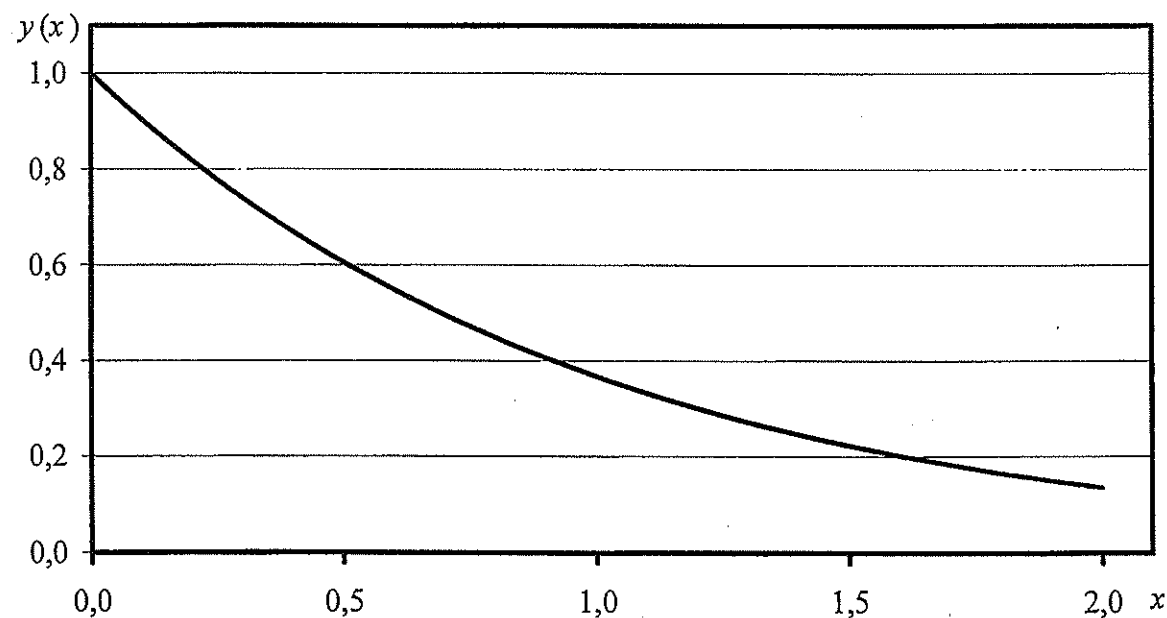


Рис. 3.1. Решение задачи Коши на отрезке $[0, 2]$ для уравнения $y' = -y$ с начальным условием $y|_{x=0} = 1$

Для различных значений шага интегрирования h определяются, в соответствии со схемой Эйлера, численные решения заданного уравнения. Выбирается первоначальный шаг интегрирования, например $h = (2 - 0)/4 = 0,5$. Результаты расчетов приведены в табл. 3.1.

Далее шаг интегрирования уменьшается вдвое, $h = 0,25$, и вновь решается та же задача. Затем шаг интегрирования вновь уменьшается вдвое, $h = 0,125$, и так далее. Результаты численного решения задачи методом Эйлера показаны на рис. 3.2.

Таблица 3.1

Численные решения задачи Коши $dy/dx = -y$, $y|_{x=0} = 1$, методом Эйлера при различных шагах интегрирования h

x_i	$h = 0,5$	$h = 0,25$	$h = 0,125$	Точное решение
0,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,125			0,875	0,88249
0,250		0,750	0,76563	0,77880
0,375			0,66992	0,68729
0,500	0,500	0,56250	0,58618	0,60653
0,625			0,51291	0,53526
0,750		0,42188	0,44879	0,47237
0,875			0,39269	0,41686
1,000	0,250	0,31641	0,34361	0,36788
1,125			0,30066	0,32465
1,250		0,23731	0,26308	0,28651
1,375			0,23019	0,25284
1,500	0,125	0,17798	0,20142	0,22313
1,625			0,17624	0,19691
1,750		0,13348	0,15421	0,17377
1,875			0,13493	0,15336
2,000	0,0625	0,10011	0,11807	0,13534

Далее, используя численные значения решений, полученных для разных шагов интегрирования h , оцениваются различия $\delta_{h,h/2} = \max_{x_k \in \Omega_n} |y_k^h - y_k^{h/2}|$ между этими решениями (для общих точек x_k), а также отклонения $\delta_h = \max_{x_k \in \Omega_n} |y_k - y(x_k)|$ получаемых численных решений от точного.

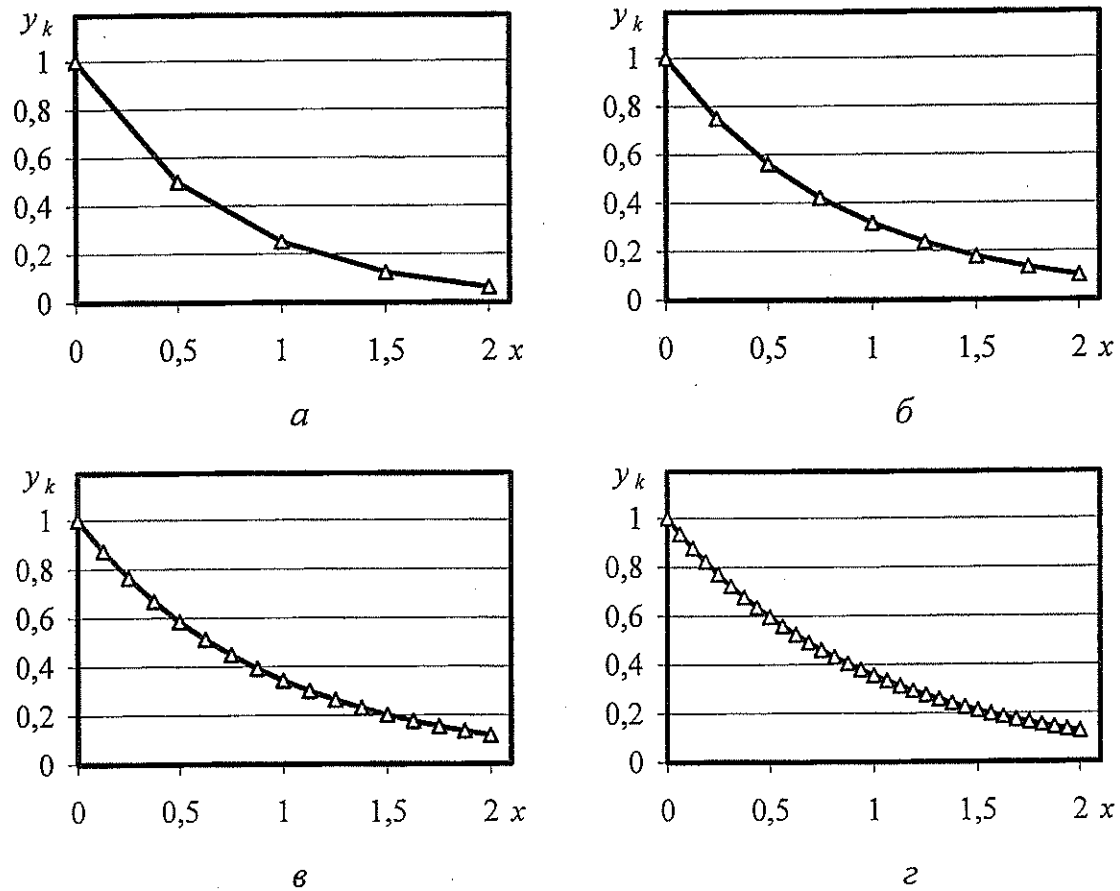


Рис. 3.2. Численные решения задачи Коши методом Эйлера при различных шагах интегрирования: $h = 0,5$ (а), $h = 0,25$ (б), $h = 0,125$ (в) и $h = 0,0625$ (г)

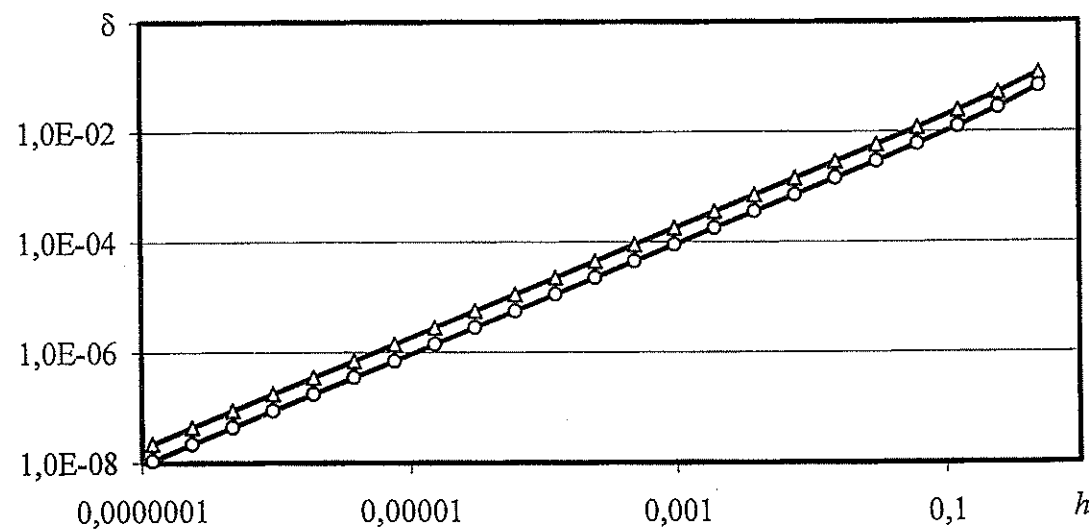


Рис. 3.3. Сходимость на последовательности сеток Ω_n численных решений задачи Коши, полученных методом Эйлера: зависимости погрешностей $\delta_{h,h/2}$ (—○—) и δ_h (—△—) от шага интегрирования h

На рис. 3.3 приведены зависимости погрешностей $\delta_{h,h/2}$ и δ_h получаемых численных решений от шага интегрирования h .

Выводы

1. Найдено с помощью метода Эйлера численное решение поставленной задачи Коши.
2. Исследована сходимость численного решения. Показано, что с уменьшением шага интегрирования h снижается отклонение численного решения от точного, а также различия последовательности численных решений, получаемых с шагами $h, h/2, h/4, h/8, \dots$, соответственно.
3. Для получения численного решения с погрешностью не выше 10^{-6} шаг интегрирования должен быть не более $7,5 \cdot 10^{-6}$ (см. рис. 3.3).
4. Для численного решения задачи Коши методом Эйлера с заданной погрешностью на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2.2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) с шагом $7,5 \cdot 10^{-6}$ требуется $13,4 \cdot 10^{-3}$ с.

3.1.2. Метод Рунге – Кутты 2-го порядка

Задание. Для задачи Коши $\frac{dy}{dx} = -y, y|_{x=0} = 1$, на интервале $[0, 2]$:

- разработать вычислительную программу, реализующую метод Рунге – Кутты 2-го порядка;
- найти численное решение дифференциального уравнения;
- исследовать сходимость последовательности численных решений при уменьшающихся шагах интегрирования;
- определить шаг интегрирования, обеспечивающий погрешность численного решения не более 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Пусть для отрезка $[a, b]$, на котором ищется решение дифференциального уравнения, построена $\Omega_n = \{ \bar{x}_0 = a; x_i = a + i \cdot h; i = 0, n; h = (b - a)/n \}$ – сеточная область с постоянным шагом h . Для нахождения численного решения методом Рунге – Кутты 2-го порядка вычислительный процесс строится в соответствии с выражением

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k))], \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_0 = y(0).$$

Здесь, как и в предыдущем случае, символами y_k обозначается результат численного решения дифференциального уравнения. Погрешность аппроксимации исходного дифференциального уравнения приведенной схемой Рунге – Кутты имеет второй порядок, $\delta = O(h^2)$.

Выполнение расчетов

Для различных значений шага интегрирования h определяются, в соответствии со схемой Рунге – Кутты 2-го порядка, численные решения заданного уравнения (табл. 3.2). Результаты численного решения задачи этим методом показаны на рис. 3.4.

Таблица 3.2

Численные решения задачи Коши $dy/dx = -y$, $y|_{x=0} = 1$ методом Рунге – Кутты 2-го порядка при различных шагах интегрирования h

x_i	$h = 0,5$	$h = 0,25$	$h = 0,125$	Точное решение
0,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,125			0,88281	0,88249
0,250		0,78125	0,77936	0,77880
0,375			0,68803	0,68729
0,500	0,62500	0,61035	0,60740	0,60653
0,625			0,53622	0,53526
0,750		0,47684	0,47338	0,47237
0,875			0,41791	0,41686
1,000	0,39063	0,37253	0,36893	0,36788
1,125			0,32570	0,32465
1,250		0,29104	0,28753	0,28651
1,375			0,25384	0,25284
1,500	0,24414	0,22737	0,22409	0,22313
1,625			0,19783	0,19691
1,750		0,17764	0,17465	0,17377
1,875			0,15418	0,15336
2,000	0,15259	0,13878	0,13611	0,13534

С использованием численных решений, полученных для разных шагов интегрирования h , оцениваются различия $\delta_{h,h/2} = \max_{x_k \in \Omega_n} |y_k^h - y_k^{h/2}|$ между этими решениями (для общих точек x_k), а также отклонения $\delta_h = \max_{x_k \in \Omega_n} |y_k - y(x_k)|$ получаемых численных решений от точного.

На рис. 3.5 приведены зависимости погрешностей $\delta_{h,h/2}$ и δ_h численных решений от шага интегрирования h .

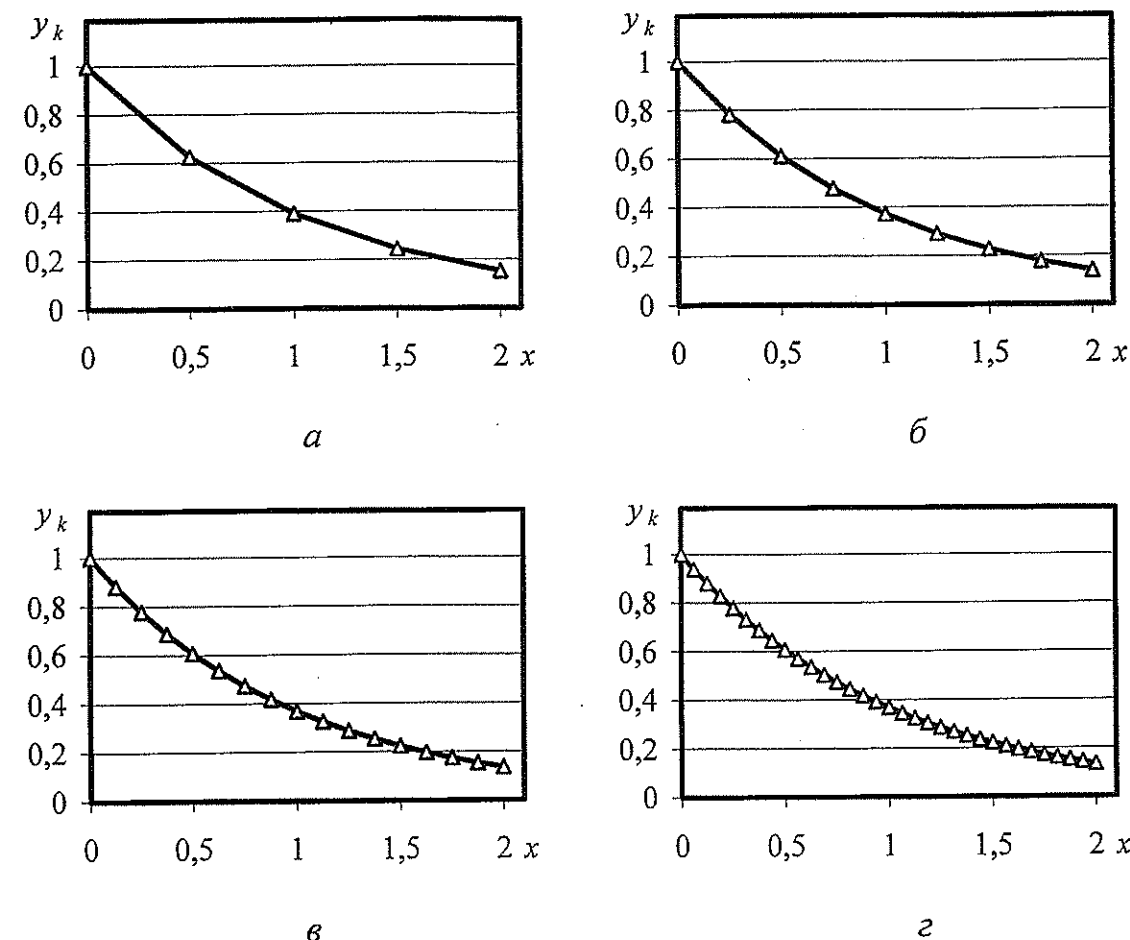


Рис. 3.4. Численные решения задачи Коши методом Рунге – Кутты 2-го порядка при различных шагах интегрирования: $h = 0,5$ (а), $h = 0,25$ (б), $h = 0,125$ (в) и $h = 0,0625$ (г)

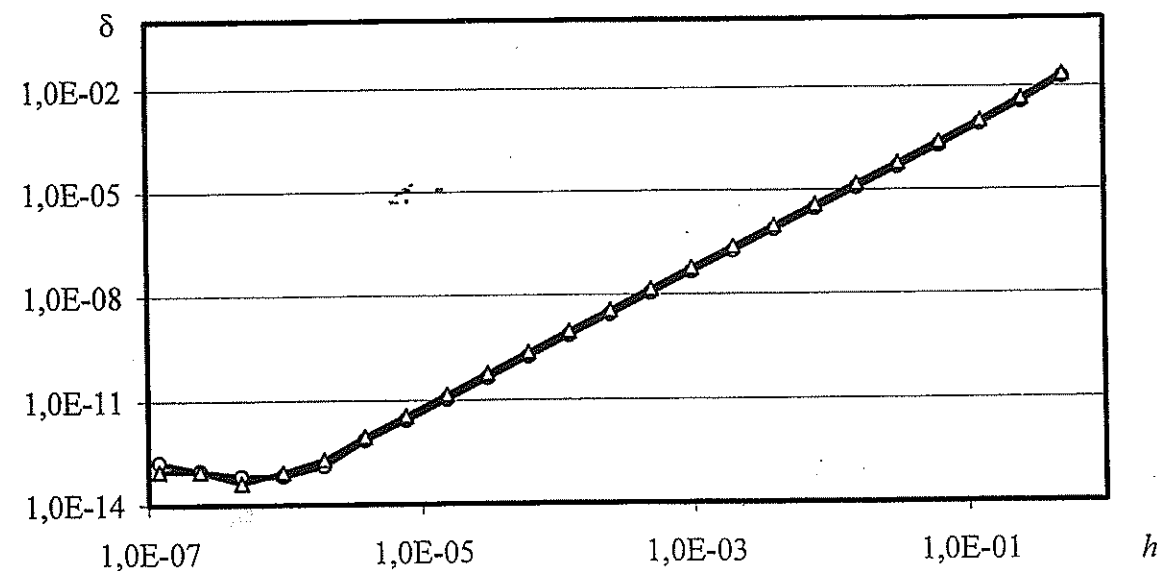


Рис. 3.5. Сходимость на последовательности сеток Ω_n решений задачи Коши методом Рунге – Кутты 2-го порядка: зависимости погрешностей $\delta_{h,h/2}$ (—○—) и δ_h (—△—) от шага интегрирования h

Выводы

1. Найдено с помощью метода Рунге – Кутты 2-го порядка численное решение поставленной задачи Коши.
2. Исследована сходимость численного решения: с уменьшением шага интегрирования h сокращается отклонение численного решения от точного, а также различие двух численных решений, полученных с шагами $h, h/2, h/4, h/8, \dots$, соответственно.
3. Установлено, что для получения численного решения с погрешностью не выше 10^{-6} шаг интегрирования должен быть не более $4,0 \cdot 10^{-3}$ (см. рис. 3.5).
4. Следует отметить некоторое повышение погрешности численного решения при малых шагах интегрирования. По-видимому, при шагах интегрирования, меньших $4,7 \cdot 10^{-7}$, на точность получаемого решения оказывает влияние погрешность округления данных, хранимых в ЭВМ.
5. Для получения численного решения задачи Коши методом Рунге – Кутты 2-го порядка с заданной погрешностью на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) с шагом $4,0 \cdot 10^{-3}$ требуется $4,6 \cdot 10^{-5}$ с.

3.1.3. Метод Рунге – Кутты 3-го порядка

Задание. Для задачи Коши $\frac{dy}{dx} = -y, y|_{x=0} = 1$, на интервале $[0, 2]$:

- разработать вычислительную программу, реализующую метод Рунге – Кутты 3-го порядка;
- найти численное решение дифференциального уравнения;
- исследовать сходимость последовательности численных решений при уменьшающихся шагах интегрирования;
- определить шаг интегрирования, обеспечивающий погрешность численного решения не более 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Пусть для отрезка $[a, b]$, на котором ищется решение дифференциального уравнения, построена $\Omega_n = \{x_0 = a; x_i = a + i \cdot h; i = \overline{0, n}; h = (b - a)/n\}$ – сеточная область с постоянным шагом h . Для нахождения численного решения методом Рунге – Кутты 3-го порядка вычислительный процесс строится в соответствии с выражениями

$$K_1 = f(x_k, y_k),$$

$$K_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1\right),$$

$$K_3 = f(x_k + h, y_k - hK_1 + 2hK_2),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3), \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_0 = y(0).$$

Здесь, как и ранее, y_k – результат численного решения дифференциального уравнения. Погрешность аппроксимации исходного дифференциального уравнения приведенной схемой Рунге – Кутты имеет третий порядок, $\delta = O(h^3)$.

Выполнение расчетов

Для различных значений шага интегрирования h определяются, в соответствии со схемой Рунге – Кутты 3-го порядка, численные решения заданного уравнения (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Численные решения задачи Коши $dy/dx = -y, y|_{x=0} = 1$, методом Рунге – Кутты 3-го порядка при различных шагах интегрирования h

x_i	$h = 0,5$	$h = 0,25$	$h = 0,125$	Точное решение
0,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,125			0,88249	0,88249
0,250		0,77865	0,77878	0,77880
0,375			0,68727	0,68729
0,500	0,60417	0,60629	0,60650	0,60653
0,625			0,53523	0,53526
0,750		0,47208	0,47233	0,47237
0,875			0,41683	0,41686
1,000	0,36502	0,36759	0,36785	0,36788
1,125			0,32462	0,32465
1,250		0,28622	0,28647	0,28651
1,375			0,25281	0,25284
1,500	0,22053	0,22286	0,22310	0,22313
1,625			0,19688	0,19691
1,750		0,17353	0,17375	0,17377
1,875			0,15333	0,15336
2,000	0,13324	0,13512	0,13531	0,13534

С использованием численных решений, полученных для разных шагов интегрирования h , оцениваются различия $\delta_{h,h/2} = \max_{x_k \in \Omega_n} |y_k^h - y_k^{h/2}|$ между этими решениями (для общих точек x_k), а также отклонения $\delta_h = \max_{x_k \in \Omega_n} |y_k - y(x_k)|$ полученных численных решений от точного.

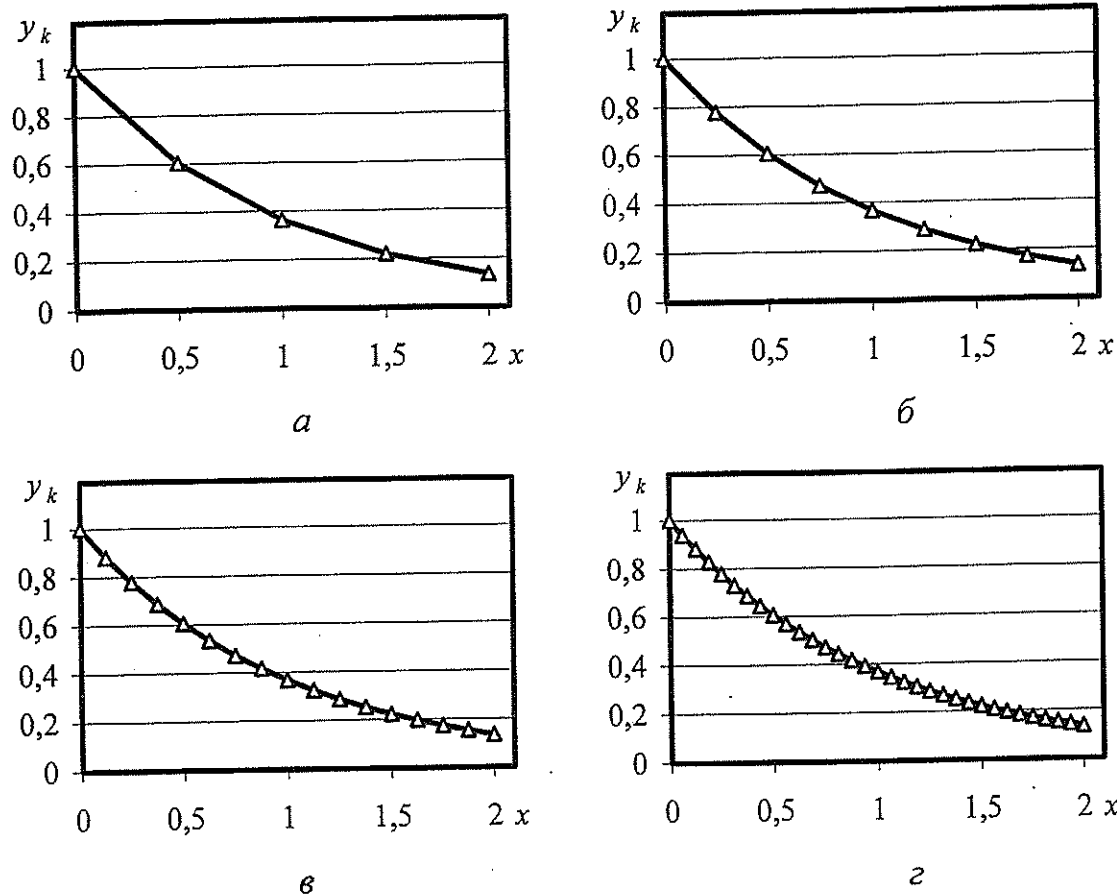


Рис. 3.6. Численные решения задачи Коши методом Рунге – Кутты 3-го порядка при $h = 0,5$ (а), $h = 0,25$ (б), $h = 0,125$ (в) и $h = 0,0625$ (г)

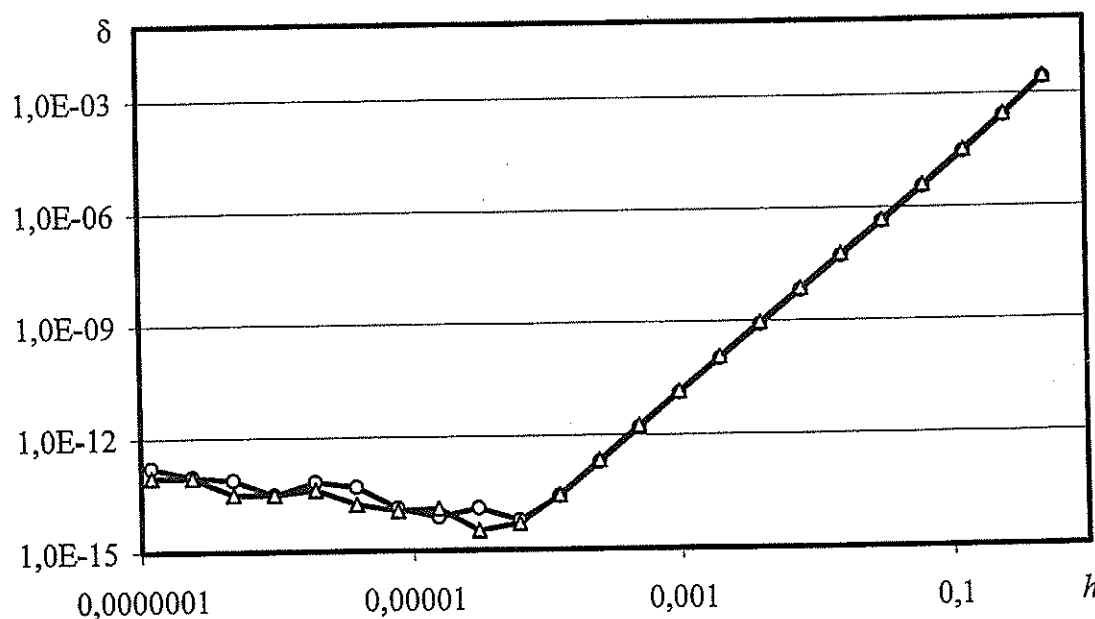


Рис. 3.7. Зависимости от шага интегрирования h погрешностей $\delta_{h,h/2}$ (—○—) и δ_h (—△—) решений задачи Коши методом Рунге – Кутты 3-го порядка

Результаты численного решения задачи этим методом показаны на рис. 3.6. На рис. 3.7 приведены зависимости погрешностей $\delta_{h,h/2}$ и δ_h численных решений от шага интегрирования h .

Выводы

1. Найдено с помощью метода Рунге – Кутты 3-го порядка численное решение поставленной задачи Коши.

2. Исследована сходимость численного решения: с уменьшением шага интегрирования h сокращается отклонение численного решения от точного, а также различие последовательности численных решений, полученных с шагами $h, h/2, h/4, h/8, \dots$, соответственно.

3. Для получения численного решения с погрешностью не выше 10^{-6} шаг интегрирования должен быть не более $3,2 \cdot 10^{-2}$ (см. рис. 3.7).

4. Следует отметить повышение погрешности численного решения при шагах интегрирования, меньших $3,1 \cdot 10^{-5}$, вследствие влияния погрешностей округления данных, хранимых в ЭВМ.

5. Для получения численного решения задачи Коши методом Рунге – Кутты 3-го порядка с заданной погрешностью на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) с шагом $3,2 \cdot 10^{-2}$ требуется $7,4 \cdot 10^{-6}$ с.

3.1.4. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка

Задание. Для задачи Коши $\frac{dy}{dx} = -y, y|_{x=0} = 1$, на интервале $[0, 2]$:

- разработать вычислительную программу, реализующую метод Рунге – Кутты 4-го порядка;
- найти численное решение дифференциального уравнения;
- исследовать сходимость последовательности численных решений при уменьшающихся шагах интегрирования;
- определить шаг интегрирования, обеспечивающий погрешность численного решения не более 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Пусть для отрезка $[a, b]$, на котором ищется решение дифференциального уравнения, построена $\Omega_n = \{x_0 = a; x_i = a + i \cdot h; i = \overline{0, n}; h = (b - a)/n\}$ – сеточная область с постоянным шагом h . Для нахождения численного решения методом Рунге – Кутты 4-го порядка вычислительный процесс строится в соответствии с выражениями

$$K_1 = f(x_k, y_k),$$

$$K_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} K_1\right),$$

$$K_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2\right),$$

$$K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_0 = y(0).$$

Здесь y_k – результат численного решения дифференциального уравнения. Погрешность аппроксимации исходного дифференциального уравнения приведенной схемой Рунге – Кутты имеет четвертый порядок, $\delta = O(h^4)$.

Выполнение расчетов

Для различных значений шага интегрирования h определяются, в соответствии со схемой Рунге – Кутты 4-го порядка, численные решения заданного уравнения (табл. 3.4). Результаты численного решения задачи этим методом показаны на рис. 3.8.

Таблица 3.4

Численные решения задачи Коши $dy/dx = -y$, $y|_{x=0} = 1$, методом Рунге – Кутты 4-го порядка при различных шагах интегрирования h

x_i	$h = 0,5$	$h = 0,25$	$h = 0,125$	Точное решение
0,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,125			0,88250	0,88249
0,250		0,77881	0,77880	0,77880
0,375			0,68729	0,68729
0,500	0,60677	0,60654	0,60653	0,60653
0,625			0,53526	0,53526
0,750		0,47238	0,47237	0,47237
0,875			0,41686	0,41686
1,000	0,36817	0,36789	0,36788	0,36788
1,125			0,32465	0,32465
1,250		0,28652	0,28651	0,28651
1,375			0,25284	0,25284
1,500	0,22340	0,22314	0,22313	0,22313
1,625			0,19691	0,19691
1,750		0,17379	0,17377	0,17377
1,875			0,15336	0,15336
2,000	0,13555	0,13535	0,13534	0,13534

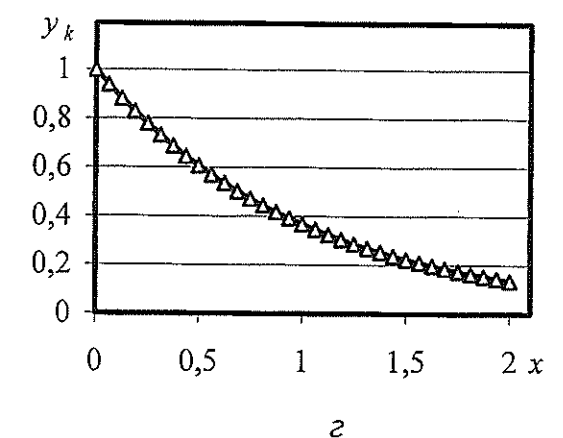
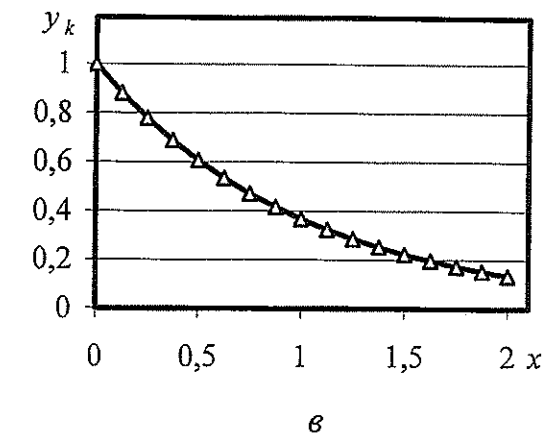
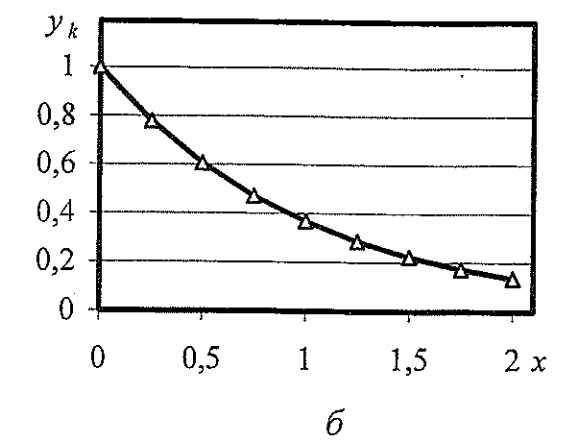
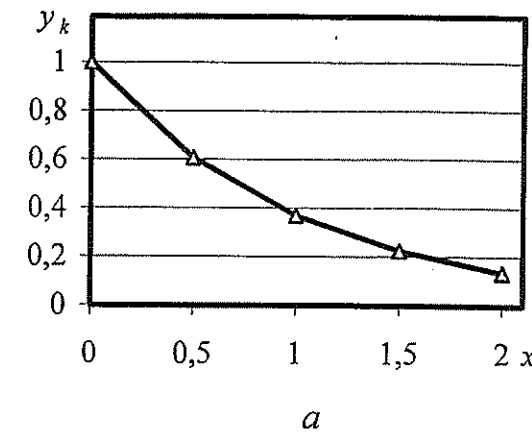


Рис. 3.8. Численные решения задачи Коши методом Рунге – Кутты 4-го порядка при различных шагах интегрирования: $h = 0,5$ (а), $h = 0,25$ (б), $h = 0,125$ (в) и $h = 0,0625$ (г)

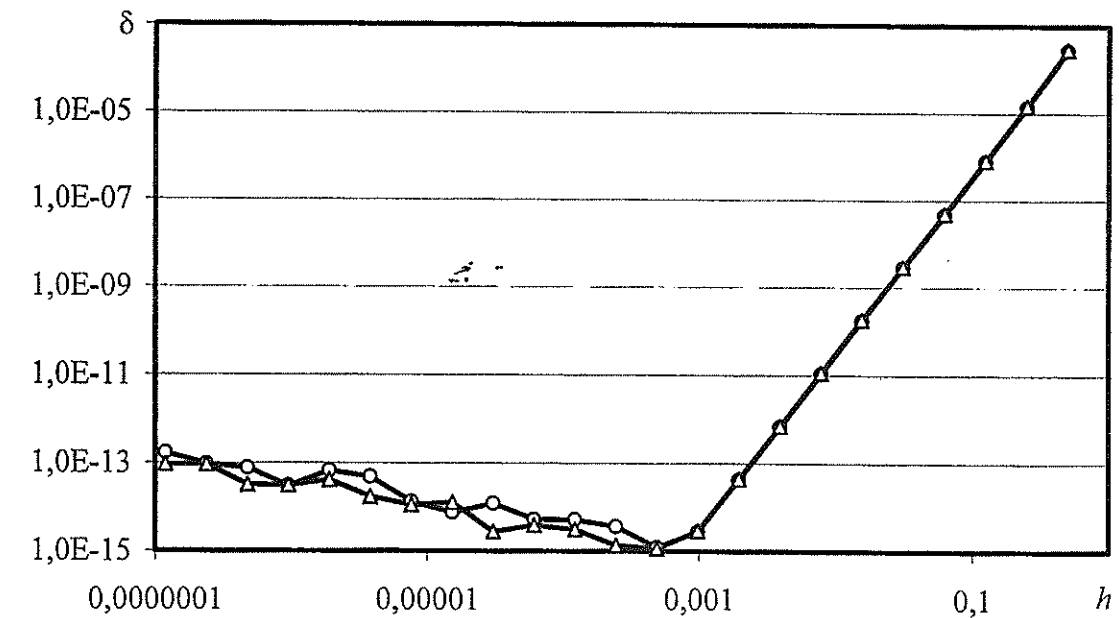


Рис. 3.9. Сходимость на последовательности сеток Ω_n решений задачи Коши методом Рунге – Кутты 4-го порядка: зависимости погрешностей $\delta_{h,h/2}$ (—o—) и δ_h (—Δ—) от шага интегрирования h

С использованием численных решений, полученных для разных шагов интегрирования h , оцениваются различия $\delta_{h,h/2} = \max_{x_k \in \Omega_n} |y_k^h - y_k^{h/2}|$ между этими решениями (для общих точек x_k), а также отклонения $\delta_h = \max_{x_k \in \Omega_n} |y_k - y(x_k)|$ получаемых численных решений от точного. На рис. 3.9 приведены зависимости погрешностей $\delta_{h,h/2}$ и δ_h численных решений от шага интегрирования h .

Выводы

1. Найдено с помощью метода Рунге – Кутты 4-го порядка численное решение поставленной задачи Коши.
2. Исследована сходимость численного решения: с уменьшением шага интегрирования h сокращается отклонение численного решения от точного, а также различие последовательности численных решений, полученных с шагами $h, h/2, h/4, h/8, \dots$, соответственно.
3. Для получения численного решения с погрешностью не выше 10^{-6} шаг интегрирования должен быть не более $1,25 \cdot 10^{-1}$ (см. рис. 3.9).
4. Повышение погрешности численного решения при шагах интегрирования, меньших $4,9 \cdot 10^{-4}$, обусловлено влиянием погрешности округления данных, хранимых в ЭВМ.
5. Для получения численного решения задачи Коши методом Рунге – Кутты 4-го порядка с заданной погрешностью на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) с шагом $1,25 \cdot 10^{-1}$ требуется $2,4 \cdot 10^{-6}$ с.

3.1.5. Метод Адамса

Задание. Для задачи Коши $\frac{dy}{dx} = -y, y|_{x=0} = 1$, на интервале $[0, 2]$:

- разработать вычислительную программу, реализующую метод Адамса;
- найти численное решение дифференциального уравнения;
- исследовать сходимость последовательности численных решений при уменьшающихся шагах интегрирования;
- определить шаг интегрирования, обеспечивающий погрешность численного решения не более 10^{-6} ;
- оценить быстрдействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Пусть для отрезка $[a, b]$, на котором ищется решение дифференциального уравнения, построена $\Omega_n = \{x_0 = a; x_i = a + i \cdot h; i = 0, n; h = (b - a)/n\}$ – сеточная область с постоянным шагом h . Предполагается, что для четырех последова-

тельных узлов: $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k$, известны приближенные значения искомой функции: $y_{k-3}, y_{k-2}, y_{k-1}, y_k$, а значит, можно подсчитать соответствующие значения правой части дифференциального уравнения, $F(x_{k-3}) = f(x_{k-3}, y_{k-3}), F(x_{k-2}) = f(x_{k-2}, y_{k-2}), F(x_{k-1}) = f(x_{k-1}, y_{k-1})$ и $F(x_k) = f(x_k, y_k)$. Для нахождения численного решения методом Адамса (при постоянном шаге h) вычислительный процесс строится в соответствии с выражением

$$y_{k+1} = y_k + F(x_k)h + F(x_{k-1}, x_k) \frac{h^2}{2} + F(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) \frac{5h^3}{6} + F(x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) \frac{9h^4}{4}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_0 = y(0).$$

Здесь

$$F(x_{k-1}, x_k) = \frac{F(x_{k-1}) - F(x_k)}{x_{k-1} - x_k},$$

$$F(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) = \frac{F(x_{k-2}, x_{k-1}) - F(x_{k-1}, x_k)}{x_{k-2} - x_k},$$

$$F(x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) = \frac{F(x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}) - F(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k)}{x_{k-3} - x_k}$$

– разделенные разности, являющиеся разностными аналогами соответствующих производных функции $F(x)$. Погрешность аппроксимации исходного дифференциального уравнения приведенной схемой Адамса имеет четвертый порядок, $\delta = O(h^4)$.

Выполнение расчетов

Поскольку разностная схема метода Адамса не является самостартующей, для нахождения решений y_1, y_2, y_3 следует использовать метод интегрирования, обеспечивающий погрешность не ниже четвертого порядка, например метод Рунге – Кутты 4-го порядка.

Таблица 3.5

Численные решения задачи Коши $dy/dx = -y, y|_{x=0} = 1$ методом Адамса¹ при различных шагах интегрирования h

x_i	$h = 0,5$	$h = 0,25$	$h = 0,125$	Точное решение
0,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,125			0,88250	0,88249
0,250		0,77881	0,77880	0,77880
0,375			0,68729	0,68729

¹ Первые три шага выполнены методом Рунге–Кутты 4-го порядка

Окончание табл. 3.5

x_i	$h = 0,5$	$h = 0,25$	$h = 0,125$	Точное решение
0,500	0,60677	0,60654	0,60654	0,60653
0,625			0,53528	0,53526
0,750		0,47238	0,47239	0,47237
0,875			0,41688	0,41686
1,000	0,36817	0,36810	0,36790	0,36788
1,125			0,32468	0,32465
1,250		0,28677	0,28653	0,28651
1,375			0,25287	0,25284
1,500	0,22340	0,22350	0,22316	0,22313
1,625			0,19694	0,19691
1,750		0,17411	0,17380	0,17377
1,875			0,15338	0,15336
2,000	0,13975	0,13571	0,13536	0,13534

Далее, для различных значений шага интегрирования h определяются (в соответствии со схемой Адамса) численные решения заданного уравнения (табл. 3.5 и рис. 3.10).

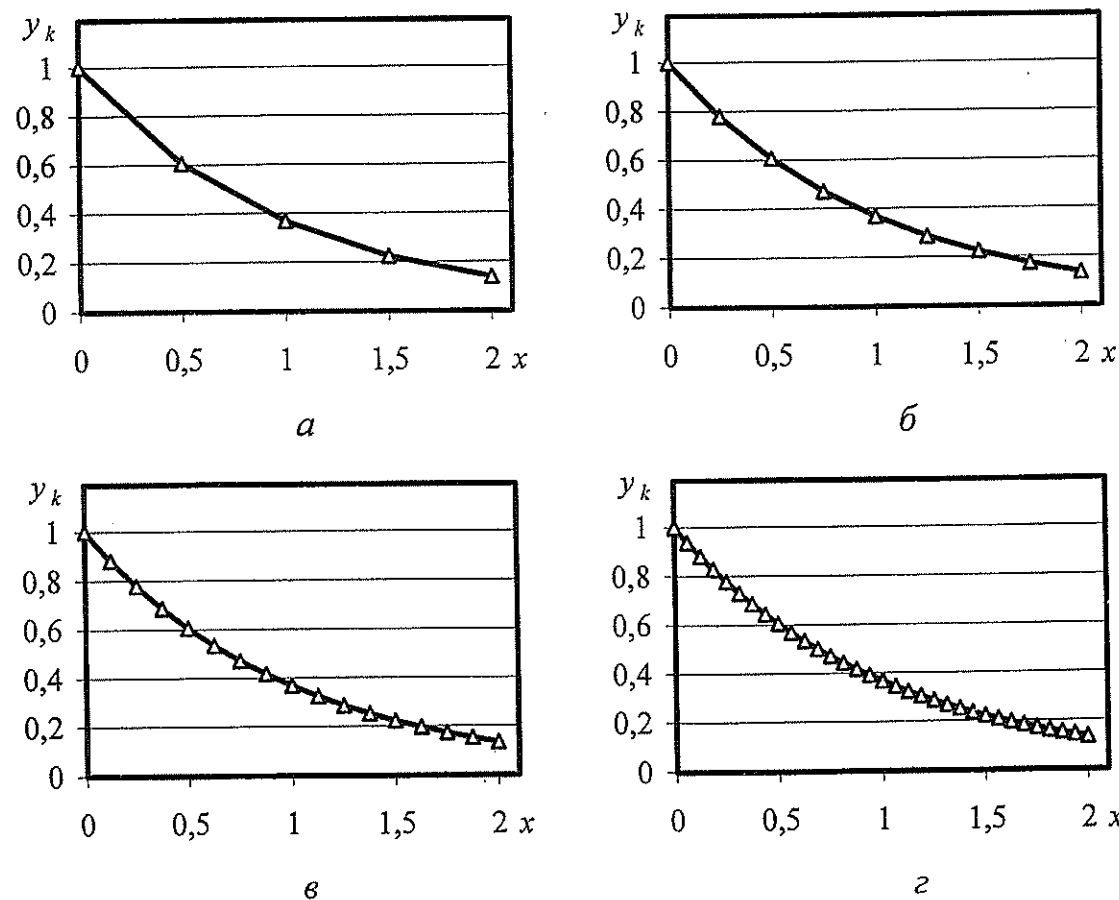


Рис. 3.10. Численные решения задачи Коши при различных шагах

интегрирования: $h = 0,5$ (а), $h = 0,25$ (б), $h = 0,125$ (в) и $h = 0,0625$ (г)

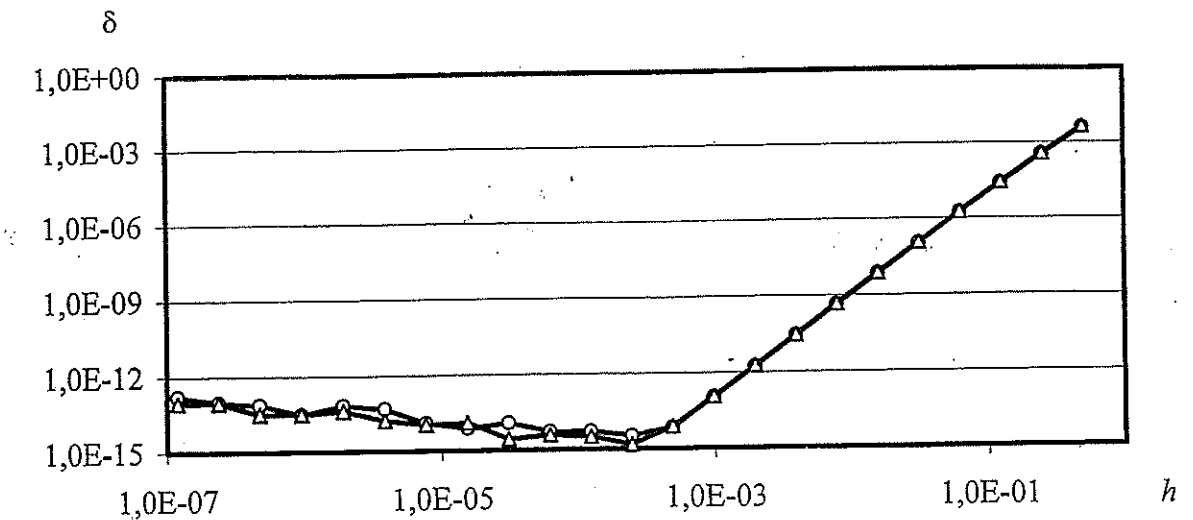


Рис. 3.11: Сходимость на последовательности сеток Ω_n численных решений задачи Коши методом Адамса: зависимости погрешностей $\delta_{h,h/2}$ (—○—) и δ_h (—△—) от величины шага интегрирования h

С использованием численных решений, полученных для разных шагов интегрирования h , оцениваются различия $\delta_{h,h/2} = \max_{x_k \in \Omega_n} |y_k^h - y_k^{h/2}|$ между этими решениями (для общих точек x_k), а также отклонения $\delta_h = \max_{x_k \in \Omega_n} |y_k - y(x_k)|$ получаемых численных решений от точного. Результаты численного решения задачи этим методом показаны на рис. 3.10. На рис. 3.11 приведены зависимости погрешностей $\delta_{h,h/2}$ и δ_h численных решений от шага интегрирования h .

Выводы

1. С помощью метода Адамса найдено численное решение поставленной задачи Коши.
2. Исследована сходимость численного решения: с уменьшением шага интегрирования h сокращается отклонение численного решения от точного, а также различие последовательности численных решений, полученных с шагами $h, h/2, h/4, h/8, \dots$, соответственно.
3. Для получения численного решения с погрешностью не выше 10^{-6} шаг интегрирования должен быть не более $3,1 \cdot 10^{-2}$ (см. рис. 3.11).
4. Повышение погрешности численного решения при шагах интегрирования, меньших $2,4 \cdot 10^{-4}$, обусловлено влиянием погрешности округления данных, хранимых в ЭВМ.
5. Для численного решения задачи Коши методом Адамса с заданной погрешностью на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) с шагом $3,1 \cdot 10^{-2}$ требуется $1,4 \cdot 10^{-5}$ с.

6. Для достижения погрешности, не превышающей 10^{-6} , рассмотренные численные методы решения задачи Коши требуют различных затрат времени: метод Эйлера – $13,4 \cdot 10^{-3}$ с, метод Рунге – Кутты 2-го порядка – $4,6 \cdot 10^{-5}$ с, метод Рунге – Кутты 3-го порядка – $7,4 \cdot 10^{-6}$ с, метод Рунге – Кутты 4-го порядка – $2,4 \cdot 10^{-6}$ с, метод Адамса – $1,4 \cdot 10^{-5}$ с. Наименьших ресурсов вычислительной техники (при одинаковой точности) для решения поставленной задачи Коши требует метод Рунге – Кутты 4-го порядка.

3.2. Граничные задачи (разностный метод)

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x).$$

В граничной задаче, в отличие от задачи Коши, условия для определения постоянных интегрирования задают в нескольких различных точках отрезка, на котором ищут решение исходной дифференциальной задачи. Граничное условие *первого* рода определяет значение искомой функции в заданной точке, например

$$y|_{x=a} = A.$$

Граничное условие *второго* рода задает значение производной искомого решения,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = A.$$

Граничное условие *третьего* рода связывает значение искомой функции и ее производной,

$$\alpha_0 y|_a + \alpha_1 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = A.$$

Возможны различные комбинации граничных условий на концах отрезка $[a, b]$, например

$$\alpha_0 y|_{x=a} + \alpha_1 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = A, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=b} = B.$$

Задание. Для дифференциального уравнения второго порядка $y'' + y = x$ с граничными условиями $y(0) = 0, y'(1) = 0$:

- построить разностные аналоги дифференциального уравнения и граничных условий;
- оценить погрешность аппроксимации дифференциального уравнения и граничных условий этими разностными аналогами;

– разработать вычислительную программу, реализующую разностный метод;

– с помощью разработанной программы найти численное решение поставленной задачи;

– исследовать сходимость численных решений и определить зависимость погрешности численного решения от шага интегрирования h ;

– определить шаг интегрирования h , обеспечивающий погрешность численного решения не выше 10^{-6} ;

– оценить быстродействие вычислительной программы.

Алгоритм решения

Пусть $\Omega_n = \{x_k = a + k \cdot h, k = \overline{0, n}, h = (b - a)/n\}$ – разностная сетка с постоянным шагом h на заданном отрезке $[a, b]$. Для замены дифференциальной задачи разностным аналогом используются аппроксимации первой и второй производных:

$$\frac{dy(x_k)}{dx} \approx \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}))}{2h},$$

$$\frac{d^2 y(x_k)}{dx^2} \approx \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1}))}{h^2},$$

и конструируется разностный аналог заданного дифференциального уравнения для произвольного внутреннего узла k в виде

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + y_k = x_k.$$

Приводя подобные слагаемые, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$y_{k-1} + y_k(h^2 - 2) + y_{k+1} = x_k h^2, \quad k = \overline{1, n-1},$$

относительно узловых значений $y_k, k = \overline{0, n}$ искомой функции $y(x)$. Поскольку в этих уравнениях содержится $n + 1$ неизвестное значение искомой функции, необходимо дополнить эту систему еще двумя алгебраическими уравнениями, получаемыми при замене граничных условий разностными аналогами, например

$$y_0 = 0, \quad \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = 0.$$

Теперь система $n + 1$ алгебраического уравнения содержит $n + 1$ неизвестную величину y_k .

Для оценки погрешности аппроксимации граничной задачи разностным аналогом используются разложения решения задачи в ряды Тейлора вблизи точки x_k ,

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + y'''(x_k)\frac{h^3}{6} + y^{iv}(x_k)\frac{h^4}{24} + \dots,$$

$$y(x_{k-1}) = y(x_k) - y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} - y'''(x_k)\frac{h^3}{6} + y^{iv}(x_k)\frac{h^4}{24} + \dots$$

Подстановка этих выражений в разностный аналог заданного уравнения приводит к выражению, определяющему величину погрешности

$$\psi_k = \frac{y(x_{k+1}) - 2 \cdot y(x_k) + y(x_{k-1}))}{h^2} + y(x_k) - x_k =$$

$$= y''(x_k) + y^{iv}(x_k)\frac{h^2}{12} + y(x_k) - x_k + \dots = [y''(x_k) + y(x_k) - x_k] + \frac{h^2}{12} y^{iv}(x_k) + \dots$$

Слагаемое, находящееся в квадратных скобках, совпадает с исходным уравнением и поэтому обращается в нуль. Погрешность аппроксимации

$$\psi_k = \frac{h^2}{12} y^{iv}(x_k) + \dots = O(h^2)$$

заданного уравнения разностным аналогом имеет второй порядок.

Первое граничное условие $y(0) = 0$ выражением $y_0 = 0$ аппроксимируется точно. Второе граничное условие $y'(1) = 0$ заменяется разностным аналогом

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = 0.$$

Подстановка в этот разностный аналог ряда Тейлора

$$y(x_{n-1}) = y(x_n) - y'(x_n)h + y''(x_n)\frac{h^2}{2} + \dots$$

разложения искомого решения позволяет оценить погрешность аппроксимации граничного условия:

$$\psi_n = \frac{y(x_n) - y(x_{n-1}))}{h} = y'(x_n) - y''(x_n)\frac{h}{2} + \dots = O(h).$$

Погрешность аппроксимации граничного условия $y'(1) = 0$ используемым разностным аналогом имеет первый порядок. Общая погрешность аппроксимации граничной задачи разностной схемой определяется наибольшей из погрешностей $O(h^2)$ и $O(h)$, то есть имеет *первый* порядок.

Для решения построенной системы линейных алгебраических уравнений может быть использован любой из известных методов (Гаусса, Якоби, Зейделя, прогонки или другие).

Выполнение расчетов

Точное решение поставленной задачи складывается из общего решения

$y_1(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$ и частного решения $y_2(x) = x$, то есть

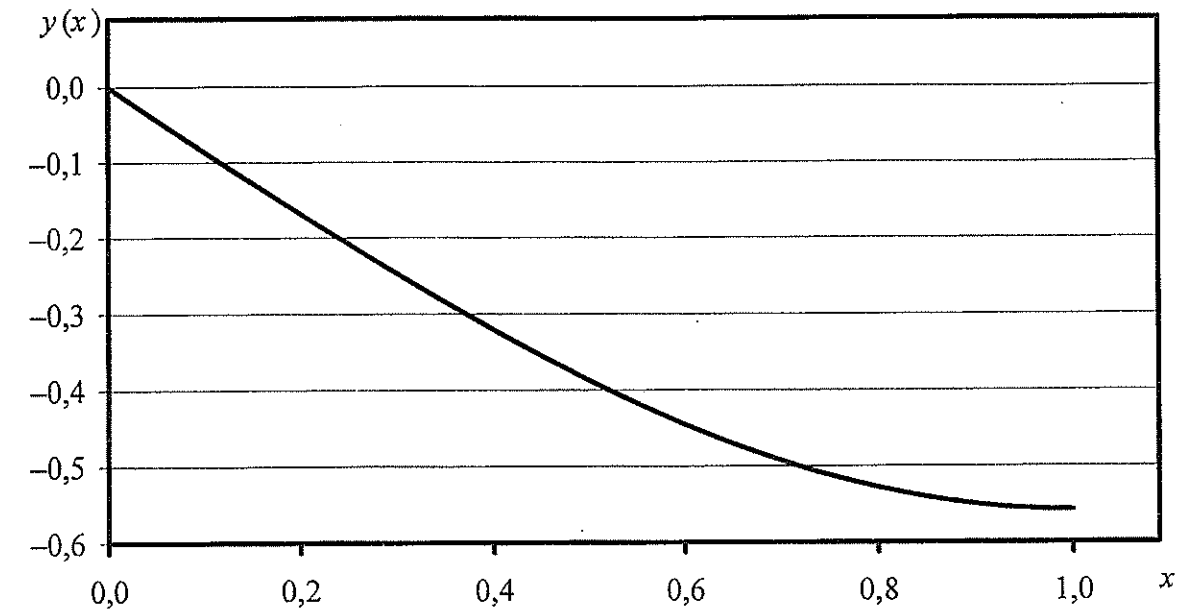
$$y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + x.$$


Рис. 3.12. Решение дифференциального уравнения $y'' + y = x$ с граничными условиями $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$

Таблица 3.6

Численные решения уравнения $y'' + y = x$ с граничными условиями $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$ сеточным методом при различных шагах интегрирования h

x_i	$h = 0,25$	$h = 0,125$	$h = 0,0625$	Точное решение
0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,0625			-0,04783	-0,05310
0,1250		-0,08598	-0,09523	-0,10575
0,1875			-0,14177	-0,15750
0,2500	-0,13803	-0,16867	-0,18703	-0,20790
0,3125			-0,23057	-0,25651
0,3750		-0,24481	-0,27200	-0,30290
0,4375			-0,31090	-0,34665
0,5000	-0,25180	-0,31127	-0,34687	-0,38733
0,5625			-0,37954	-0,42454
0,6250		-0,36505	-0,40852	-0,45791
0,6875			-0,43347	-0,48704
0,7500	-0,31859	-0,40336	-0,45404	-0,51159
0,8125			-0,46991	-0,53121
0,8750		-0,42365	-0,48077	-0,54558

0,9375			-0,48633	-0,55441
1,0000	-0,31859	-0,42365	-0,48633	-0,55741

С учетом граничных условий получается система уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) + 0 = 0, \\ y'(1) = C_1 \cos(1) - C_2 \sin(1) + 1 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $C_1 = -1/\cos 1$, $C_2 = 0$, и окончательно точное решение задачи имеет вид (рис. 3.12) $y(x) = x - \sin(x)/\cos 1$.

Для различных значений шага интегрирования h построенная система линейных алгебраических уравнений решается любым известным методом и определяются численные решения заданного дифференциального уравнения. Выбирается первоначальный шаг интегрирования, например, $h = (1-0)/4 = 0,25$. Далее шаг интегрирования уменьшается вдвое, $h = 0,125$, и вновь решается та же задача. Затем шаг интегрирования вновь уменьшается вдвое, $h = 0,0625$, и так далее. Результаты расчетов приведены в табл. 3.6 и рис. 3.13.

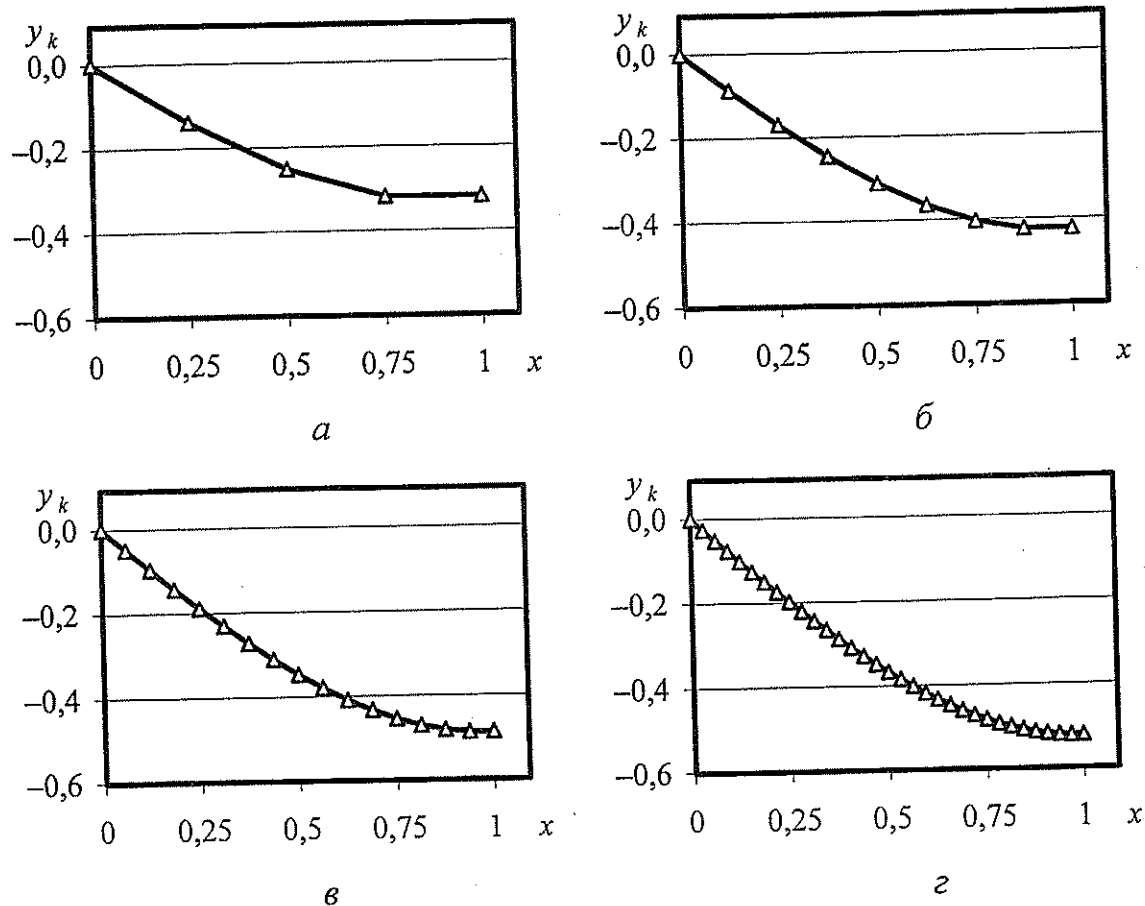


Рис. 3.13. Численные решения граничной задачи разностным методом при различных шагах интегрирования: $h = 0,25$ (а), $h = 0,125$ (б), $h = 0,0625$ (в) и $h = 0,03125$ (г)

Теперь, используя численные значения решений, полученных для разных шагов интегрирования h , оценим различия $\delta_{h,h/2} = \max_{x_k \in \Omega_n} |y_k^h - y_k^{h/2}|$ между этими решениями (для общих точек x_k), а также отклонения $\delta_h = \max_{x_k \in \Omega_n} |y_k - y(x_k)|$ получаемых численных решений от точного.

Результаты численного решения задачи сеточным методом¹ показаны на рис. 3.13. На рис. 3.14 приведены зависимости погрешностей $\delta_{h,h/2}$ и δ_h получаемых численных решений от шага интегрирования h .

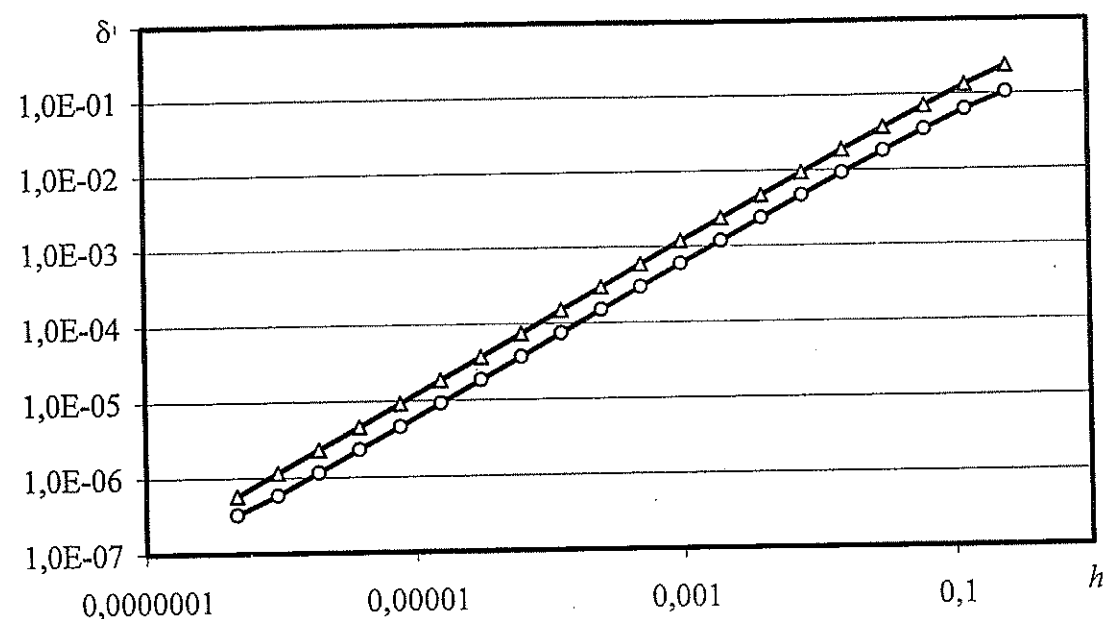


Рис. 3.14. Сходимость на последовательности сеток Ω_n численных решений граничной задачи разностным методом: зависимости погрешностей $\delta_{h,h/2}$ (—○—) и δ_h (—△—) от шага интегрирования h

При проведении вычислительных работ следует учесть, что порядок системы линейных алгебраических уравнений обратно пропорционален длине шага интегрирования. Например, при $h = 0,476837 \cdot 10^{-6}$ число уравнений превышает $2 \cdot 10^6$. Поэтому при малых шагах h разностной сетки необходимо использовать максимально возможную разрядность представления вещественных чисел в ЭВМ для снижения влияния накапливаемых при расчетах погрешностей округления.

Выводы

1. Построен разностный аналог дифференциальной задачи.

¹ Для обеспечения приемлемой точности решения на компьютере систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка необходимо использовать вещественные переменные с повышенным числом значащих цифр (переменные «двойной точности»).

2. Погрешность аппроксимации исходной дифференциальной задачи разностным аналогом имеет первый порядок.

3. Найдено численное решение заданного дифференциального уравнения второго порядка с граничными условиями. Для проведения вычислительных работ использовано 10-байтовое представление вещественных чисел для снижения влияния погрешностей округления на точность решения системы алгебраических уравнений высокого порядка.

4. Показано, что с уменьшением шага разностной сетки погрешность численного решения граничной задачи уменьшается.

5. При шаге разностной сетки $h = 1,0 \cdot 10^{-6}$ погрешность численного решения не превышает заданной величины, равной 10^{-6} .

6. Для получения численного решения граничной задачи разностным методом с заданной погрешностью на компьютере с процессором Intel® Pentium® 4 (тактовая частота 2,2 ГГц, объем оперативной памяти 512 Мбайт) с шагом $1,0 \cdot 10^{-6}$ требуется 0,74 с.

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

4.1. Системы линейных алгебраических уравнений

Для заданной системы линейных алгебраических уравнений:

- разработать вычислительную программу, реализующую (по указанию преподавателя) метод а) Гаусса; б) квадратного корня; в) Якоби; г) Зейделя;
- найти решение этой системы уравнений;
- построить¹ обратную матрицу A^{-1} ;
- вычислить² определители $\det(A)$ и $\det(A^{-1})$;
- подсчитать значение числа обусловленности M_A матрицы A ;
- оценить невязку и погрешность решения системы уравнений;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

4.2. Нелинейные уравнения

Для заданного алгебраического уравнения (табл. 4.1):

- выбрать отрезок, на котором имеется хотя бы один корень;
- проверить условия применимости (сходимости) методов Ньютона, половинного деления и простых итераций;
- разработать вычислительную программу, реализующую метод, для которого выполнены условия применимости (сходимости);
- вычислить корень уравнения с погрешностью не более 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Таблица 4.1

Варианты заданий для самостоятельного выполнения

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$(1-2x)e^{-x/2} = 2$	9	$\sin 2x - \cos(x-5) + 1,1 = 0$
2	$\sin x = 0,1 + 0,01x$	10	$\cos x + 1 = \sqrt{1 - (x/30)^2}$
3	$x \cos x = \sin x + 1$	11	$\sqrt{ x } - \sin x = 1$
4	$x \sin x = 1$	12	$\sin x - 0,1e^{0,1x} - 0,2 = 0$
5	$e^{0,1x} \sin x = 1$	13	$\sin x + 0,5 \cos x - 0,01x + 0,1 = 0$
6	$x \cos x = 1$	14	$e^{0,1x} \cos x - 0,001x^3 = 0$
7	$e^{0,1x} \cos x = x$	15	$\sin x + 1 = 0,1\sqrt{x}$
8	$x + e^{0,1x} \sin x = 1$	16	$\cos x - 0,1e^{0,1x} + 0,2 = 0$
17	$x + e^{0,1x} \cos x = 0$	24	$\cos x - 0,001x^2 - 0,01x + 0,1 = 0$
18	$x^2 + e^{0,1x} \sin x = 1$	25	$\sin x + 0,001x^2 + 0,01x + 0,1 = 0$

¹ Методом Гаусса или методом квадратного корня.

² Методом Гаусса.

Окончание табл. 4.1

№	Уравнение	№	Уравнение
19	$x^2 - e^{0,1x} \cos x = 0$	26	$\cos x - 1 = \sqrt{1 - (x/30)^2}$
20	$x - e^{0,1x} \cos x = 0$	27	$\arcsin x - \sqrt{x} = 0$
21	$x^2 - e^{0,1x} \sin x = 1$	28	$\arcsin x - \sqrt{x} = 0$
22	$\cos 2x + 0,001x^2 + 0,01x = 0$	29	$\arcsin x - \arcsin x = 0$
23	$(1 - 2x) - e^{x/2} = 2$	30	$\arcsin x - \arcsin x = 0$

4.3. Аппроксимация функции

Функцию на заданном отрезке (табл. 4.2) аппроксимировать (по указанию преподавателя) а) полиномом Лагранжа; б) полиномом Ньютона; в) методом наименьших квадратов; г) наилучшим приближением.

Исследовать сходимость последовательности полиномов на равномерной и чебышёвской сетках.

Таблица 4.2

Варианты заданий для самостоятельного выполнения

№	Функция	Отрезок	№	Функция	Отрезок
1	$f(x) = \cos x $	$[0, 2\pi]$	16	$f(x) = \cos(x-1) $	$[0, \pi]$
2	$f(x) = \sin x $	$[0, 2\pi]$	17	$f(x) = \sin(x-1) $	$[0, \pi]$
3	$f(x) = e^{- x-\pi }$	$[0, 2\pi]$	18	$f(x) = e^{- \sin(x) }$	$[0, 2\pi]$
4	$f(x) = x^2 - \pi $	$[0, 2]$	19	$f(x) = \sqrt{ x }$	$[-2, 2]$
5	$f(x) = e^{x-1} - \pi/2 $	$[0, 2]$	20	$f(x) = \sqrt{ x - \pi }$	$[2, 4]$
6	$f(x) = e^{- x }$	$[-4, 4]$	21	$f(x) = e^{- \cos(x) }$	$[0, \pi]$
7	$f(x) = x^2 - 2 x + 1$	$[-2, 2]$	22	$f(x) = -x^2 + 2 x - 1$	$[-2, 2]$
8	$f(x) = \sin x $	$[-\pi, \pi]$	23	$f(x) = \sin(x+1) $	$[\pi, 2\pi]$
9	$f(x) = x^2 - \pi $	$[-2, 0]$	24	$f(x) = \sqrt{x} - 1 $	$[0, 2]$
10	$f(x) = e^{1-x} - \pi/2 $	$[0, 2]$	25	$f(x) = x^3 - 3x $	$[-1, 1]$
11	$f(x) = \ln(1 + x)$	$[-3, 3]$	26	$f(x) = 5 - x $	$[4, 6]$
12	$f(x) = 5 - x $	$[-5, 5]$	27	$f(x) = 5 - x $	$[-6, 4]$
13	$f(x) = (x - 1)^2$	$[-2, 2]$	28	$f(x) = 5 - x $	$[-2, 2]$
14	$f(x) = \cos x $	$[-\pi, \pi]$	29	$f(x) = \cos(x+1) $	$[\pi, 2\pi]$
15	$f(x) = 3x - 5 $	$[-2, 5]$	30	$f(x) = x^3 - 3x $	$[1, 2]$

4.4. Численное дифференцирование

Вычислить приближенно значения первой и второй производных заданной функции в указанной точке (табл. 4.3) с помощью разностных аналогов

$$\text{а) } \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}; \quad \text{б) } \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}; \quad \text{в) } \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h};$$

$$\text{г) } \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2}.$$

Исследовать сходимость численно определяемых значений к точному значению и определить зависимость погрешности численного дифференцирования от шага h .

Таблица 4.3

Варианты заданий для самостоятельного выполнения

№	Функция	Точка	№	Функция	Точка
1	$f(x) = 1/\sin x$	1,5	16	$f(x) = e^{x^2}$	0
2	$f(x) = 1/\sin 4x$	0,4	17	$f(x) = e^{1-x^2}$	0
3	$f(x) = 1/(x^3 \sin x)$	1,5	18	$f(x) = e^{1+x^2}$	0
4	$f(x) = x \sin^3 x$	0	19	$f(x) = x^2 e^{x/2}$	0
5	$f(x) = x - \sin^2 x$	1,5	20	$f(x) = x^2 e^{-x^2/2}$	0
6	$f(x) = \sin x(1 + \sin x)$	4,5	21	$f(x) = e^x(1-x)^2/x$	1,0
7	$f(x) = \sin^2 x/(1 + \sin x)^2$	3,0	22	$f(x) = e^{x^3} \sqrt{x^2}$	0
8	$f(x) = \sin^2 x(1 + \sin x)$	1,5	23	$f(x) = e^{\sin x}$	1,5
9	$f(x) = \sin x + \sin^3 x$	1,5	24	$f(x) = e^{\cos x}$	0
10	$f(x) = \sqrt{1 + \sin^3 x}$	4,5	25	$f(x) = e^{\sin^2 x}$	1,5
11	$f(x) = \sqrt{1 - \sin^3 x}$	1,5	26	$f(x) = e^{\cos^2 x}$	0
12	$f(x) = \sqrt[3]{1 - \sin x}$	1,5	27	$f(x) = e^{\sqrt{\sin x}}$	1,5
13	$f(x) = \sqrt[3]{1 - \sin^3 x}$	1,5	28	$f(x) = e^{\sqrt{\cos x}}$	0
14	$f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$	3,0	29	$f(x) = \ln^2 x$	1
15	$f(x) = \sqrt[3]{1 + \sin^3 x}$	4,5	30	$f(x) = \ln^2 x/x^2$	1

4.5. Численное интегрирование

Для определенного интеграла (табл. 4.4):

- разработать вычислительную программу, реализующую (по указанию преподавателя) метод а) прямоугольников; б) трапеций; в) парабол (Симпсона);
- найти значение заданного интеграла;

- исследовать сходимость численно определяемых значений при уменьшении шагов интегрирования;
- определить зависимость погрешности численного интегрирования от шага интегрирования;
- установить, при каком шаге интегрирования погрешность вычисления интеграла не превышает 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Таблица 4.4

Варианты заданий для самостоятельного выполнения

№	Интеграл	№	Интеграл	№	Интеграл
1	$\int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{2x-1}}$	11	$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$	21	$\int_0^1 xe^{-x} dx$
2	$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$	12	$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$	22	$\int_0^{1/2} \arcsin x dx$
3	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}$	13	$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$	23	$\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$
4	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$	14	$\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$	24	$\int_1^2 x \ln x dx$
5	$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}$	15	$\int_{-2\pi}^{2\pi} x^4 \sin^3 x dx$	25	$\int_1^e \sin(\ln x) dx$
6	$\int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) \operatorname{tg} x dx$	16	$\int_1^e \ln^2 x dx$	26	$\int_0^1 x^2 \sin x dx$
7	$\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}}$	17	$\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x-1}}$	27	$\int_0^{1/2} x \arcsin x dx$
8	$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 4}{\cos^2 x} dx$	18	$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x dx}{\cos^2 x}$	28	$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + e^x}$
9	$\int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x \sqrt{e^x - 2} dx}{e^x + 2}$	19	$\int_0^3 x \operatorname{arctg} x dx$	29	$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$
10	$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\sin 2x + \cos \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x \right) dx$	20	$\int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$	30	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$

4.6. Задачи Коши

Для задачи Коши на заданном интервале (табл. 4.5):

- разработать вычислительную программу, реализующую (по указанию преподавателя) метод а) Эйлера; б) Рунге – Кутты 2-го порядка; в) Рунге – Кутты 3-го порядка; г) Рунге – Кутты 4-го порядка; д) Адамса;
- найти численное решение дифференциального уравнения;
- исследовать сходимость последовательности численных решений при уменьшающихся шагах интегрирования;
- определить шаг интегрирования, обеспечивающий погрешность численного решения не более 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Таблица 4.5

Варианты заданий для самостоятельного выполнения

№	Задача Коши	Интервал
1	$y' - y/x = x^2, y _{x=1} = 0$	[1, 2]
2	$y' - y \operatorname{ctg}(x) = 2x \sin(x), y _{x=\pi/2} = 0$	$[\pi/2, \pi]$
3	$y' + y \cos(x) = \sin(2x)/2, y _{x=0} = 0$	[0, 1]
4	$y' + y \operatorname{tg}(x) = \cos^2(x), y _{x=\pi/4} = 0,5$	$[\pi/4, \pi/2]$
5	$y' - y/(x+2) = x^2 + 2x, y _{x=-1} = 1,5$	[-1, 0]
6	$y' - 1/(x+1) = e^x(x+1), y _{x=0} = 1$	[0, 1]
7	$y' - y/x = x \sin(x), y _{x=\pi/2} = 1$	$[\pi/2, \pi]$
8	$y' + y/x = \sin(x), y _{x=\pi} = 1/\pi$	$[\pi, 2\pi]$
9	$y' + y/2x = x^2, y _{x=1} = 1$	[1, 2]
10	$y' + 2xy/(1+x^2) = 2x^2/(1+x^2), y _{x=0} = 2/3$	[0, 1]
11	$y' - (2x-5)y/x^2 = 5, y _{x=2} = 4$	[2, 3]
12	$y' + y/x = (x+1)e^x/x, y _{x=1} = e$	[1, 2]
13	$y' - y/x = -2 \ln(x)/x, y _{x=1} = 1$	[1, 2]
14	$y' - y/x = -8/x^2, y _{x=1} = 4$	[1, 2]
15	$y' + 2y/x = x^3, y _{x=1} = -5/6$	[1, 2]
16	$y' + y/x = 3x, y _{x=1} = 1$	[1, 2]
17	$y' - 2xy/(1+x^2) = 1+x^2, y _{x=1} = 3$	[1, 2]

№	Задача Коши	Интервал
18	$y' + (1-2x)y/x^2 = 1, y _{x=1} = 1$	[1, 2]
19	$y' + 3y/x = 2/x^3, y _{x=1} = 1$	[1, 2]
20	$y' + 2xy = -2x^3, y _{x=1} = 1/e$	[1, 2]
21	$y' + xy/2(1-x^2) = x/2, y _{x=0} = 2/3$	[0, 1]
22	$y' + xy = -x^3, y _{x=0} = 3$	[0, 1]
23	$y' - 2y/(x+1) = e^x(x+1)^2, y _{x=0} = 1$	[0, 1]
24	$y' + 2xy = e^{-x^2} x \sin(x), y _{x=0} = 1$	[0, 1]
25	$y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3, y _{x=0} = 0,5$	[0, 1]
26	$y' - y \cos(x) = -\sin(2x), y _{x=0} = 3$	[0, 1]
27	$y' - 4xy = -4x^3, y _{x=0} = -0,5$	[0, 1]
28	$y' - y/x = -\ln(x)/x, y _{x=1} = 1$	[1, 2]
29	$y' - 3x^2 y = x^2(1+x^3)/3, y _{x=0} = 0$	[0, 1]
30	$y' - y \cos(x) = \sin(2x), y _{x=0} = -1$	[0, 1]

4.7. Граничные задачи (разностный метод)

Для дифференциального уравнения второго порядка с заданными граничными условиями (см. табл. 4.6):

- построить разностные аналоги дифференциального уравнения и граничных условий;
- оценить погрешность аппроксимации дифференциального уравнения и граничных условий разностными аналогами;
- разработать вычислительную программу, реализующую разностный метод;
- с помощью разработанной программы найти численное решение поставленной задачи;
- исследовать сходимость численных решений и определить зависимость погрешности численного решения от шага интегрирования h ;
- определить шаг интегрирования h , обеспечивающий погрешность численного решения не выше 10^{-6} ;
- оценить быстродействие вычислительной программы.

Варианты заданий для самостоятельного выполнения

№	Дифференциальное уравнение	Граничные условия
1	$y'' + xy' = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 0,1$
2	$y'' - xy' = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 0,1$
3	$y'' + xy = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 0,1$
4	$y'' - xy = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 0,1$
5	$y'' + y \sin x = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 1$
6	$y'' - y \sin x = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 1$
7	$y'' + x^2 y' = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 0,1$
8	$y'' - x^2 y' = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 0,1$
9	$y'' + xy' + y = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 1$
10	$y'' - xy' + y = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 1$
11	$y'' + xy' - y = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 1$
12	$y'' - xy' - y = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 1$
13	$y'' - y' + xy = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 1$
14	$y'' - y' + xy = 0$	$y _{x=0} = 1, y' _{x=1} = 0$
15	$y'' + y' - xy = 0$	$y _{x=0} = 1, y' _{x=1} = 0$
16	$y'' + y' - xy = 0$	$y _{x=0} = 1, y' _{x=1} = 0$
17	$y'' + y \sin x = 0$	$y _{x=0} - y' _{x=0} = 1, y _{x=1} + y' _{x=1} = 1$
18	$y'' + y \sin x = 0$	$y _{x=0} + y' _{x=0} = 1, y _{x=1} + y' _{x=1} = 1$
19	$y'' + y \sin x = 0$	$y _{x=0} + y' _{x=0} = 1, y _{x=1} - y' _{x=1} = 1$
20	$y'' + y \sin x = 0$	$y _{x=0} - y' _{x=0} = 1, y _{x=1} - y' _{x=1} = 1$
21	$y'' + [\cos(2x) + 1]y = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 1$
22	$y'' + (\cos^2 x + 1)y = 0$	$y _{x=0} = 1, y' _{x=1} = 0$
23	$y'' + y' + e^{-2x}y = 0$	$y _{x=0} = 0, y _{x=1} = 1$
24	$y'' + y' - e^{-2x}y = 0$	$y _{x=0} = 1, y' _{x=1} = 0$
25	$y'' + y' + e^{-2x}y = 0$	$y _{x=0} = 1, y _{x=1} = 0$
26	$y'' + y' - e^{-2x}y = 0$	$y _{x=0} = 0, y' _{x=1} = 1$
27	$y'' - 2xy' + (x-1)y = 0$	$y' _{x=0} = 0, y _{x=1} = 1$
28	$y'' - 2xy' + (x-1)y = 0$	$y _{x=0} = 1, y' _{x=1} = 0$

Окончание табл. 4.7

№	Дифференциальное уравнение	Граничные условия
29	$y'' - 2xy' + (x-1)y = 0$	$y' _{x=0} = 0, y _{x=1} = 1$
30	$y'' + y' + (1-x)y = 0$	$y' _{x=0} = 1, y _{x=1} = 1$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бояршинов, М.Г. Численные методы: учеб. пособие. Ч. 1 / М.Г. Бояршинов; Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 1998. – 176 с.
2. Бояршинов, М.Г. Численные методы: учеб. пособие. Ч. 2 / М.Г. Бояршинов; Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 1999. – 200 с.
3. Бояршинов, М.Г. Численные методы: учеб. пособие. Ч. 3 / М.Г. Бояршинов; Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 2002. – 134 с.
4. Бояршинов, М.Г. Численные методы: учеб. пособие. Ч. 4 / М.Г. Бояршинов; Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 2006. – 162 с.
5. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 512 с.
6. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
7. Карташев, А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташев, Б.Л.Рождественский. – М.: Наука, 1976. – 256 с.
8. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
9. Самарский, А.А. Численные методы: учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1989. – 432 с.
10. Холл, Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт. – М.: Мир, 1979. – 312 с.