

Задача 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$ и $C(0, 0, 1)$.

Решение: Рассмотрим вектора

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Они лежат в плоскости, уравнение которой нужно найти. А для нахождения уравнения плоскости достаточно знать точку, через которую она должна проходить, и нормаль вектор, перпендикулярный плоскости. Нормаль можно получить, воспользовавшись векторным произведением двух векторов в этой плоскости.

Векторным произведением двух векторов является третий вектор, направленный перпендикулярно обоим векторам и образующий с ними правую тройку векторов.

Вычислить векторное произведение в трёхмерном пространстве можно, подсчитав псевдоопределитель матрицы, в которой в первой строчке стоят координатные орты, а во второй и третьей - координаты первого и второго векторов соответственно.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - \vec{j}(0 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) + \vec{k}(0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1) = \\ &= \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}. \end{aligned}$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно вектору нормали $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, можно записать как $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Далее следует раскрыть скобки и привести подобные члены.

Уравнение плоскости будет следующим:

$$1 \cdot x + (-1) \cdot y + 1 \cdot z - 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0,$$

то есть

$$x - y + z - 1 = 0.$$

Ответ: уравнение плоскости $x - y + z - 1 = 0$.

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.